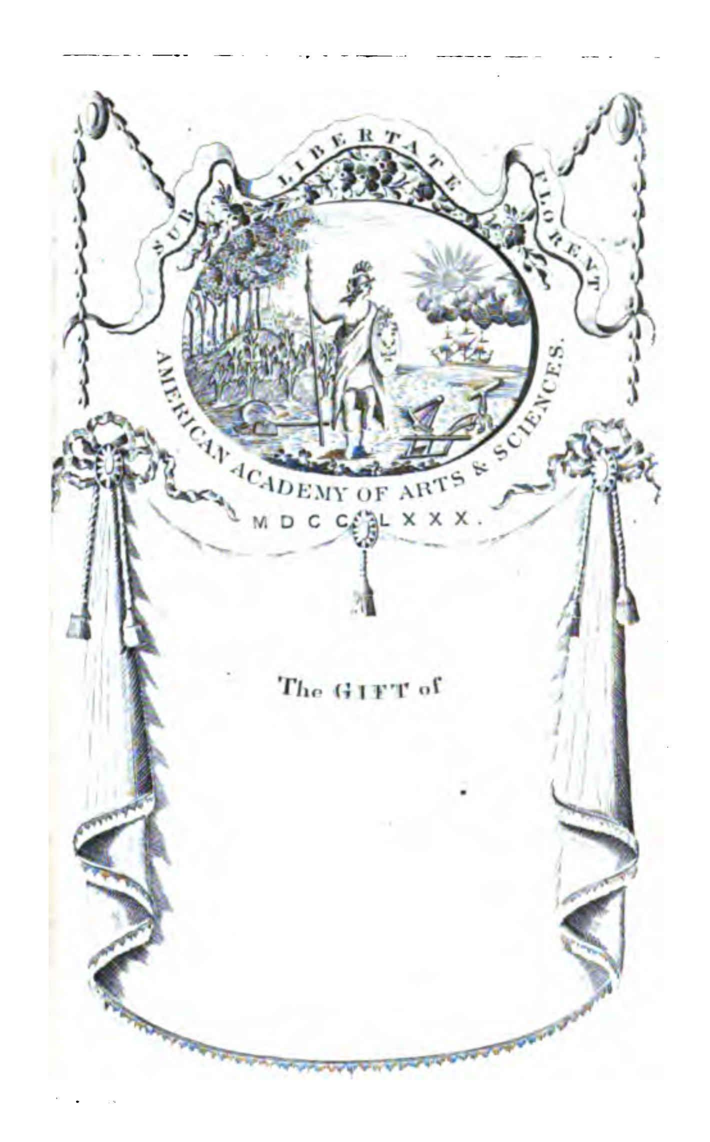



SUB LIBERTATE FLORENT
AMERICAN ACADEMY OF ARTS & SCIENCES.
MDCCLXXX.
The GIFT of

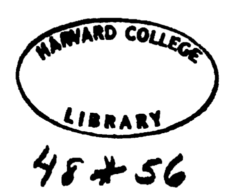
ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XV.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1893.



Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій*.

MÉMOIRES
de la section mathématique
de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russe
(Odessa).

T. XV.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.



КЪ ТЕОРІИ ВѢКОВОГО ОХЛАЖДЕНІЯ ЗЕМЛИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О ПРОИСХОЖДЕНІИ МАТЕРИКОВЪ и ОКЕАНИЧЕСКИХЪ БАССЕЙНОВЪ.

М. П. Рудскаго.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1892.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Въ I-ой части этой работы (XIV томъ Записокъ) въ III математическомъ приложеніи на 65 стр. формулы XIV ошибочны. Вмѣсто указаныхъ тамъ выраженій должно стоять:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{x^2 . X_{n-1}}{(2n-1).(2n+1)}$$

$$X'_{n+1} = X'_n - \frac{x^2 . X'_{n+1}}{(2n-1).(2n+1)}$$

потомъ:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} = \frac{x^2 . \xi_{n-1} + (2n-1)(2n+1)\xi_n}{x\left[x^2 \xi'_{n-1} - (2n-1)(2n+1)\xi'_n\right]}$$

Однако эта ошибка ничуть не вліяетъ на дальнѣйшій ходъ доказательства такъ, что высказанная подъ конецъ приложенія теорема вполнѣ справедлива.

Въ настоящей второй части моей работы въ III главѣ я повторяю иные результаты, изложенные уже въ I-ой части. Я это дѣлаю потому, что желаю второй части, составляющей нѣкоторое примѣненіе теоріи вѣкового охлажденія къ вопросу образованія материковъ, придать видъ законченнаго цѣлаго.

М. П. Рудскій.

ГЛАВА I.

Краткій очеркъ исторіи вопроса. Новѣйшія теоріи.

Уже древніе географы знали, что очертанія материковъ, уровень моря и т. д. не абсолютно постоянны. Иные, какъ н. п. Страбонъ задавались вопросомъ, какимъ образомъ происходятъ измѣненія рельефа земли. Страбонъ [1]) полагалъ, что измѣненія уровня морей и перемѣщенія береговой линіи вызываются движеніями твердыхъ частей земли. Море играетъ пассивную роль. Страбону казалось, что материки мало способны къ измѣненіямъ, за то морское дно можетъ подниматься и опускаться. Поднятіе дна сопровождается выступленіемъ моря изъ береговъ и сокращеніемъ поверхности суши, опусканіе дна влечетъ за собою противуположные результаты.

У нѣкоторыхъ средневѣковыхъ авторовъ встрѣчаемъ мнѣніе очевидно тѣсно связанное съ вѣрой въ чрезвычайное вліяніе звѣздъ на жизнь и на человѣческую судьбу, столь распространенной въ это время. Ристоро д'Ареццо [2]) и Данте думали, что суша сама по себѣ не можетъ ни подниматься ни опускаться; но звѣзды дѣйствуютъ на нее или такимъ-же образомъ, какъ магнитъ, или, вызывая внутри земли образованіе давящихъ вверхъ паровъ, притяженіемъ своимъ подымаютъ горы и возвышенности. Такимъ образомъ здѣсь рядомъ съ представ-

---

[1]) Ch. Lyell. Geschichte der Fortschritte der Geologie. Übers. v. Hartmann. Weimar 1842 г. стр. 33.

[2]) Suess. Antlitz der Erde II томъ. Wien 1888 г. 9 стр.

леніемъ о дѣйствіи звѣздъ встрѣчаемъ указанія на реакцію вулканическихъ силъ.

Плутонисты XVIII и XIX столѣтія, какъ Гуттонъ и Плейфэръ, а потомъ Бухъ и Гумбольтъ объясняли преобразованія рельефа земли воздѣйствіемъ вулканическихъ силъ. Но эта теорія зародилась въ Италіи, гдѣ раньше Гуттона встрѣчаемъ настоящаго вулканиста въ лицѣ Лаццаро Моро. Монахъ Дженерелли [1]) въ докладѣ, читанномъ въ 1749 г. въ Кремонской Академіи Наукъ утверждалъ, что вулканическія силы могутъ поднимать не только отдѣльныя горы, но даже цѣлые материки.

Рядомъ съ теоріями вулканистовъ въ XVIII столѣтіи встрѣчаемъ и другія. По мнѣнію Демалье [2]) поверхность земли была искони неровная, но первоначально была вся покрыта водою. Материки образовались благодаря постепенному отступленію моря.

Любопытную, но фантастическую теорію предлагалъ въ 1799 г. Бертранъ [3]). Внутри земли находится полость, а въ ней подвижной магнитъ. Онъ перемѣщается подъ вліяніемъ притяженія кометъ и увлекаетъ за собою воды океановъ. Такимъ образомъ очертанія морей измѣняются, море смѣняетъ сушу, а суша море.

Въ XIX столѣтіи разныя теоріи быстро смѣняютъ другъ друга. Кювье [4]) и Э. де-Бомонъ полагали, что рельефъ земли созданъ рядомъ катаклизмовъ, изъ которыхъ послѣдній извѣстенъ подъ названіемъ Ноева потопа. Со времени этого послѣдняго катаклизма въ рельефѣ земли произошли только самыя незначительныя измѣненія. Эли де-Бомонъ утверждалъ [5]) что,

---

[1]) Ch. Lyell. loc. cit.

[2]) Cuvier. Discours sur les révolutions de la surface du globe. Paris 1840 г. стр. 50. (Это сочиненіе служитъ вступленіемъ къ: Ossements fossiles).

[3]) Cuvier. loc. cit. стр. 56.

[4]) Cuvier. loc. cit. стр. 280.

[5]) Elie de Beaumont. Ueber das relative Alter der Gebirgszüge. Извлеченіе изъ письма къ Гумбольту. Poggendorff's annalen XVIII томъ 1830 г. стр. 24.

Американскія Анды образовались во время Ноева потопа. Другіе хребты образовались раньше, но ихъ рельефъ подобно рельефу всей земли потерпѣлъ тогда значительныя измѣненія. Извѣстно что потомъ Бомонъ придумалъ теорію, по которой земля уподоблялась огромному кристаллу. Кристаллизація происходитъ медленно и постепенно, но образованіе реберъ и прочихъ частей кристалла происходитъ не равномѣрно, а прерывисто, внезапно, что даетъ поводъ къ катаклизмамъ. Горные хребты, это ребра кристалла.

Другіе приверженцы теоріи катаклизмовъ, отчасти самъ Бомонъ искали причину катаклизмовъ въ вулканическихъ и тому подобныхъ силахъ. Эти силы дѣйствуютъ внезапно и прерывисто, ибо отвердѣвшая кора земная не даетъ возможности расходовать вулканическую энергію постепенно.

Въ связи съ этими теоріями находится и Буховская теорія образованія горъ, по которой горы ничто иное, какъ вулканы особаго рода, именно такъ называемые вулканы поднятія.

На мѣсто теоріи катаклизмовъ Ляелль поставилъ свою теорію о медленномъ, но непрерывномъ дѣйствіи геологическихъ факторовъ. Отрицая возможность самостоятельныхъ колебаній уровня моря, онъ объяснялъ многочисленные слѣды наводненія суши волнами моря и послѣдовавшаго затѣмъ отступленія водъ, поднятіемъ или опусканіемъ самыхъ материковъ или частей ихъ. Онъ между прочимъ указывалъ на то, что такія перемѣщенія суши могутъ происходить вслѣдствіе химическихъ [1]) процессовъ, измѣняющихъ объемъ веществъ, процессовъ, происходящихъ внутри земли. Это послѣднее ученіе было потомъ подробно и основательно развито Моромъ въ его «Принципахъ Геологіи».

Мы сдѣлали бѣглый обзоръ этихъ теорій, не вдаваясь въ подробную критику. Критика здѣсь не нужна, ибо онѣ уже

---

[1]) Или физическихъ н. п. кристаллизаціи

давно разобраны и всякой изъ нихъ отведено надлежащее мѣсто. Иныя изъ этихъ теорій заключаютъ въ себѣ значительную долю истины. Это можно н. п. сказать о теоріи Мора. Несомнѣнно многія дислокаціи произошли и происходятъ вслѣдствіе измѣненія объема при химическихъ процессахъ. Извѣстно, что дислокаціи въ области мѣсторожденій гипса объясняются сильнымъ расширеніемъ при превращеніи ангидрида въ гипсъ.

Остальныя прежнія теоріи образованія неровностей рельефа по большей части усматриваютъ причину дислокацій въ дѣйствіи вулканическихъ силъ. Новыя теоріи по большей части указываютъ на вѣковое охлажденіе земли, какъ на «primum mobile» дислокацій. Кромѣ этого указывается иногда на измѣненіе сжатія земли и на другіе факторы. Мы вкратцѣ просмотримъ нѣкоторыя изъ новѣйшихъ теорій образованія неровностей рельефа земли.

1. *Гипотеза Ноака* [1]) составлена отчасти еще подъ вліяніемъ идей Буха. «Мощныя цѣпи высокихъ горъ» говоритъ Ноакъ «возвышаются на трещинахъ, далеко простирающихся по поверхности земнаго шара и составляютъ нѣчто вродѣ остова материковъ. Возникновеніе горныхъ хребтовъ вызвало образованіе и обусловило очертанія современныхъ материковъ и соотвѣтствующихъ имъ морскихъ бассейновъ» [2]).

Ноакъ полагаетъ, что первоначальная тонкая кора земная была пересѣчена цѣлой сѣтью трещинъ, но по мѣрѣ того, какъ процессъ охлажденія подвигался впередъ, число трещинъ уменьшалось; наконецъ осталась только одна огромная трещина, опоясывающая всю землю. Чрезъ открытыя трещины лава выступала наружу, измѣняя положеніе ближайшихъ пластовъ земной оболочки. Такимъ образомъ произошли горные хребты съ продольнымъ ядромъ гранитной или другой лавы.

---

[1]) Noak. Ueber die Bildung der Continente. Neues Jahrb. für Mineralogie за 1875 г.

[2]) Loc. cit. стр. 904.

Когда сѣть трещинъ была густая, то образовались многочисленные, но не высокіе кряжи. По мѣрѣ того, какъ число трещинъ уменьшалось, высота новообразуемыхъ хребтовъ увеличивалась. Послѣдней единственной трещинѣ соотвѣтствуетъ самая большая горная система.

Ноакъ думаетъ, что эта система состоитъ изъ Андовъ Южной и Сѣверной Америки, потомъ изъ горъ Восточной Сибири, Центральной Азіи, изъ горъ Персіи, Кавказа, Балкана и Альпъ. Чтобы пояснить тотъ фактъ, что почти всѣ эти горные хребты находятся въ сѣверномъ полушаріи Ноакъ пробуетъ воспользоваться теоріей Шмика [1]).

Образованіе материковъ Ноакъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ [2]): въ расплавленномъ ядрѣ земномъ есть приливы лавы, слѣдующіе съ Востока на Западъ. Гребень приливной волны поднимаетъ надъ собою кору земную, но, дойдя до трещины, выливается наружу, а потому за трещиной реакція прилива значительно слабѣе. Такимъ образомъ приливъ внутренней лавы ежедневно поднимаетъ кору на одной сторонѣ трещины все выше и выше, а по другую сторону остается углубленіе. Выливающаяся на поверхность земли лава, на мѣстѣ трещины образуетъ горный хребетъ, служащій границею между сушею и моремъ.

Не говоря о другихъ слабыхъ сторонахъ гипотезы Ноака, замѣтимъ только, что 1) волна прилива въ ядрѣ земномъ согласно изслѣдованіямъ Томсона и молодого Дарвина весьма незначительна, 2) что за приливомъ слѣдуетъ отливъ, во время котораго части земной коры, поднявшіяся во время прилива должны опуститься. Эту трудность Ноакъ обходитъ молчаніемъ.

---

[1]) Теорія Шмика впрочемъ ложная. Приливная волна всегда сопровождается подобной волной на противуположномъ полушаріи, которой высота только немногимъ меньше высоты волны на полушаріи, обращенномъ къ притягивающему тѣлу. Слѣдовательно солнечная аттракція никакъ не можетъ вызвать постояннаго прилива на одномъ только полушаріи. *Авторъ.*

[2]) Loc. cit. стр. 906 и слѣд. Описаніе образованія материка Южной Америки.

Гипотезу Пиляра [1]) можно назвать гидростатической. Согласно этой гипотезѣ, кора земная состоитъ изъ отдѣльныхъ частей, плавающихъ въ Океанѣ лавы совершенно такъ, какъ льдины плаваютъ въ водѣ. Дѣйствительно, средняя плотность породъ, изъ которыхъ состоятъ верхніе пласты земли меньше, чѣмъ плотность вулканическихъ лавъ. Подобно тому, какъ льдина тѣмъ болѣе выдается надъ поверхностью воды, чѣмъ ея толщина подъ поверхностью больше, такъ и материки соотвѣтствуютъ болѣе толстымъ частямъ земной коры [2]).

Мы должны однако замѣтить, что это мнѣніе противурѣчитъ законамъ вѣкового охлажденія земли, согласно которымъ, какъ это было показано въ первой части этой работы, земля должна быть болѣе охлаждена подъ дномъ моря, вслѣдствіе чего толстыя части земной коры должны скорѣе соотвѣтствовать областямъ Океана, чѣмъ суши.

По теоріи Дэны [3]) земля состоитъ изъ твердой оболочки, пластичнаго полужидкаго промежуточнаго слоя и твердаго ядра. Внутреннее ядро имѣетъ пожалуй нѣсколько иную фигуру, чѣмъ сама земля. Нѣкоторыя части поверхности твердаго ядра могутъ находиться ближе къ поверхности земли. Такимъ образомъ слой расплавленной лавы, будучи нѣсколько тоньше, могъ скорѣе охладиться и внѣшняя кора здѣсь образовалась раньше. Материки находятся на мѣстѣ этихъ раньше отвердѣвшихъ частей земной коры. Въ остальныхъ областяхъ уровень еще

---

[1]) Pilar. Grundzüge der Abyssodynamik. Agram 1881.

[2]) Подобное мнѣніе относительно горныхъ хребтовъ было высказано уже прежде извѣстнымъ астрономомъ: Airy: онъ называлъ предполагаемыя утолщенія земной коры подъ горными кряжами, *корнями* горъ. См. O Fisher. On the Variations of gravity Phil. Magaz. Vol XXII 5 series (1886) стр. 1. Тотъ самый Fisher считаетъ ядро земли расплавленнымъ, для коры земной вычисляетъ слѣдующую толщину. Въ области материковъ 41 километровъ. Подъ Океанами глубиною въ 1609 метровъ (1 англ. миля) толщина коры 50,7 кил. подъ Океанами въ 3,2 кил.—почти къ 80 кил. подъ Океанами глубиною въ 4,8 кил.—200 килом. см. рефератъ о новомъ изданіи книги Фишера. Physics of the Earth's crust Phil. Mag. 1890 г. 29 томъ 5 сер. стр. 213.

[3]) J. Dana. Manual of geology New-York 1875 стр. 738 и слѣд.

жидкой лавы былъ, должно быть, такой-же, какъ уровень отвердѣвшихъ частей, но потомъ вслѣдствіе дальнѣйшаго отвердѣнія и охлажденія онъ значительно понизился и такимъ образомъ составилъ морское дно. Дэна думаетъ, что кромѣ разстоянія отъ внутренняго ядра и другія причины могли вліять на неравномѣрное отвердѣніе разныхъ частей коры.

Разумѣется подъ материками мы здѣсь понимаемъ первоначальные материки, не современные.

Мнѣ кажется, что основная мысль теоріи Дэны справедлива. Дѣйствительно нѣтъ сомнѣнія, что охлажденіе и отвердѣніе земли неодинаковы въ разныхъ ея областяхъ,—но гипотеза внутренняго ядра, отвердѣвшаго раньше, чѣмъ поверхностная кора сама по себѣ вовсе не доказана, а потому нетолько не поддерживаетъ, но даже ослабляетъ гипотезу образованія материковъ.

Впрочемъ объ областныхъ различіяхъ въ отвердѣніи и охлажденіи земли будемъ говорить въ послѣдствіи. Тогда то мы найдемъ возможность окончательно обсудить, въ какой степени эти различія способствуютъ образованію неровностей рельефа [1]).

«Въ рельефѣ морского дня» говоритъ *Мушкетовъ* [2]) преимущественно развиты аккумулятивныя (караллowые рифы, пластовыя равнины) и отчасти тектоническія и денудаціонныя формы; изъ послѣднихъ исключительно абразіонныя, происшедшія

---

[1]) Въ небольшой статьѣ: (The origin of the Deep Troughs o the Oceanic Depression. Amer. Journ. of science 1889 г. см. тоже Fisher Physics of the Earth. London 1889 г. Appendix. стр. 16) Дэна разбираетъ вопросъ образованія глубокихъ ямъ среди Океаническихъ впадинъ. Онъ приходитъ къ заключенію, что эти ямы находятся въ тѣснѣйшей связи съ морфологіей соѣдннхъ материковъ. Онъ полагаетъ, что ни вулканическія силы, ни внѣшнія причины не могли дать повода къ образованію подобныхъ ямъ. Онѣ образовались подъ вліяніемъ тѣхъ-же самыхъ силъ, которыя моделлировали рельефъ земли.

Къ сожалѣнію статья Дэны была для меня недоступна, а потому я повторяю краткую выдержку изъ книги Фишера.

[2]) Мушкетовъ. Физич. Геологія I томъ С.-Пет. 1891 г. стр. 578.

отъ тектоническихъ, тогда какъ эрозіонныя формы почти отсутствуютъ. Изъ тектоническихъ формъ первое мѣсто занимаютъ дизъюнктивныя, именно грабены». Дальше встрѣчаемъ слѣдующія слова: «Уже à priori можно думать, что такіе крупные элементы пластики земной коры, какъ океаническія впадины и материковые массивы могли быть произведены только тектоническими процессами, какъ самыми мощными».

«Многія области» говоритъ Зюссъ [1]) «какъ н. п. Индо-Африка съ незапамятныхъ временъ не испытывали никакого движенія, вызывающаго складчатость; напротивъ того, онѣ или задерживаютъ складки, или проваливаются передъ ними. Результаты второго направленія движенія, (вертикальнаго въ противуположность къ тангенціальному, вызывающему образованіе складокъ) впадины или провалы всюду оставили свои слѣды».

«Средиземныя моря и самые большіе Океаны образуются и расширяются благодаря впадинамъ и проваламъ». «Мы свидѣтели того, какъ шаръ земной проваливается. Провалы собрали воду въ глубокіе Океаны. Благодаря проваламъ образовались материки и существованіе дышащихъ легкими животныхъ сдѣлалось возможнымъ».

Итакъ Мушкетовъ и Зюссъ согласны въ томъ, что крупныя черты рельефа земли произошли главнымъ образомъ отъ проваловъ. Подобное мнѣніе встрѣчаемъ у *Рейера* [2]).

Извѣстно, что *Лаппаранъ* [3]) критиковалъ взгляды Зюсса. Онъ почти совершенно отрицаетъ образованіе впадинъ и проваловъ. За то по его мнѣнію [4]) при сокращеніи объема земли могутъ образоваться большія плоскія складки въ родѣ тѣхъ, которыя у Дэны называются Геоантиклиналями и Геосинклина-

---

[1]) Suess. Antlitz der Erde I Bd. Prag 1885 стр. 777.

[2]) Reyer. Theoretische Geologie. Stuttgart 1888 стр. 781.

[3]) A. de Lapparent. Mouvements de l'écorce terrestre Bull. Soc. Geol. ser. 15 tome стр. 215 и слѣд. Sur le refroidissement et la contraction du Globe terrestre ibidem. стр. 383.

[4]) Loc. cit. стр. 235.

лями. Замѣтимъ, что Дэна признаетъ за такими складками большую роль въ процессѣ образованія крупныхъ неровностей рельефа.

Я не могу здѣсь высказаться въ пользу того или другого взгляда. Настоящая работа именно имѣетъ цѣлью бросить нѣкоторый свѣтъ на эти вопросы. Слѣдовательно только подъ конецъ ея я буду въ состояніи выразить свое мнѣніе. Теперь я могу сказать только то, что Зюссъ вовсе не пытался показать, что сокращеніе объема земли вслѣдствіе охлажденія дѣйствительно можетъ объяснить всѣ дислокаціи земной коры, а вычисленія Лаппарана не лишены погрѣшностей.

Упомянемъ еще о работѣ *Вальтера* [1]), который разсматриваетъ Океаны какъ большія впадины и пытается доказать, что настоящую границу материковъ и океановъ составляютъ флексуры. Того-же мнѣнія придерживается *Рудольфъ* [2]). *Рейеръ* [3]) же думаетъ, что Океаническіе высокіе берега, происшедшіе отъ тектоническихъ процессовъ состоятъ скорѣе изъ линій излома, чѣмъ изъ флексуръ.

Здѣсь умѣстно привести нѣкоторыя замѣчанія Неймайра [4]). Они интересны потому, что составляютъ до нѣкоторой степени «Credo» той школы геологовъ, которой главою считается Зюссъ. Мысль Неймайра можно вкратцѣ выразитъ слѣдующими словами: тѣ-же самыя силы, которыя воздвигли горные хребты, образовали материки и океаническіе бассейны. Материки—это нѣкотораго рода столбы, которые остались на своемъ мѣстѣ, или скорѣе понизились меньше, чѣмъ окружающія ихъ области. Радіусъ земли съ Силурійскаго времени до настоящаго сократился по крайней мѣрѣ на пять тысячъ метровъ, ибо красные силурійскіе известняки съ «Orthoceras», соотвѣтствующіе гло-

---

[1]) Johannes Walther. Ueber den Bau der Flexuren an den Grenzen der Continente. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. XX Bd. Jena 1887 стр. 266.

[2]) Мушкетовъ, loc. cit. стр 579.

[3]) Reyer loc. cit. стр. 781.

[4]) M. Neumayr. Erdgeschichte I Leipzig 1886 стр. 365.

бигериновому и красному илу Тихаго Океана, образующемуся на глубинахъ въ 4500 — 5000 метровъ, въ настоящее время залегаютъ совершенно горизонтально на высотѣ нѣсколькихъ десятковъ метровъ надъ уровнемъ моря.

Даже въ архэйскихъ формаціяхъ распространены разные сланцы, песчаники и другія породы, образующіяся изъ породъ суши, разрушенныхъ механической дѣятельностью волнъ у берега. Изъ этого Неймайръ заключаетъ, что даже въ архэйскую эпоху суша занимала обширныя области. Еслибы въ какую нибудь эпоху вся поверхность земли была покрыта Океаномъ, то отъ этой эпохи остались-бы только известняки, да пожалуй вулканическіе туффы.

Въ послѣдніе годы появилось нѣсколько работъ спеціально насъ интересующихъ. Таковы являются работы: Ромiе, Тейлора, Гроссувра и т. д. Ромiе [1]) разсматриваетъ охлаждающійся эллипсоидъ и находитъ, что величина дислокацій находится въ зависимости отъ географической широты. Это вполнѣ справедливо. Но дефомація Ромiе не можетъ объяснить образованія материковъ, хотя онъ и полагаетъ, что даже впадина Тихаго Океана образовалась путемъ имъ указаннымъ. Дѣло въ томъ, что при однообразномъ охлажденіи однороднаго эллипсоида на поверхности могутъ образоваться только узкія складки. Образованію широкихъ морщинъ подъ дѣйствіемъ бокового давленія мѣшаетъ треніе о ниже лежащіе пласты, недопускающее до большихъ перемѣщеній частицъ. Это обстоятельство, наряду съ недостаточной упругостью и есть причина почему въ областяхъ складчатости вмѣсто одной большой складки образуются многочисленныя параллельныя складки.

На зависимость дислокацій отъ широты указываетъ и Гроссувръ [2]). Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ полагаетъ, что область складчатости отступаетъ на югъ. Гроссувръ говоритъ, что его тео-

---

[1]) A. Romieux. Comptes Rendus: томъ 108, 1889 г. стр. 337 и 851.
[2]) Grossouvre. Comptes Rendus томъ, 1888 г. стр. 827.

рія указываетъ на причину почему, «Vorländer» Зюсса находятся на сѣверѣ отъ Альпъ и Карпатовъ, но спрашивается какъ объяснить то явленіе, что «Vorländer» Азіятскихъ хребтовъ лежатъ на югѣ.

Теорія Гроссувра основана впрочемъ на абсолютно ложномъ физическомъ принципѣ. Онъ полагаетъ, что у охлаждающагося эллипсоида сжатіе уменьшается. Это положительно ложно. Если только нѣтъ внѣшнихъ силъ, измѣняющихъ моментъ вращенія, то при охлажденіи сжатіе эллипсоида увеличивается. Вотъ краткое доказательство справедливости нашихъ словъ. Сжатіе однороднаго эллипсоида опредѣляется изъ уравненія [1]).

$$(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctang}\lambda-\frac{3}{\lambda^2}\right]=\frac{25\mu^2}{6f.M^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Здѣсь μ есть вращательный моментъ.

M — масса тѣла.

ρ — средняя плотность.

f — постоянная притяженія, зависящая только отъ единицъ длины и массы.

λ есть нѣкоторая величина, связанная со сжатіемъ слѣдующей формулой:

$$\varepsilon=1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Слѣдовательно, сжатіе ε растетъ вмѣстѣ съ λ. Въ нашемъ уравненіи μ и M постоянны, но если эллипсоидъ охлаждается, то ρ, средняя плотность возрастаетъ, т. е. правая сторона уравненія возрастаетъ. Между тѣмъ лѣвая сторона уравненія для $\lambda=0$ тоже равна нулю, потомъ постоянно возрастаетъ и для $\lambda=\infty$ тоже дѣлается безконечно большой. Слѣдовательно, когда правая сторона, т. е. ρ больше, тогда и λ, а затѣмъ ε, т. е.

[1]) Tisserand Traité de Mécanique céleste II томъ стр. 96.

сжатіе больше. Тэйлоръ [1]) тоже предполагаетъ, что сжатіе земли уменьшается, но по другимъ причинамъ. Тэйлоръ имѣетъ главнымъ образомъ въ виду образованіе складчатыхъ горъ. По его теоріи складчатыя горы должны, собственно говоря, образоваться только въ экваторіальной области.

Наконецъ имѣемъ теорію Г. Г. Дарвина, спеціально относящуюся къ образованію материковъ. Дарвинъ полагаетъ, что вращательная скорость земли уменьшается. Это привело его къ гипотезѣ образованія луны о которой будетъ сейчасъ рѣчь. Но рядомъ съ этимъ онъ замѣчаетъ, что при замедленіи вращенія измѣненія угловой скорости не идутъ «pari passu» во всѣхъ частяхъ жидкой массы, хотя огромное внутреннее треніе на ряду съ медленностью всего процесса не допускаютъ до значительныхъ отступленій отъ средней угловой скорости. Тѣмъ не менѣе эти небольшія отступленія могутъ довести до образованія широкихъ морщинъ, идущихъ въ сѣверномъ полушаріи съ Юго-Запада на Сѣверо-Востокъ, въ южномъ съ Сѣверо-Запада на Юго-Востокъ. Дарвинъ замѣчаетъ, что на сѣверномъ полушаріи подобное направленіе имѣетъ Атлантическій берегъ Америки, до нѣкоторой степени Атлантическій берегъ Европы и Тихоокеанскій берегъ Азіи.

Но гипотеза Дарвина, точно такъ, какъ гипотеза Роміе и большинство самыхъ раціональныхъ гипотезъ объ образованіи материковъ или складчатыхъ горъ страдаютъ тѣмъ [2]), что не могутъ объяснить несимметричности въ распредѣленіи материковъ и горъ.

Дѣйствительно несимметричность есть характеристическая черта рельефа земли. По всей вѣроятности не только въ нашу

---

[1]) T ylor. On the Crumpling of the Earth's Crust. Рефератъ въ Peterm. Mitth. за 1886 годъ. Litteraturber. 5.

[2]) G. H. Darwin Problems connected with the theory of the t des. Phil. Trans. 1879 г. стр. 589. I часть.

[3]) Дуттонъ выставляетъ этотъ упрекъ противъ всѣхъ горообразовательныхъ теорій. *Прим авт.*

геологическую эпоху, но и въ прежнія времена рельефъ земли былъ несимметричный. По крайней мѣрѣ во всѣхъ тѣхъ случаахъ, когда удавалось воспроизвести приблизительную картину[1]) распредѣленія материковъ и морей, всегда оказывалась, что это распредѣленіе несимметрично.

Между тѣмъ предполагается, что первоначально земля состояла изъ сфероидальныхъ слоевъ жидкости, симметричныхъ вокругъ оси вращенія и относительно экватора[2]). Съ другой стороны тѣ силы, на которыя обыкновенно указывается, какъ на причины образованія горъ и вообще неровностей рельефа дѣйствуютъ или однообразно по всей поверхности или симметрично относительно экватора.

Только однѣ дислокаціи, вызванныя перемѣщеніемъ оси вращенія не обладаютъ этой симметріей, но за то онѣ симметричны въ другомъ смыслѣ. Именно дислокація должна быть одинакова въ антиподахъ. Впрочемъ этого рода дислокаціи весьма незначительны, ибо сами отклоненія оси вращенія заключены въ весьма тѣсные предѣлы. По крайней мѣрѣ современное отношеніе главныхъ моментовъ инерціи земли таково, что, какъ показалъ Дарвинъ[3]) даже при распредѣленіи под-

---

[1]) Сравн. M. Neumayr. Die Geographische Verbreitung der Juraformation. Denkschr. Akad. Wiss. Wien за 1886 г.

Мушкетовъ. Физич. Геол. I часть С.-Пет. 1891 г. карты A. Geikie на стр. 648, 649; 650, 651.

[2]) Кромѣ гипотезы Канта-Лапласа имѣемъ гипотезу Норденшельда, высказанную уже въ началѣ этого столѣтія Маршаллемъ, состоящую въ томъ, что земля есть аггрегатъ метеоритовъ, скопившихся вокругъ какого-то малаго тѣла. Потомъ имѣемъ гипотезу Локіера и Дарвина (On the mechanical conditions of a swarm of meteorites and on theories of Cosmogony. Phil. Trans. за 1889 г.) по которой небесныя тѣла образуются вслѣдствіе конденсаціи облака газовъ, усѣяннаго мелкими метеоритами. По обѣимъ гипотезамъ первоначальное внутреннее строеніе земли тоже должно быть симметрично относительно экватора и независимо отъ геогр. долготы. Гипотеза Маршалля приводится у Кювье въ Discours surles revolutions du Globe Paris 1840 стр. 55. *Прим. авт.*

[3]) G. H. Darwin. On the influence of geological changes. Phil Trans. 1887. Дѣло слѣдуетъ понимать такъ: дислокаціи вызываютъ измѣненія въ по-

нятій и опусканій, обусловливающемъ максимальный эффектъ, поднятіе *половины* поверхности земли на 10,000 футовъ вызываетъ отклоненіе оси вращенія на $8^{0}4^{1}/_{2}'$. Между тѣмъ цѣлые материки составляютъ только малую долю поверхности земли: [н. п. Африка занимаетъ только $\frac{5,9}{100}$ поверхности] [1]).

ложенія оси вращенія. Затѣмъ слѣдуетъ приноровленіе къ фигурѣ равновѣсія вокругъ новой оси, которое сопровождается подобными дислокаціями въ антиподахъ. *Прим. авт.*

[1]) Иные геологи, какъ Ваагенъ *), Фейстмантель утверждаютъ, что въ отложеніяхъ Каменноугольной и Пермской эпохи въ южной Африкѣ, въ Деванѣ и въ Австраліи конгломераты, извѣстные подъ названіемъ Талькировъ, Двайка—конгломератовъ и т. д. составляютъ слѣды ледниковой эпохи.

Очевидно гипотеза Ваагена плохо согласуется съ вышеприведенными изслѣдованіями Дарвина и другихъ математиковъ. Конечно, для устраненія противорѣчія можно предположить, что климатъ всей земли былъ весьма холодный въ эту эпоху. Но такое предположеніе само по себѣ мало вѣроятно, да при томъ идетъ въ разрѣзъ съ общимъ убѣжденіемъ относительно климата каменоугольной эпохи.

Здѣсь кстати приведемъ замѣчаніе Неймайра **) относительно климата древнихъ Геологическихъ эпохъ. Судя по ископаемымъ животнымъ и растеніямъ можно положительно утверждать, что, начиная съ Юрайскаго времени до нашего, климатическіе поясы распредѣлены концентрически вокругъ современныхъ полюсовъ. «Міоценскія флоры» говоритъ Геєръ «обступили сѣверный полюсъ какъ собаки такъ, что онъ не можетъ ускользнуть ни въ ту, ни въ другую сторону». Для Силурійской эпохи можно прослѣдить совершенно ясно точно такое распредѣленіе климатическихъ зонъ. Въ промежуточныя эпохи климатическіе поясы очерчены менѣе ясно Ископаемые остатки каменноугольнаго времени указываютъ на удивительно однообразный климатъ, но нѣтъ такого времени, для котораго можно доказать распредѣленіе климатическихъ поясовъ вокругъ другихъ полюсовъ. Жюдъ тоже указываетъ на климатическія зоны въ Камбрійскую, Силурійскую, Тріасовую, Юрайскую и Мѣловую эпохи. Въ виду всего этого мы склоняемся къ мнѣнію, что положеніе оси вращенія было во всѣ Геологическія эпохи, приблизительно такое, какъ въ наше время, а потому деформаціи, соединенныя съ перемѣной положенія оси вращенія играли небольшую роль въ образованіи рельефа земли. Ср. I часть 44 стр.

*) Waagen. Carbone Eiszeit. Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanstalt Wien 1887 г.

Feistmantel. Litteratur Ber. Peterm. 1887 г. стр. 88. 1889 г. стр. 115.

David. On the evidence of glacial action in the Carboniferous. New South Wales. Phil. Magaz. XXIV. 5 ser стр 155.

**) M. Neumayr. Die Klimazonen der Jurazeit. Denkschr. Akad. Wiss. Wien. 1883 г.

Но если положимъ, что строеніе земли «ab origine ipsa» было не симметрично, тогда тѣ-же самыя силы будутъ производитъ несимметричныя дислокаціи. При несимметричномъ строеніи сокращеніе объема земли вслѣдствіе охлажденія должно привести къ дислокаціямъ въ высокой степени несимметричнымъ. Но спрашивается, откуда могла произойти несимметричность внутренняго строенія? Отвѣтъ найдется въ нѣкоторыхъ работахъ Г. Г. Дарвина [1]) и Пуэнкаре, изъ которыхъ Фишеръ извлекаетъ заключеніе, что материки образовались при отдѣленіи луны отъ земли и что вѣроятно Тихій Океанъ находится на томъ мѣстѣ, откуда оторвалась луна.

Постараемся дать краткій очеркъ этой теоріи. Въ настоящее время благодаря реакціи приливовъ одновременно замедляется вращательная скорость земли и увеличивается разстояніе луны. Поэтому въ прошедшемъ день былъ короче, а луна ближе, реакція приливовъ еще сильнѣе. Такимъ образомъ, отступая мысленно назадъ видимъ, что скорость уменьшенія дня и уменьшенія разстоянія луны все больше и больше. Естественно предположить, что въ извѣстный моментъ оба тѣла соприкасались. Если въ этотъ моментъ оба тѣла были расплавлены, то само собою очевидно, что они должны были составлять одно цѣлое. Въ работѣ «On the Equilibrium of rotating masses of fluid» Дарвинъ пытался доказать, что распаденіе жидкой массы на двѣ части возможно при нѣкоторой враща-

---

[1]) G. H. Darwin. Precession of a viscous spheroid Phil- Trans. 1879.
On problems connected with the theory of the tides. ibid. 1879.
Evolution of the solar system. ibid. 1881.
Tidal friction. Treatise Nat. Phil. 1888 г. II часть.
Equilibrium of rotating masses of fluid. Phil. Trans. 1887 года.
Poincaré Equilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation. Acta Mathematica 7 томъ 1885 г.
O. Fisher. Physics of the Earth's Crust (II изд.) London 1889 г, глава XXV.

тельной скорости. Подобное изслѣдованіе, но гораздо выше стоящее во всѣхъ отношеніяхъ, было проведено Пуэнкаре, который показалъ, что жидкая однородная масса, вращающаяся вокругъ извѣстной оси по мѣрѣ того, какъ подвигается охлажденіе, а вслѣдствіе того вращательная скорость увеличивается; переходитъ отъ формы эллипсоида вращенія къ формѣ трехъосеваго эллипсоида Якоби [1]) а потомъ къ формѣ, въ которой стремленіе къ распаденію на двѣ части дѣлается совсѣмъ очевиднымъ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ «pro» и «contra» гипотезы отдѣленія луны. Въ ея пользу говоритъ то, что по изслѣдованіямъ Максвелля, Ковалевской и Пуэнкаре [2]) надъ Сатурновыми кольцами и Пуэнкаре [3]) надъ кольцеобразными фигурами равновѣсія, оказывается, что кольцо есть фигура неустойчиваго равновѣсія и что Сатурновы кольца вѣроятно состоятъ изъ множества мелкихъ сателлитовъ. Это послѣднее мнѣніе подтверждается фотометрическими наблюденіями Зелигера.

Изъ этого опять слѣдуетъ, что по всей вѣроятности отдѣленіе спутника отъ планеты происходитъ не посредствомъ отдѣленія экваторіальнаго кольца, а какимъ-нибудь другимъ путемъ.

Но противъ гипотезы Дарвина и Пуэнкаре говоритъ то обстоятельство, что неоднородная жидкая масса можетъ правда, какъ показалъ Клэро, принять форму сфероида, весьма мало различающагося отъ шара, но не можетъ принять формы эллипсоида. Послѣднее положеніе было доказано независимо другъ отъ друга Гами и Биркенмайеромъ [4]) Поэтому вообще еще не-

---

[1]) Если a, b, c суть наибольшая, средняя и наименьшая полуоси эллипсоида, то эллипсоиды Якоби удовлетворяютъ условію:

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

[2]) Tisserand. Traité de méc. cel. II часть стр. 185.

[3]) Poincaré. loc. cit. стр. 289.

[4]) Hamy Thèse de doctorat Paris 1887. см. Tisserand loc. cit. стр. 192. Birkenmayer. O kinetycznej równowadze ellipsoidy.............. Pam. Krakowskiej Akad. Umiej. VII томъ матем. отд.

извѣстно, какія формы равновѣсія можетъ принимать жидкая масса первоначально сфероидальной формы по мѣрѣ того, какъ охлажденіе подвигается впередъ.

И такъ пожалуй удобнѣе принять эту гипотезу съ нѣкоторымъ варіантомъ, указаннымъ Дарвиномъ [1]) въ послѣдствіи ближе обработаннымъ Лоувомъ [2]). Фишеръ тоже принимаетъ измѣненную гипотезу Дарвина. Сущность варіанта состоитъ въ слѣдующемъ. При малой длинѣ сутокъ, н. п. около 4 часовъ по всей вѣроятности періодъ солнечныхъ приливовъ совпадаетъ съ періодомъ свободныхъ колебаній жидкой массы той величины, какъ земля. Но въ такомъ случаѣ солнечные приливы въ жидкой массѣ земли могли достигать огромной величины. Сотрясенія должны быть настолько сильны, что отдѣленіе одной приливной выпуклости отъ земли дѣлается вполнѣ возможнымъ.

Этотъ варіантъ имѣетъ за собою еще то преимущество, что, если отдѣленіе приливной выпуклости совершилось въ то время, когда максимальный приливъ былъ не на экваторѣ, а подъ другой широтой, то отъ обоихъ полушарій отдѣлились неодинаковыя количества жидкой массы. Вслѣдствіе этого строеніе оставшейся земной массы сдѣлалось совсѣмъ несимметричнымъ. Разумѣется вслѣдствіе такой катастрофы фигура земли и моментъ вращенія должны были сразу измѣниться. Положеніе оси вращенія тоже измѣнилось. Подобная катастрофа сразу измѣнила внутреннее строеніе особенно у внѣшнихъ пластовъ, вмѣстѣ съ тѣмъ она оставила послѣ себя слѣды въ видѣ значительнаго углубленія и другія второстепенныя неровности рельефа. Конечно нельзя угадать, какой долженъ быть видъ земного рельефа сейчасъ послѣ подобной катастрофы, но нѣтъ сомнѣнія, что неровности были крупныя и что въ послѣдствіи, благодаря приноровленію къ фигурѣ равновѣсія, онѣ отчасти изгладились. Гипотеза отдѣленія луны даетъ намъ сразу крупные

[1]) Precession of a viscous spheroid 527.

[2]) On the oscillations of a rotating liquid spheroid. Phil. Mag. 1889 г. 27 томъ.

первичные материки. Это хорошо согласуется съ нѣкоторымъ обстоятельствомъ, на которое указываетъ Неймайръ, именно, что даже въ архэйскую эпоху несомнѣнно существовали крупные материки. Гипотеза Дарвина или вообще другая подобная гипотеза катастрофы даетъ ключъ къ объясненію другихъ вопросовъ, ибо влечетъ за собою предположеніе о существенно несимметричномъ внутреннемъ строеніи земли.

Теперь слѣдуетъ разобрать вопросъ, какія силы могутъ повести къ образованію новыхъ неровностей рельефа.

ГЛАВА II.

Значеніе измѣненій фигуры и вѣкового охлажденія.

Въ самой гипотезѣ Дарвина уже подразумѣвается причина нѣкоторыхъ измѣненій рельефа. Хотя бы даже, какъ думаетъ Фишеръ, въ моментъ катастрофы уже существовала кора земная, то во всякомъ случаѣ главная масса земли была еще настолько пластична, что притокъ жидкихъ массъ къ мѣстамъ слабаго давленія долженъ былъ отчасти загладить нѣкоторыя неровности рельефа, образовавшіяся во время катастрофы. Кромѣ этой причины существуютъ еще другіи вричины измѣненій рельефа.

Мы должны разсматривать землю съ того момента послѣ катастрофы, когда наконецъ установилась новая ось вращенія. Эту ось слѣдуетъ считать весьма постоянной, такъ какъ сжатіе земли, согласно большей скорости вращенія было въ прошедшемъ больше, чѣмъ въ настоящее время. Реакція приливовъ постоянно уменьшала вращательную скорость. Вслѣдствіе этого сжатіе уменьшалось.

Мы высказываемъ эти слова съ полной увѣренностью, ибо даже твердое тѣло должно измѣнять свою форму подъ вліяніемъ уменьшенія или увеличенія центробѣжной силы. Такъ н. п. Томсонъ [1]) находитъ, что при экваторіальной скорости враще-

---

[1]) Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 435.

нія въ 100 метровъ въ секунду ($4^1/_2$ раза меньше какъ экват. скорость земли) стальной шаръ той величины, что земля, долженъ измѣниться въ эллипсоидъ со сжатіемъ $\frac{1}{7220}$, а стеклянной въ эллипсоидъ со сжатіемъ: $\frac{1}{6015}$.

Значитъ, смотря по степени пластичности веществъ, изъ которыхъ земля состоитъ, за измѣненіями центробѣжной силы должны непремѣнно послѣдовать большія или меньшія измѣненія формы [1]).

Тейлоръ [2]) основалъ свою теорію образованія горъ на де-

---

[1]) Мы здѣсь затронули важнѣйшій вопросъ *неподатливости* (rigidité) земли. На основаніи явленія приливовъ Томсонъ думаетъ, что земля весьма неподатлива. Дарвинъ (Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 460) пытался опредѣлить степень этой неподатливости и пришелъ къ заключенію, что она близка къ степени неподатливости стали. Но Фишеръ (Physics of the Earth стр. 40) оспариваетъ этотъ результатъ, хотя вообще считаетъ неподатливость земли вполнѣ доказанной. Однако нельзя считать этотъ вопросъ вполнѣ рѣшеннымъ. Кри (M. Chree: On some applications of Physics and Mathematics to Geology. Phil. Magaz. 1891 г. 32 томъ) приходитъ къ заключенію, что на основаніи теоріи упругости (loc. cit. стр. 251) нельзя порѣшить, находится-ли земля въ жидкомъ или пластичномъ, или въ твердомъ состояніи. Съ другой стороны К. Барусъ (C. Barus Viscosity of solids Bulletin U. S. Geological survey N. 73 1891 года) нашелъ экспериментальнымъ путемъ, что уже при температурѣ 450° С. стекло обладаетъ всѣми свойствами вязкой жидкости. Тоже самое можно сказать относительно стали. По крайней мѣрѣ при этой темпер. сталь почти не сопротивляется скашиванію. Барусъ заключаетъ (loc. cit. стр. 71) что, если земля все таки обнаруживаетъ свойства упругаго твердаго тѣла, то это слѣдуетъ отнести на счетъ огромныхъ давленій внутри земли. Къ сожалѣнію онъ не изслѣдовалъ вліянія давленія на вязкость.

По всей вѣроятности земля обнаруживаетъ большую неподатливость въ реакціи приливовъ, въ которой деформирующая сила переходитъ отъ наименьшаго до наибольшаго напряженія въ сравнительно короткіе промежутки времени. Напротивъ того медленное увеличеніе или уменьшеніе центробѣжной силы, продолжающееся милліоны лѣтъ можетъ произвести крупную деформацію. Вѣдь хрупкіе стеклянные пруты сгибаются подъ вліяніемъ постояннаго но весьма медленнаго гнутія. На это обстоятельство обращаетъ вниманіе Рейеръ. (Reyer. Theoretische Geologie Stuttgart. 1888 г. стр. 445 и слѣд.).

[2]) См. выше.

формаціи, зависящей отъ измѣненія сжатія. Насколько кажется эта деформація играетъ второстепенную роль.

Такъ какъ, несмотря на всяческія неровности, фигура земли въ общихъ чертахъ всегда была довольно близка къ эллипсоиду вращенія, то въ слѣдующемъ затѣмъ разсужденіи будемъ говорить объ эллипсоидѣ. Результатъ этого разсужденія въ общихъ чертахъ совершенно примѣнимъ къ землѣ.

Если объемъ эллипсоида совсѣмъ неизмѣняется или мало измѣняется, а между тѣмъ сжатіе уменьшается, то двѣ слѣдующія другъ за другомъ поверхности эллипсоида пересѣкаются вдоль параллели, которая всегда находится близко отъ 37° широты. Южнѣе этой параллели (Можно говорить объ одномъ полушаріи въ виду полной симметріи деформаціи относительно экватора) новая поверхность находится ниже прежней, сѣвернѣе параллели пересѣченія она находится выше. Слѣдовательно на югѣ кора подвергается сдавленію во всѣхъ направленіяхъ. Сдавленіе вдоль параллелей болѣе интензивно, оно доходитъ до *максимума* на экваторѣ, уменьшается до параллели пересѣченія, тутъ переходитъ въ растяженіе, все возрастающее до самаго полюса. Параллели остаются по прежнему кругами. Въ меридіональномъ направленіи кривизна увеличивается на сѣверѣ, уменьшается на югѣ.

Поэтому выше параллели пересѣченія складки не образуются. Онѣ будутъ образоваться южнѣе этой параллели, съ особенной интензивностью на экваторѣ. Такъ какъ давленіе дѣйствуетъ со всѣхъ сторонъ, то о направленіи складокъ рѣшаютъ второстепенныя обстоятельства н. п. различія въ свойствахъ веществъ и т. п.

Сравненіе этой картины съ рельефомъ земли показываетъ, что дислокаціи, обусловленныя измѣненіемъ сжатія играютъ второстепенную роль. Роль эта пожалуй сказывается въ томъ, что материки и горы экваторіальной области въ среднемъ все таки выше, чѣмъ материки и горы полярной области. Но одно ско-

пленіе величайшихъ Азіятскихъ горъ подъ средними широтами уже доказываетъ, что главная причина дислокацій заключается въ чемъ-то другомъ.

И такъ мы обращаемся къ извѣстнѣйшей причинѣ дислокацій, къ сокращенію объема земли вслѣдствіе вѣкового охлажденія. Но здѣсь сразу встрѣчаемъ работы новѣйшаго времени, которыя вообще оспариваютъ значеніе вѣкового охлажденія. Это работы Маллярдъ Рида и Фишера [1]).

Сущность аргументаціи этихъ ученыхъ состоитъ въ слѣдующемъ. Если охлаждается шаръ однородный, имѣвшій въ извѣстный моментъ всюду одну и туже температуру, то сначала внѣшніе слои настолько сокращаются, что мѣсто, занимаемое ими, оказывается слишкомъ просторнымъ. Вслѣдствіе этого они должны сначала растянуться. Только въ послѣдствіи, когда охлажденіе проникнетъ въ болѣе глубокіе слои и когда объемъ ниже лежащихъ слоевъ уменьшится, растяженіе прекращается и переходитъ въ сдавленіе. Такимъ образомъ внутри шара находится параллельная къ его поверхности шаровая поверхность, въ которой въ данный моментъ вещество не испытываетъ ни растяженія ни сокращенія. Это такъ называемая *поверхность безъ деформаціи*. О значеніи этой поверхности писалъ тоже Давизонъ [2]).

Поверхность безъ деформаціи опускается со временемъ. Основываясь на данныхъ, предложенныхъ Томсономъ, Фишеръ вычисляетъ, что поверхность безъ деформацій въ настоящее

---

[1]) Ученіе свое Маллярдъ Ридъ изложилъ въ книгѣ Origin of Mountain Ranges London 1886 и въ цѣломъ ряду мелкихъ статей, помѣщаемыхъ въ Phil. Magaz. вплоть до послѣдняго года.

Фишеръ изложилъ свои взгляды тоже въ статьяхъ, помѣщаемыхъ въ Phil. Magaz. и въ книгѣ: Physics of the Earth's Crust London 1889 г. съ приложеніемъ, изданнымъ только въ 1891 г.

[2]) On the distribution of strain.... Phil. Trans. 1887 г. съ примѣчаніемъ Г. Г. Дарвина.

время находится на глубинѣ 2,13 [1]) анг. миль, если земля есть твердое тѣло, на глубинѣ 4,109 анг. миль, если ядро находится въ жидкомъ состояніи [2]). Дарвинъ и Ридъ нашли весьма близкія къ этому числа, Давизонъ, благодаря грубому методу вычисленія, нѣсколько большія.

Нѣтъ сомнѣнія, что при поверхности безъ деформаціи, залегающей на глубинѣ нѣсколькихъ верстъ подъ поверхностью земли, образованіе такихъ горныхъ хребтовъ, какъ Альпы, Гималаи или Тіань-шань, совершенно немыслимо. Но можно получить гораздо большіе результаты просто полагая, что охлажденіе продолжается не сто милліоновъ лѣтъ, какъ полагаетъ Томсонъ, а больше. Однако сущность вопроса заключается въ чемъ то другомъ. Томсонъ предполагаетъ, что въ исторіи земли былъ такой моментъ, когда температура земли была всюду одинакова. Но по всей вѣроятности такой моментъ никогда не существовалъ. Температура земли всегда была выше около центра, чѣмъ у поверхности. Но въ послѣднемъ случаѣ слой безъ деформаціи долженъ всегда находиться значительно глубже, чѣмъ у шара, разъ имѣвшаго всюду одну и туже температуру.

Докажемъ наше положеніе на нѣкоторомъ примѣрѣ. Прежде всего намъ нужно вывести формулу, опредѣляющую положеніе поверхности безъ деформаціи внутри шара, въ которомъ температура всегда была и есть единственно функція отъ радіуса. Въ выводѣ формулы пойдемъ по слѣдамъ Фишера.

Введемъ слѣдующія знакоположенія.

V обозначаетъ температуру.

t — время.

r — разстояніе отъ центра.

---

[1]) O. Fisher. On the amount etc..... Ph. Mag. 1887 г. 23 томъ.
.... On the mean height.... Ph. Mag. 1888 г. 25 томъ,

[2]) .... Physics...... Appendix стр. 48.

ε обозначаетъ коэффиціентъ расширенія (линейный).
k — коэффиціентъ теплопроводности.
c — коэффиціентъ теплоемкости по отношенію къ объему [1]).
R — радіусъ шара.

Буквы со штрихами относятся къ спеціально разсматриваемому слою шара.

Въ продолженіи времени dt объемъ безконечно тонкаго сферическаго слоя измѣняется на

$$3\varepsilon \, . \, 4\pi r^2 dr . \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

Слѣдовательно объемъ всего вещества внутри сферы радіуса: r_1 измѣняется на:

$$12\pi \left[\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t} dr \right] dt$$

а поверхность этой сферы измѣняется на

$$\frac{24\pi}{r_1} \left[\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t} dr \right] dt.$$

Налегающій на эту сферу слой не испытываетъ ни сокращенія, ни растяженія, если въ тотъ самый моментъ измѣненіе его поверхности, вызванное измѣненіемъ температуры, какъ разъ равно измѣненію поверхности сферы. Но его поверхность измѣнилась на:

$$4\pi r_1^{\,2} . \, 2\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} dt$$

Слѣдовательно положеніе поверхности безъ деформаціи опредѣляется условіемъ:

[1]) У англійскихъ авторовъ $\frac{k}{c}$ обозначено буквой k.

$$\frac{3}{r_1^3}\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t}\, dr = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} \qquad \text{I.}$$

Причемъ, смотря потому будетъ-ли [1])

$$\frac{3}{r_1^3}\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t}\, dr \lesseqgtr \varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{II}$$

данный слой испытываетъ сдавленіе, не испытываетъ деформаціи, или испытываетъ растяженіе. Между тѣмъ температура удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^2 c}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2 . \frac{\partial V}{\partial r}\right) \qquad \text{III}$$

Если предположимъ, что шаръ однороденъ, т. е. что:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{пост.}$$
$$k = \text{пост.}$$
$$c = \text{пост.}$$

тогда, замѣщая въ уравн. I: $\frac{\partial V}{\partial t}$ посредствомъ его значенія, взятаго изъ уравн. III, найдемъ весьма простыя формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3k}{c}\frac{\partial V}{\partial r} &= r\frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \end{aligned}\right\} \text{ I bis.}$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что положеніе слоя безъ деформаціи у однороднаго шара не зависитъ отъ коэфф. расширяемости, о чемъ говоритъ и Фишеръ. Дальше, вторая формула показываетъ, что изъ наблюденій надъ градіентомъ

[1]) У Фишера какъ разъ наоборотъ. но разсуждая объ охлаждающемся шарѣ онъ видно въ данный моментъ забылъ о томъ, что $\frac{\partial V}{\partial t}$ есть отрицательная величина. см. работу въ 25 томѣ Phil. Magaz. стр. 9. *Прим. авт.*

можно найти положеніе поверхности безъ деформаціи, если шаръ однороденъ. Послѣдняя формула можетъ быть приведена къ виду

$$G = (R - x)\frac{dG}{dx}$$

гдѣ G обозначаетъ градіентъ, x разстояніе отъ поверхности шара.

$$G = -\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial r}}$$

Для простоты предположимъ, что наши единицы температуры и длины таковы, что первоначальная температура центра шара равнялась одному градусу, а радіусъ шара равенъ π. Положимъ, что температура поверхности шара была равна 0^{0} и что температура среды постоянно равна 0^{0}. Положимъ наконецъ, что первоначальная температура выражалась функціей.

$$\frac{\sin r}{r}$$

эта функція постоянно уменьшается отъ значенія: 1 при $r = o$ до значенія 0 при $r = \pi$.

Тогда во всякое время, во всякой точкѣ внутри шара температура выразится функціей.

$$V = \frac{\sin r}{r} e^{-\frac{k}{c}t}$$

Подставимъ эту функцію въ условныя уравненія: I bis. Получимъ слѣдующее уравненіе, опредѣляющее положеніе поверхности безъ деформаціи:

$$\operatorname{tang} r = \frac{3r}{3 - r^{2}}$$

Этому уравненію удовлетворяетъ вопервыхъ значеніе:

$$r = o$$

Слѣдующіе затѣмъ положительные корни (отрицательные не имѣютъ физическаго значенія) находятся по одному между [1]).

$$\frac{3\pi}{2} \text{ и } 2\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \text{ и } 3\pi$$ и т. д., т. е. за предѣлами радіуса нашего шара.

Наконецъ отъ o до π:

$$tang r > \frac{3r}{3-r^2}$$

Слѣдовательно:

$$V\frac{\partial V}{\partial t} > \frac{3k}{c}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Изъ этого заключаемъ, что въ данномъ случаѣ поверхность безъ деформаціи сводится къ одной точкѣ, къ центру шара и, разумѣется, положеніе ея не зависитъ ни отъ времени, ни отъ коэффиціентовъ ε и $\frac{k}{c}$ Притомъ всѣ слои шара постоянно подвержены сдавленію.

Я думаю, что этотъ примѣръ довольно хорошо показываетъ вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры. Вмѣстѣ съ тѣмъ я думаю, что выводы Фишера и Маллярдъ Рида, основанные на задачѣ Томсона [2]) принятой безъ всякой критики, совершенно несостоятельны и что мы должны скорѣе скло-

---

[1]) М. П. Рудскій. Къ теоріи вѣкового охлажденія земли I часть XIV томъ Зап. Нов. Общ. Ест. Одесса, 1891 г. стр. 70.

[2]) Cooling of the Earth. II часть Treat. on Nat. Phil. II Appendix

ниться къ мнѣнію многочисленныхъ геологовъ, усматривающихъ во вѣковомъ охлажденіи земли причину образованія горъ и другихъ неровностей рельефа.

Мы, конечно, не утверждаемъ, что температура земли выражается закономъ, принятымъ въ только что изложенной задачѣ, но утверждаемъ, что температура наружныхъ слоевъ была всегда ниже температуры перицентрической области и что *слой* безъ деформаціи находился и находится значительно глубже, чѣмъ полагаетъ Фишеръ.

Чтобы подкрѣпить это мнѣніе скажемъ слѣдующее. Земля есть неоднородное тѣло. Вещества ея распредѣлены по удѣльной плотности, самыя тяжелыя вокругъ центра, самыя легкія снаружи. Поэтому даже въ то время, когда земля была жидкая, или газообразная, конвективные токи были ограничены нѣкоторыми предѣлами. Тяжелыя вещества перицентрической области выносились наружу только при исключительныхъ обстоятельствахъ.

Непрерывные токи, идущіе отъ центра къ поверхности и назадъ возможны только въ однородной жидкой массѣ. Между тѣмъ только при такихъ перемѣшивающихъ всю массу *жидкости* токахъ возможна приблизительно постоянная температура всей массы. Но безъ такихъ конвективныхъ токовъ, температура будетъ всегда выше около центра, чѣмъ у поверхности, гдѣ происходитъ передача теплоты въ междупланетное пространство.

Томсонъ полагаетъ, что температура всей массы земной была въ извѣстный моментъ постоянная потому, что онъ склоняется къ мнѣнію Лапласа, что большая плотность ядра земли обусловлена давленіемъ. Но, думаю, немногіе геологи согласны съ этимъ мнѣніемъ. Извѣстно, что базальты, происходящіе изъ сравнительно небольшой глубины уже значительно тяжелѣе, чѣмъ породы, залегающія на поверхности, чѣмъ граниты и т. д. Изслѣдованія Добрэ [1]) надъ строеніемъ метеоритовъ даютъ по-

[1]) Daubrée. Etudes synthetiques sur la Geologie Experimentale. Paris 1879.

водъ полагать, что ядро земли заключаетъ много желѣза, а нахожденіе самороднаго желѣза въ базальтахъ острова Антримъ, въ нашихъ Волынскихъ анамезитахъ и на островѣ Диско въ высокой степени поддерживаютъ это мнѣніе.

Но разъ допустимъ, что земля неоднородна, то предположеніе Томсона объ однообразности температуры въ жидкой массѣ земли «eo ipso» падаетъ.

Въ такомъ случаѣ задача объ *общемъ* охлажденіи земли не можетъ быть рѣшена. Для ея рѣшенія непремѣнно нужно знать распредѣленіе температуры отъ поверхности до центра въ извѣстный моментъ времени. Зная подобное распредѣленіе, нетрудно опредѣлить температуру для всего послѣдующаго времени, а вводя условіе, чтобы теоретическій градіентъ въ поверхностныхъ пластахъ былъ равенъ наблюдаемому, нетрудно вычислить, какой промежутокъ времени истекъ отъ того момента, когда существовала заданная температура до настоящаго.

Но намъ неизвѣстно не то ужъ распредѣленіе температуры внутри земли въ какой-либо моментъ прошедшаго, но даже въ настоящее время. Поэтому задача объ общемъ охлажденіи земли и о ея возрастѣ есть совершенно неопредѣленная.

Замѣтимъ, что при предположеніи, что первоначальная температура центра выше, чѣмъ температура поверхности оказывается слѣдующее:

Если допустить, что температура центра была значительно больше, чѣмъ у Томсона (у Томсона 3800°C.), то при совершенно вѣроятныхъ распредѣленіяхъ температуры получается возрастъ земли несравненно большій, чѣмъ 100 милліоновъ лѣтъ. Но изъ допущенія, что температура центра была значительно больше, чѣмъ 3800°C, слѣдуетъ, что въ первоначальное время и даже въ настоящее значительная часть ядра была вѣроятно жидкая. Въ свою очередь слѣдуетъ помнить, что даже при довольно большомъ жидкомъ ядрѣ земля можетъ обнаруживать большую неподатливость.

Значить, намъ остается только разсмотрѣть, какимъ образомъ и при какихъ условіяхъ охлажденіе земли можетъ привести къ образованію крупныхъ неровностей рельефа т. е. материковъ и Океаническихъ бассейновъ. Здѣсь, правда, мы затронули мимоходомъ и теорію образованія горъ, но оба вопроса тѣсно связаны между собою, а потому пожалуй умѣстно указать на тѣ причины, которыя обусловливаютъ съ одной стороны образованіе горъ, а съ другой образованіе материковъ.

Еслибъ первочальное распредѣленіе температуры внутри земли было функція отъ одного лишь радіуса, еслибъ охлажденіе подъ всѣми широтами и долготами было одинаково и еслибы распредѣленіе веществъ внутри земли было функція отъ одного лишь радіуса, то сокращеніе земли былобы во всѣхъ направленіяхъ одно и тоже, а потому на поверхности моглибы образоваться лишь складки да мелкія трещины и впадины. Но коль скоро одно изъ трехъ вышеупомянутыхъ условій не удовлетворено, то сокращеніе неодинаково во всѣхъ направленіяхъ. Вслѣдствіе этого образуются обширныя выпуклости и впадины. Поэтому Леконтъ [1]) предполагаетъ, что материки образуются благодаря мѣстнымъ различіямъ въ общемъ радіальномъ сокращеніи земли. Фишеръ [2]) вооружается противъ этого мнѣнія, говоря, что такъ какъ радіусъ земли отъ начала охлажденія до настоящаго времени сократился всего на 6 анг. миль, (анг. миля=1,609 метрамъ) то разности въ радіальномъ сокращеніи никакъ не могли довести до образованія материковъ. Здѣсь опять встрѣчаемъ туже самую слѣпую вѣру въ авторитетъ Томсона. Такъ какъ тотъ остановился на числѣ 100,000,000 лѣтъ для возраста земли, то Фишеръ вычисляетъ сокращеніе радіуса послѣ ста милліоновъ лѣтъ, хотя самъ Том-

---

[1]) Physics of the Earth's Crust стр. 126.

[2]) ditto...... стр. 355.

сонъ [1]) говоритъ, что возрастъ земли вѣроятно заключается между 20 и 400 милліонами лѣтъ. Мы здѣсь не будемъ опредѣлять возраста земли, не будемъ искать доказательствъ *pro* и *contra*, основанныхъ на продолжительности времени, въ теченіе котораго земля охлаждается. Мы только посмотримъ, какіе процессы и при какихъ условіяхъ способны довести до образованія новыхъ материковъ и Океаническихъ бассейновъ.

Прежде всего разсмотримъ вліяніе внѣшнихъ условій, которыя можно обозначить однимъ названіемъ *климатическихъ условій*. Этому вопросу была посвящена первая часть настоящей работы (XIV томъ Зап. Математ. Отдѣл. Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей) поэтому въ слѣдующихъ затѣмъ строкахъ только вкратцѣ повторимъ изложенные тамъ результаты.

---

[1]) Cooling of the Earth. Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 474.

ГЛАВА III.

Разборъ термическихъ факторовъ, способствующихъ образованію новыхъ неровностей рельефа.

Подъ климатическими факторами будетъ понимать разности въ распредѣленіи средней солнечной теплоты въ поверхности суши, вліяніе холодной воды въ Океанахъ на температуру дна и т. п.

Можно совсѣмъ не вдаваться въ разсмотрѣніе условій утраты теплоты въ поверхности суши и на днѣ Океана.

Извѣстно, что, если внутри тѣла передача теплоты совершается путемъ теплопроводности; то температура вполнѣ опредѣляется во всякое время, во всякомъ мѣстѣ, если извѣстно первоначальное распредѣленіе температуры и температура поверхности во всякое время [1]). Слѣдовательно вмѣсто того, чтобы разсматривать условія передачи теплоты, лучше взять во вниманіе данныя, позволяющія опредѣлить температуру поверхности шара.

Мы будемъ разсматривать однородный шаръ, вопервыхъ потому, что строеніе ядра земли намъ неизвѣстно, во вторыхъ потому, что задача объ охлажденіи неоднороднаго шара, пока

---

[1]) Т. е. другими словами извѣстному первон. распредѣленію температуры и извѣстному ходу температуръ внутри тѣла въ послѣдующее время соотвѣтствуетъ только одно распредѣленіе температуры въ поверхности и наоборотъ.

коэффиціенты теплопроводности и т. д. не выражены въ функціи отъ координатъ не можетъ быть доведена до окончательныхъ результатовъ.

Мы задаемся н. п. слѣдующимъ вопросомъ? Не производитъ-ли климатическое неравенство между экваторомъ и полюсами нѣкотораго вліянія на форму земли. Отвѣтъ послѣдуетъ изъ нѣкоторой теоретической задачи, которую сейчасъ рѣшимъ.

Исключимъ вліяніе всѣхъ прочихъ климатическихъ факторовъ. Предположимъ, что первоначальное распредѣленіе температуры внутри шара было функція отъ радіуса, но съ извѣстнаго момента, положимъ съ момента $t=o$ въ средней годичной температурѣ верхняго слоя почвы оказываются нѣкоторыя разности, зависящія отъ географической широты. Если средняя температура почвы подъ экваторомъ превышаетъ среднюю температуру почвы на полюсѣ на A градусовъ, то можно выразить это неравенство въ видѣ функціи отъ геогр. широты слѣдующимъ образомъ:

$$A\left(\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\right)$$

или, вводя вмѣсто геогр. широты угловое разстояніе отъ сѣвернаго полюса;

$$A\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right).$$

Температура шара выразится слѣдующей формулой [1])

$$V.+\left(\frac{r}{R}\right)^2 A\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right).\left[1 - s^2\right] \qquad \text{(IV)}.$$

V есть функція только отъ времени и радіуса. Поэтому во всякой шаровой концентрической поверхности она имѣетъ

[1]) См. I часть этой работы § 4.

вездѣ одно и тоже значеніе, измѣняющееся только въ зависимости отъ времени. Слѣдующій членъ выражаетъ вліяніе климатическаго неравенства между полюсомъ и экваторомъ. Функція: s_2 есть нѣкоторый рядъ, состоящій изъ экспоненціальныхъ и изъ Бесселевыхъ функцій слѣдующаго вида [1]):

$$s_2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_{2,i}\,\varphi_2(p_i r)\, e^{-\frac{k}{c} p_i^2 t} \qquad \text{V}$$

гдѣ

$$a_{2,i} = -\frac{2}{p_i \frac{d\varphi_2(p_i R)}{dp_i}}$$

$$\varphi_2(pr) = \frac{J_{2+\frac{1}{2}}}{(pr)^{2+\frac{1}{2}}}$$

$J_{2+\frac{1}{2}}$ есть функція Бесселя порядка: $2+\frac{1}{2}$.

Коэффиціенты: p опредѣляются изъ уравненія:

$\varphi_2(p_i R) = o$, гдѣ R = радіусу шара

Для	$t = o$	$s_2 = 1$	
	$t = \infty$	$s_2 = o$	VI
для	$r = R$	$s_2 = o$	

Благодаря этимъ свойствамъ ряда s_2, въ поверхности шара т. е. въ поверхности $r=R$ разности температуръ поверхности зависятъ только отъ члена:

$$A\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right)$$

ибо V, въ поверхности всюду имѣетъ одно и тоже самое значеніе. Тоже самое происходитъ и внутри шара во всякой концентрической шаровой поверхности. Только разности температуръ меньше. Онѣ зависятъ отъ выраженія:

---

[1]) Знакоположенія остаются тѣ же, что прежде. *Прим. авт.*

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right)(1 - s_2)$$

Въ продолженіе времени отъ o до t, всякій элементъ полярнаго или экваторіальнаго радіуса, имѣвшій длину: dr измѣнится и будетъ имѣть длину.

$$dr\left[1 + \varepsilon(V_t - V_o)\right] \qquad \text{VII}$$

Такъ какъ температура V въ формулѣ IV не можетъ оказать вліянія на измѣненіе сжатія, только на общее сокращеніе, то предположимъ, что она совсѣмъ постоянна по отношенію ко времени.

Значитъ: (смотри формулы: IV)

$$V_t - V_o = -\frac{2A}{3}(1 - s^2)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \text{ [1]}$$

вдоль полярнаго радіуса:

$$V_t - V_o = \frac{1}{3}A(1 - s_2)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad \text{VIII}$$

вдоль экваторіальнаго радіуса.

Слѣдовательно полярный радіусъ, имѣвшій въ моментъ $t = o$, длину: R въ моментъ $t = t$ имѣетъ длину:

$$R - \frac{\varepsilon}{R^2}\frac{2}{3}A\int_o^R (1 - s^2)r^2\,dr \qquad \text{IX}$$

---

[1]) Если взять во вниманіе другой радіусъ, составляющій съ полярнымъ уголъ θ, то:

$$V_t - V_o = A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right)(1 - s^2)\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Однако, кромѣ направленія главныхъ осей, по всѣмъ другимъ направленіямъ происходятъ нѣкоторыя тангенціальныя, хотя крайне малыя перемѣщенія. Вслѣдствіе этого формула VII примѣнима къ нимъ только въ приближеніи.

Прим. авт.

или

$$R\left(1-\frac{2\varepsilon A}{9}\right)+\frac{\varepsilon}{R^2}\cdot\frac{2A}{3}\int_o^R s_2\, r^2\, dr$$

Экваторіальный радіусъ, имѣвшій длину: R, теперь имѣетъ длину:

$$R\left(1+\frac{\varepsilon A}{9}\right)-\frac{\varepsilon}{R^2}\frac{1}{3}A\int_o^R s_2\, r^2\, dr \qquad \text{X}$$

отсюда, пренебрегая малыми величинами, найдемъ для сжатія [1]) выраженіе:

$$\frac{\varepsilon.A}{3}-\frac{\varepsilon.A}{R^3}\int_o^R s_2\, r^2\, dr$$

Когда $t=\infty$, то $s_2=o$ и сжатіе равно:

$$\frac{\varepsilon.A}{3} \qquad \text{XI}$$

Полагая, вмѣстѣ съ Фишеромъ [2]) $\varepsilon = 0{,}000007$ на 1° F. или 0,0000126 на 1°С., полагая дальше, что $A = 50°$ [3]), найдемъ сжатіе:

---

[1]) Въ 1-ой части этой работы я вычислялъ деформаціи другимъ образомъ. Результатъ получился большій, но формула для измѣненія длины радіуса была не совсѣмъ точная. Она была выведена въ предположеніи, что расширеніе въ сторону невозможно. *Прим. авт.*

[2]) O. Fisher. On the mean height...... Phil. Magaz. 25 томъ 17 стр.

[3]) Разность средней температуры почвы у полюса и на экваторѣ въ 50°С., кажется мнѣ, достаточна. Въ самомъ жаркомъ климатѣ въ настоящее время средняя температура воздуха не превышаетъ 30°С. Изъ наблюденій надъ температурой почвы извѣстно, что средняя темп. почвы обыкновенно нѣсколько выше средней температуры воздуха. Въ Нукусѣ надъ Аму Дарьей по наблюденіямъ Доранта положительная разница 4°С. Температура почвы на полюсѣ намъ неизвѣстна, но средняя температура почвы въ Якутскѣ на глубинѣ 2 метровъ равна—11°1С., а, судя по температурамъ воздуха, въ иныхъ мѣстахъ Восточной Сибири она доходитъ до—15°С. Такимъ образомъ, въ настоящую эпоху разность между самыми крайними температурами почвы вѣроятно не больше 50°R. Что касается предъидущихъ геологическихъ эпохъ, если припомнимъ, что вліяніе внутренней теплоты земли на темп.

$$0{,}00021 = \frac{1}{4762}.$$

Разность между экваторіальнымъ и полярнымъ радіусомъ равна 1378 метрамъ, если средній радіусъ земли равенъ 6370 километрамъ.

Такъ какъ климатическое неравенство между полюсомъ и экваторомъ есть навѣрно самое древнее, то быть можетъ, въ сжатіи земли есть нѣкоторая доля, которую слѣдуетъ отнести на счетъ этого климатическаго неравенства. Но эта доля навѣрно меньше вычисленнаго здѣсь сжатія, ибо оно составляетъ предѣлъ, достижимый только послѣ безконечнаго времени. Оно мало увеличивается, если коэфф. расширенія для ядра больше коэффиціента расширенія для веществъ коры; ибо окончательное сжатіе внутреннихъ слоевъ опредѣляется формулой [1]).

$$\frac{\varepsilon}{3} . A . \frac{r^2}{R^2} \qquad \text{XII}$$

Слѣдовательно оно уменьшается прямо пропорціонально квадрату разстоянія отъ центра—а потому въ общемъ преимущественно зависитъ отъ сокращенія верхнихъ слоевъ. Точно такъ, если предположимъ, что въ температурѣ почвы существуетъ неравенство вида

$$\frac{B}{2} \cos \theta$$

[гдѣ B выражаетъ амплитуду разности температуръ между однимъ и другимъ полюсомъ], то найдемъ на одномъ полюсѣ возвышеніе поверхности въ:

почвы было вѣроятно больше, чѣмъ въ настоящее время; то придемъ къ заключенію, что разность температуръ въ 50°C. для этихъ эпохъ совершенно достаточна. *Прим. авт.*

[1]) Эту формулу легко вывести на подобіе формулы XI, интегрируя въ формулахъ IX и X отъ *о* до *r*. *Прим. авт.*

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R \text{ метровъ}$$

а на другомъ пониженіе въ:

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R \text{ метровъ}$$

н. п. полагая, что $B = 10^0$ найдемъ, что

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R = 200{,}6 \text{ метрамъ.}$$

Я взялъ амплитуду въ 10°C. имѣя въ виду неравенство температуры между полушаріемъ Океановъ и полушаріемъ суши.

Такимъ образомъ полюсъ: $\theta = o$ долженъ находиться вблизи Лондона, полюсъ $\theta = \pi$, въ антиподахъ Лондона. Амплитуду въ 10°C. нахожу изъ приблизительнаго вычисленія, если устранить всѣ прочіе климатическіе факторы. Разумѣется функція

$$\frac{B}{2} \cos\theta$$

только въ грубомъ приближеніи изображаетъ разсматриваемое климатическое неравенство. Можно себѣ представить, что обѣ деформаціи, прежде вычисленная и только что упомянутая, какъ бы наложены другъ на друга [1]) и вычислить поднятіе, или пониженіе поверхности въ данномъ мѣстѣ. Нужно только помнить, что для первой полярная ось проходитъ сквозь географическіе полюсы, для второй сквозь Лондонъ и его антиподы.

Большія неровности рельефа, какъ обѣ Америки, Европа съ Африкой выражаются гармоническими функціями 4-аго по-

---

[1]) Еслибъ взять предѣльныя разности между температурой дна Океановъ и почвы материковъ, то получились бы возвышенія и пониженія доходящія до 700 м. Но тогда нельзя уже сочетать обѣ деформаціи вмѣстѣ.

Прим. авт.

рядка [1]) но различія въ температурѣ почвы, находящіяся въ прямой зависимости отъ этихъ неровностей рельефа, незначительны [2]). Съ другой стороны въ выраженіи ихъ вліянія на температуру внутри земли появляется факторъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

а потому даже окончательныя деформаціи будутъ незначительны. Онѣ не будутъ больше какой нибудь сотни метровъ.

Помощью ряда сферическихъ функцій можно выразить какое угодно распредѣленіе температуры въ поверхности земли и прослѣдить вліяніе такого распредѣленія на температуры ядра, но для нашей цѣли этого не нужно, ибо мы уже показали какое значеніе для деформаціи земли имѣютъ главнѣйшіе климатическіе факторы.

Теперь мы въ состояніи дать отвѣтъ на нѣкоторые въ послѣднее время затронутые вопросы. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Фэй и Лаппаранъ [3]) вели оживленный споръ объ охлажденіи земли. Фэй утверждалъ, что земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ материками. Очевидно Фэй былъ правъ, ибо разъ температура почвы на днѣ Океана ниже, чѣмъ въ поверхности суши, то это отзывается и на внутреннемъ распредѣленіи температуры. Въ свою очередь Лаппаранъ былъ правъ, говоря, что у полюсовъ, или вообще въ области очень холоднаго климата охлажденіе больше, чѣмъ подъ дномъ Океановъ.

Аргументъ Лаппарана, что почва подъ дномъ Океана плохо проводитъ теплоту не выдерживаетъ критики. Почва на

---

[1]) G. H. Darwin· On the stresses. Phil. Trans. 173 томъ Part. I. стр. 228.

[2]) Чтобы пояснить значеніе этихъ словъ укажемъ н. п. на разности температуры, соотвѣтствующей данной широтѣ. Здѣсь можно тоже взять предѣльныя разности. Тогда деформація дойдетъ до 300—400 метровъ пониженія или повышенія.

[3]) C. R. Revue. Scientifique. Bull. Soc. Geol. за 1886 г.

днѣ Океановъ состоитъ изъ тѣхъ-же самыхъ твердыхъ веществъ, что почва материковъ. Почва въ поверхности материковъ пропитана отчасти водою, но кромѣ этого воздухомъ. Почва на днѣ Океановъ пропитана лишь водою. Литровъ-же [1]) доказалъ, что, чѣмъ меньше воздуха въ данной почвѣ, а больше воды, тѣмъ лучше она проводитъ теплоту. Фэй полагаетъ, что вслѣдствіе большого охлажденія плотность веществъ подъ Океанами больше такъ, что массы веществъ въ двухъ конусахъ, имѣющихъ вершины въ центрѣ, одинъ и тотъ же уголъ отверстія у вершины и основанія: одинъ на поверхности материка, другой на поверхности моря равны.

По нашему выходитъ, что это во всякомъ случаѣ не можетъ быть отнесено на счетъ климатическихъ факторовъ, такъ какъ ихъ воздѣйствіе слишкомъ слабо. Наши разсужденія и вычисленія вмѣстѣ съ тѣмъ показываютъ, что климатическіе факторы играютъ малую роль въ образованіи неровностей рельефа, хотя несомнѣнно до нѣкоторой степени способствуютъ постоянству Океаническихъ бассейновъ. Охлажденіе все таки интензивнѣе подъ Океанами, ибо дно ихъ покрыто холодной водою, вслѣдствіе чего они углубляются противъ средней поверхности земли.

Говоря въ главѣ I о гипотезѣ Дэны мы отложили ея обсужденіе до того времени, когда займемся вопросомъ вліянія климатическихъ факторовъ на образованіе материковъ. Очевидно теперь въ нашихъ глазахъ гипотеза Дэны оказывается мало вѣроятной.

Если вышеизложенная гипотеза отдѣленія луны справедлива, то благодаря катастрофѣ, распредѣленіе температуры внутри земли сдѣлалось несимметричнымъ. Дѣйствительно, до катастрофы мѣсто, гдѣ температура доходила до *максимума* вѣроятно совпадало съ центромъ фигуры, а изотермическія по-

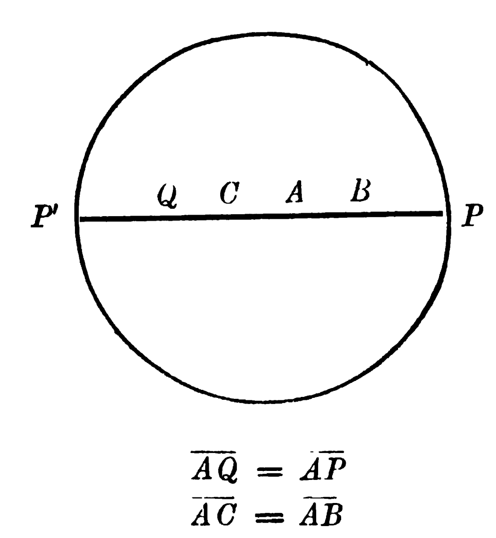
[1]) Littrow. Ueber relative Wärmeleitungsfähigkeit Sitzb. Acad. Wiss. Wien LXXXI. II Abt. стр. 110.

верхности были поверхности того-же вида, что и фигура земли. Такъ н. п. въ эллипсоидѣ онѣ были концентрическіе эллипсоиды. Послѣ катастрофы центръ фигуры измѣнилъ свое положеніе относительно мѣста, гдѣ температура доходила до *максимума*. Вслѣдствіе этого охлажденіе сдѣлалось неодинаково въ направленіи разныхъ радіусовъ. Оно сдѣлалось болѣе интензивнымъ съ той стороны тѣла, гдѣ внѣшняя поверхность находилась ближе отъ наиболѣе нагрѣтой области.

Объемъ луны въ 50 разъ меньше объема земли. Если до и послѣ катастрофы фигура земли была приблизительно шаровая и все вещество для образованія луны было отнято у одной стороны земли, то не трудно вычислить, что разстояніе между центромъ фигуры и наиболѣе нагрѣтой точкой послѣ катострофы должно составлять всего около 42 километровъ,—но при другой фигурѣ это разстояніе можетъ бытъ больше.

Вліяніе эксцентрическаго распредѣленія температуры можетъ быть прослѣжено на примѣрѣ шара. Съ этой цѣлью можно воспользоваться извѣстными аналитическими задачами, въ которыхъ рѣшается вопросъ перемѣннаго состоянія при какомъ угодно первоначальномъ распредѣленіи температуры. Но путь этотъ неудобенъ, ибо нужно непремѣнно опредѣлить форму функціи, выражающей первоначальную температуру. Между тѣмъ у насъ нѣтъ никакого критеріума для опредѣленія этой функціи такъ, что выборъ ея остается въ широкихъ предѣлахъ произвольнымъ. Притомъ функція, выражающая температуру имѣетъ видъ рядовъ, неудобныхъ для разсмотрѣнія.

Поэтому мы избираемъ слѣдующій обходной путь. Положимъ, что у насъ есть шаръ. Въ извѣстный моментъ температура въ этомъ шарѣ есть функція отъ разстоянія отъ нѣкоторой точки: A, находящейся на разстояніи a отъ центра C. Самая высокая температура въ точкѣ: A. Очевидно самое большое сокращеніе будетъ въ области точки P, самое малое въ области точки P'.



Вычислимъ окончательное сокращеніе радіуса CP и радіуса CP'.

Въ моментъ $t=o$ температура въ извѣстной точкѣ внутри шара была: V_o. Послѣ безконечнаго времени, температура шара всюду дѣлается равна температурѣ среды; V_m. Поэтому элементъ радіуса: dr послѣ безконечнаго времени сокращается на:

$$\varepsilon.(V_o - V_m)\,dr$$

гдѣ ε обозначаетъ коэффиціентъ линейнаго разширенія. Поэтому послѣ совершеннаго охлажденія, разность между длиной радіуса CP и CP' будетъ:

$$\varepsilon\int_o^{\overline{CP}}(V_o - V_m)\,dr - \varepsilon\int_o^{\overline{CP'}}(V_o - V_m)\,dr$$

Эту разность можно написать такъ:

$$\varepsilon\Big[\int_o^{\overline{CA}}(V_o - V_m)dr + \int_{\overline{CA}}^{\overline{CB}}(V_o - V_m)\,dr +$$

$$+\int_{\overline{CB}}^{\overline{CP}}(V_o - V_m)\,dr - \int_o^{\overline{CQ}}(V_o - V_m)\,dr - \int_{\overline{CQ}}^{\overline{CP'}}(V_o - V_m)\,dr\Big]$$

Но V_m всюду имѣетъ одно и тоже значеніе, V_o симметрично относительно точки: A, поэтому первый и второй интегралъ равны, третій и четвертый интегралъ тоже равны.—Вслѣдствіе этого можно написать нашу разность подъ видомъ:

$$\varepsilon\left[2\int_{o}^{\overline{CA}}(V_o-V_m)\,dr-\int_{\overline{CQ}}^{CP'}(V_o-V_m)\,dr\right]$$

Замѣтимъ сначала, что такъ какъ:

$$\overline{QP'}=2.\overline{CA}$$

то, коль скоро V_o постоянно во всемъ шарѣ, эта разность обращается въ нуль, какъ и слѣдовало ожидать.

Разсматривая это выраженіе замѣчаемъ, что разность между длиною радіусовъ CP и CP' тѣмъ больше, чѣмъ больше: 1) коэффиціентъ расширенія, 2) разстояніе $\overline{CA}$ между центромъ шара и точкой, гдѣ температура доходитъ до максимума, 3) Когда: $V_o - V_m$ въ промежуткѣ $\overline{CA}$ значительно больше, чѣмъ въ промежуткѣ QP'. Этому послѣднему условію удовлетворяетъ такое распредѣленіе температуры до катастрофы, при которомъ *температура центральной части тѣла была высокая, сравнительно съ температурой внѣшнихъ слоевъ.* Чтобы составить себѣ понятіе о величинѣ деформаціи, возьмемъ слѣдующій примѣръ. Пусть $CA=42$ килом. пусть $\varepsilon=0{,}0000126$ [1]) на 1°C. Пусть въ промежуткѣ CA $V_o - V_m = 10000°C.$ въ среднемъ: [это самая нагрѣтая область!] а въ промежуткѣ QP' $V_o - V_m = 500°C.$ [это внѣшніе пласты до глубины 80 километровъ]. Тогда разность:

$CP' - CP = 10$ километрамъ съ небольшимъ.

Разстояніе между центромъ прежней и новой фигуры, принятое нами въ этомъ примѣрѣ, скорѣе минимальное, чѣмъ преувеличенное. Разность между температурой центральной области и внѣшнихъ слоевъ въ какіе нибудь 9500°C. тоже принадлежитъ къ разряду вѣроятныхъ разностей. Между тѣмъ предѣльный эффектъ деформаціи оказался значительно больше,

---

[1]) Это коэффиціентъ Фишера.

чѣмъ въ случаѣ климатическихъ факторовъ, да притомъ абсолютная величина этой деформаціи есть величина совершенно того-же самаго разряда, что разстоянія между уровнемъ дна въ весьма глубокихъ частяхъ Океановъ и уровнемъ поверхности самыхъ высокихъ плоскогорій.

Обсуждая климатическіе факторы и вліяніе эксцентрическаго первоначальнаго распредѣленія температуры, мы говорили единственно о предѣльной деформаціи т. е. о деформаціи, которая завершается только послѣ безконечнаго промежутка времени. Поэтому здѣсь умѣстно сдѣлать слѣдующія замѣчанія: 1) Охлажденіе и всѣ соединенныя съ нимъ явленія идутъ сначала въ болѣе быстромъ тэмпо, которое потомъ все больше и больше замедляется. 2) Климатическія неравенства тѣмъ скорѣе доходятъ до предѣльнаго вліянія, чѣмъ порядокъ ихъ выше [1]). Для поясненія этого положенія приведемъ слѣдующій примѣръ. Пусть у охлаждающагося шара будетъ неравенство климатическихъ условій между однимъ и другимъ полушаріемъ и кромѣ того неравенство климатическихъ условій между полярными и экваторіальной областью. Въ выраженіе температуры войдутъ сферическія функціи нулевого, перваго и второго порядка. Функція нулевого порядка отвѣчаетъ общему охлажденію, перваго — неравенству климатическихъ условій между обѣими полушаріями, второго, неравенству условій между полярными и экваторіальчой областью. Прежде всего до предѣла доходитъ вліяніе неравенства второго порядка т. е. измѣненіе сжатія, потомъ несимметричная деформація обоихъ полушарій. Наконецъ только общее охлажденіе.

Можно подобнымъ образомъ опредѣлить ходъ деформаціи, зависящей отъ первоначальнаго эксцентрическаго распредѣленія температуры; если извѣстна форма функціи, выражающей эту температуру.

---

[1]) Ср. Къ теоріи вѣковаго охлажденія. I часть. Стр. 33.

Ходъ охлажденія и рядомъ съ этимъ сокращеніе особенно на первыхъ порахъ зависитъ отъ предположеннаго первоначальнаго распредѣленія температуры. Такъ н. п. у однороднаго шара въ сравнительно простомъ случаѣ, когда температура всегда была и есть функція отъ радіуса въ общемъ случаѣ температура выражается безконечнымъ рядомъ вида:

$$\sum A e^{-a^2p^2t} \cdot \frac{\sin pr}{r}$$

Если нашъ шаръ имѣетъ размѣры земли [1]) то численное значеніе коеффиціентовъ при t будетъ поочереди

$$\frac{\pi^2}{10^{12}},\ \frac{4\pi^2}{10^{12}},\ \frac{9\pi^2}{10^{12}},\ \frac{25\pi^2}{10^{12}},\ \ldots$$

Первый членъ ряда уменьшается до значенія въ половину меньше первоначальнаго только черезъ 70,000 милліоновъ лѣтъ слишкомъ, второй послѣ времени въ четыре раза менѣе продолжительнаго, третій черезъ время въ девять разъ менѣе продолжительное и т. д.

Очевидно, коль скоро въ данномъ выраженіи температуры первый, второй и т. д. члены появляются съ большими коэффиціентами, а члены болѣе высокаго порядка съ очень малыми, то характеръ всего процесса зависитъ отъ этихъ первыхъ членовъ и охлажденіе идетъ весьма медленно. Въ противномъ случаѣ наоборотъ. Но абсолютная величина коэффиціентовъ A находится въ самой тѣсной связи со свойствами функціи, выражающей первоначальную температуру [2]).

---

[1]) Здѣсь принимаемъ, что a^2 т. е. отношеніе коэффиціента теплопроводности къ коэффиціенту теплоемкости при единицахъ: времени—годъ, длины англ. футъ имѣетъ численное значеніе: 400 [коэфф. Томсона] Радіусъ земли въ футахъ: 20,000,000. Ср. Къ теоріи охлажденія земли. I часть 42 стр.

[2]) Подъ первоначальной температурой понимаемъ температуру въ какой нибудь опредѣленный моментъ времени н. п. въ моментъ катастрофы, благодаря которой луна отдѣлилась отъ земли. *Прим. авт.*

Изъ этого слѣдуетъ, что въ концѣ концовъ нельзя сказать ничего положительнаго о томъ, въ какой степени въ современномъ рельефѣ земли выражается вліяніе распредѣленія температуры внутри земли въ моментъ катастрофы. При извѣстныхъ условіяхъ быть можетъ, что въ настоящее время уже цѣлые материки слѣдуетъ разсматривать какъ результатъ деформаціи, обусловленной несимметричностью распредѣленія температуры. Но при другихъ условіяхъ деформація пожалуй состоитъ въ незначительныхъ поднятіяхъ и опусканіяхъ.

Теперь мы должны перейти къ вліянію несимметричнаго распредѣленія веществъ внутри земли. При другихъ теоріяхъ происхожденія материковъ и горъ предполагается, что земля имѣетъ концентрически слоистое строеніе кромѣ тонкой внѣшней коры, въ которой, благодаря геологическимъ процессамъ, господствуетъ большое разнообразіе. Но это разнообразіе имѣетъ до нѣкоторой степени мѣстный характеръ. Слои смѣняютъ другъ друга, но рѣдко встрѣчается слой, занимающій настолько обширное пространство, чтобы его термическія свойства могли отразиться въ ходѣ охлажденія земли. Притомъ, слои внѣшней коры не прочны. Они подвержены разрушенію отъ дѣятельности воды. Періодъ ихъ существованія въ сравненіи съ продолжительностью существованія земли не великъ. Между тѣмъ, какъ выше было указано, нужны неслыханно долгіе промежутки времени для того, чтобы произвести замѣтный эффектъ въ ходѣ охлажденія земли. Совсѣмъ не то, если положимъ, что въ болѣе глубокихъ, не затронутыхъ денудаціей слояхъ земли распредѣленіе веществъ не вполнѣ концентрически слоисто. Можно напримѣръ полагать, что катастрофа съ одной стороны земли устранила цѣлый слой, который съ другой стороны сохранился. Яма могла быть отчасти занесена различными другими веществами.

Если притомъ сказанный слой довольно значительно различается по своимъ термическимъ свойствамъ отъ сосѣднихъ

слоевъ, то въ ходѣ охлажденія одной и другой стороны земного тѣла должны существовать довольно крупныя различія.

Отъ прямого аналитическаго изслѣдованія вопроса мы должны отказаться, вопервыхъ потому, что задачи объ охлажденіи неоднородныхъ тѣлъ принадлежатъ къ разряду нерѣшенныхъ, за исключеніемъ [1]) нѣкоторыхъ болѣе простыхъ случаевъ, во вторыхъ потому, что рѣшенія получаются водъ видомъ безконечныхъ рядовъ крайне неудобныхъ для изслѣдованія. Притомъ коэффиціенты рядовъ зависятъ отъ неизвѣстнаго намъ распредѣленія температуры въ моментъ катастрофы. Даже въ задачахъ, относящихся къ однороднымъ тѣламъ, относительно которыхъ существуютъ полныя аналитическія рѣшенія, коль скоро первоначальная температура неизвѣста, ряды даютъ крайне немногое. Въ виду этого и здѣсь постараемся получить нѣкоторые результаты другимъ путемъ. Притомъ будемъ разсматривать шаровидное тѣло.

Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что въ неоднородномъ тѣлѣ деформація зависитъ нетолько отъ различій въ ходѣ охлажденія, но тоже отъ различій въ ходѣ сокращенія различныхъ веществъ. Такъ н. п. охлажденіе можетъ идти въ двухъ мѣстахъ «pari passu», а сокращеніе благодаря различнымъ коэффиціентамъ расширенія можетъ быть совершенно различное. Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Въ задачѣ Томсона [2]) предполагается, что первоначальная температура постоянна внутри всего тѣла. Для цѣлаго милліарда лѣтъ можно пренебречь вліяніемъ кривизны. Поэтому Томсонъ разсматриваетъ безконечное

---

[1]) Такъ н. п. Пуасонъ рѣшилъ задачу объ однородномъ шарѣ съ концентрической оболочкой. Эта задача находится въ его «Theorie mathematique de la chaleur». Таже задача и задача объ охлажденіи двойной пластинки, состоящей изъ двухъ веществъ рѣшена авторомъ настоящей работы. См. М. П. Рудскій. Двѣ задачи изъ теоріи теплоты XI томъ Зап. Матем. Отд. Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

[2]) Cooling. of the Earth. loc. cit.

тѣло, ограниченное съ одной стороны плоскостью. Онъ находитъ, что послѣ ста милліоновъ лѣтъ на глубинѣ 500—600 [1]) англ. миль измѣненіе температуры совсѣмъ незначительно. Поэтому, если предположимъ, что различія въ способности сокращаться ограничиваются слоемъ тоже въ 500—600 англ. миль толщины, а различій въ теплопроводности и теплоемкости нѣтъ, то можемъ воспользоваться задачей Томсона. Фишеръ [2]) на основаніи данныхъ Томсона вычисляетъ, что за эти сто милліоновъ лѣтъ радіусъ земли сократился на 6 англ. миль. Если положимъ, что въ нѣкоторой обширной области [3]) коэффиціентъ расширенія въ n разъ больше коэффиціента Фишера [0,0000126 на 1°С.), то найдемъ сокращеніе радіуса въ $6n$ англ. миль.

Поэтому разность уровней будетъ: $(n-1)6$ англ. миль. Уже этотъ примѣръ показываетъ, что благодаря неравномѣрному сокращенію могутъ образоваться довольно крупныя неровности рельефа, если:

1. Слои сильно различаются другъ отъ друга въ способности расширяться подъ вліяніемъ измѣненій температуры.

2. Если слой, различающійся отъ другихъ слоевъ по своимъ свойствамъ отличается большой мощностью и занимаетъ большое пространство (н. п. хоть цѣлое полушаріе):

3) Если время, истекшее съ момента катастрофы [4]), достаточно продолжительно.

Здѣсь мы должны напомнить, что даже въ слоѣ, состоящемъ изъ одного и того-же самаго вещества, сокращеніе мо-

---

[1]) Англ. миля=1619 метрамъ.

[2]) On the mean height of elevation...... Phil. Magaz. 25 т. 5 серія.

[3]) Слѣдуетъ помнить, что постоянно идетъ рѣчь о различіяхъ не въ вертикальномъ, а въ горизонтальномъ направленіи. *Прим. авт.*

[4]) Нарочно употребляемъ менѣе опредѣленное слово: катастрофа, чтобы дать понять, что не только отдѣленіе луны, но и другая катастрофа могла дать поводъ къ измѣненію строенія земли изъ концентрически слоистаго на менѣе или болѣе неправильное. *Прим. авт.*

жетъ быть неодинаковое, если благодаря какимъ-либо причинамъ н. п. эксцентрическому распредѣленію температуры онъ въ одной области находится въ твердомъ, а въ другой еще въ жидкомъ или полужидкомъ состояніи.

Перейдемъ теперь къ термическимъ свойствамъ породъ. Можно бы подумать, что способность лучеиспусканія у породъ, залегающихъ на поверхности имѣетъ большое вліяніе на ходъ охлажденія внутри земли. Однако это не такъ. Еще Риманъ а раньше его Пуассонъ сдѣлали замѣчаніе, что коэффиціентъ лучеиспусканія у *очень большихъ тѣлъ* какъ н. п. земля оказываетъ сравнительно малое вліяніе на ходъ охлажденія. Исключеніе составляетъ только тотъ неимѣющій практическаго значенія случай, когда коэффиціентъ лучеиспусканія есть безконечно малый. Н. п. для шара той величины, что земля, получается почти такая-же самая температура для извѣстнаго момента времени, когда положимъ, что коэффиціентъ лучеиспусканія имѣетъ конечное или безконечное значеніе.

Дѣло въ томъ, что функція, выражающая температуру шара заключаетъ нѣкоторые постоянные коэффиціенты, зависящіе отъ условій передачи теплоты въ самой поверхности. Они опредѣляются изъ нѣкотораго трансцендентнаго уравненія, въ которое входитъ и коэффиціентъ лучеиспусканія, но раздѣленный на коэффиціентъ теплопроводности и умноженный на радіусъ. Если радіусъ очень большой, то многіе первые корни этого уравненія выходятъ всегда очень близкіе къ кратнымъ числа: π, между тѣмъ когда коэфф. лучеиспусканія безконечно большой, (или радіусъ безконечно большой) то корни равны съ точностью кратнымъ: π. Дальніе корни уже болѣе различны другъ отъ друга, но во всѣхъ, имѣющихъ практическое значеніе задачахъ, именно первые члены рядовъ, въ которыхъ появляются эти корни, играютъ преобладающую роль.

Точно также, рѣшая задачу объ охлажденіи шара съ концентрической оболочкой, можно убѣдиться, что тонкій слой

плохо проводящаго теплоту вещества имѣетъ малое вліяніе на ходъ охлажденія, разумѣется за исключеніемъ того случая, когда онъ или вовсе не проводитъ или почти не проводитъ теплоты, но такіе случаи тоже неимѣютъ практическаго значенія:

Приведемъ вкратцѣ доказательство этихъ словъ. Для однороднаго сплошного шара имѣемъ уравненіе [1]), опредѣляющее коэффиціенты погасанія:

$$\frac{\alpha}{tang\alpha} = 1 - \frac{h}{k} R \qquad \text{I}$$

гдѣ R есть радіусъ шара
h — коэффиціентъ лучеиспусканія.
k — коэффиціентъ теплопроводности.

Если же имѣемъ дѣло съ шаромъ, окруженнымъ концентрической оболочкой, то уравненіе [2]), опредѣляющее коэффиціенты погасанія будетъ:

$$Q\left[cotg\,\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\right] = \frac{\alpha\sin\frac{\alpha}{n} - P\cos\frac{\alpha}{n}}{\alpha\cos\frac{\alpha}{n} + P.\sin\frac{\alpha}{n}}$$

Величина $\underline{n}$ зависитъ отъ отношенія толщины оболочки къ радіусу ядра. Когда толщина оболочки безконечно малая, то n есть безконечно большая величина. Поэтому при очень тонкой

[1]) Ср. н. п. Fourrier. Analytische Theorie der Wärme переводъ Weinsteina. Berlin 1884 г. Гл. V стр. 280. Это тоже самое уравненіе о которомъ выше шла рѣчь. *Прим. авт.*

[2]) М. П. Рудскій. Двѣ задачи изъ теоріи теплоты XI томъ Зап. Нов. Общ. Естеств. стр. 141. Я называю коэффиціенты, опредѣляющіеся изъ корней уравненія коэффиціентами погасанія, ибо отъ нихъ зависитъ скорость погасанія функціи, выражающей температуру. т. е., другими словами, отъ нихъ зависитъ скорость охлажденія.

оболочкѣ пока α есть небольшая величина (т. е. въ области первыхъ малыхъ корней уравненія) можно положить:

$$sin\frac{\alpha}{n} = 0$$

$$cos\frac{\alpha}{n} = 1$$

тогда уравненіе приводится къ виду:

$$Q\left[cotg\,\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\right] = -\frac{P}{\alpha} \qquad \text{II}$$

но

$$\frac{Q}{P} = \frac{k}{\left(h_1 - \frac{k_1}{R}\right)\rho}$$

здѣсь h_1 есть коэффиціентъ лучеиспусканія для внѣшней оболочки
— k_1 — — теплопроводности..............
— R — радіусъ всего шара.
— ρ — — ядра.

Такъ какъ ρ почти равно R, то можно написать:

$$\frac{Q}{P} = \frac{k}{h_1 R - k_1}$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе: II найдемъ

$$cotg\,\alpha\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{h_1}{k}R\right)$$

или

$$\frac{\alpha}{tang\alpha} = \left(1 - \frac{h_1}{k}R\right)$$

т. е. для первыхъ малыхъ корней [1]) можно пользоваться тѣмъже самымъ уравненіемъ: I, относящимся къ однородному шару съ той разницею, что вмѣсто коэффиціента лучеиспусканія для ядра нужно подставить коэфф. лучеиспусканія для вещества оболочки, что впрочемъ само по себѣ очевидно. И такъ для того, чтобы въ охлажденіи отразились свойства даннаго слоя, нужно чтобы онъ имѣлъ значительную толщину. Разумѣется нужно тоже продолжительное время для того, чтобы онъ оказалъ свое вліяніе. Ходъ охлажденія такой, что одна сторона шара скорѣе охлаждается и сокращается, чѣмъ другая.

Но для того, чтобы несимметричность внутренняго строенія сильно отразилась въ ходѣ деформаціи нужно еще, чтобы первональныя температуры въ цѣломъ тѣлѣ, или покрайней мѣрѣ въ большей его части были высокія. Дѣйствительно. Когда деформація достигаетъ большихъ размѣровъ? Очевидно тогда, когда внутри шара на одной и той же сферической поверхности [имѣющей центръ въ центрѣ шара] температура измѣняется въ широкихъ предѣлахъ. Но для того, чтобы въ одной и тойже поверхности въ одномъ мѣстѣ была температура A а въ другомъ B, причемъ B больше A, непремѣнно нужно, чтобы первоначально въ цѣломъ слоѣ была температура значительно больше, чѣмъ наибольшее изъ B. Очевидно, чѣмъ больше первоначальная температура, тѣмъ больше шансовъ, чтобы въ послѣдствіи, благодаря различіямъ въ условіяхъ охлажденія, образовались крупныя разности температуры. Сопоставляя прежде сказанное видимъ, что крупныя деформаціи требуютъ вообще высокой первоначальной температуры, причемъ, если всегда существовала крупная разность между температурой центра и внѣшнихъ слоевъ, то эксцентрическое первоначальное распредѣленіе температуры можетъ произвести довольно значительную деформацію.

[1]) Припомнимъ, что во всѣхъ случаяхъ, имѣющихъ практическое значеніе, въ выраженіи температуры самую крупную роль играютъ члены, содержащіе малые коэффиціенты погасанія. *Прим. авт.*

Чтобы судить о ея величинѣ нужно избрать какое нибудь произвольное, но возможное распредѣленіе температуры. Н. п. можно сдѣлать предположеніе, что въ данный моментъ времени температура выражается функціей:

$$A + B\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

гдѣ n есть функція отъ долготы и широты. Эта функція имѣетъ то преимущество, что въ поверхности всюду даетъ одну и ту же температуру A, притомъ всюду постепенно падаетъ отъ центра къ поверхности и, если только n положительно, всегда даетъ конечную температуру для центра. Притомъ центръ имѣетъ наибольшую температуру, что конечно не составляетъ уже преимущества, ибо при неравномѣрномъ охлажденіи точка, гдѣ температура доходитъ до *максимума* съ теченіемъ времени измѣняетъ свое положеніе, впрочемъ въ большинствѣ случаевъ не настолько, чтобы это мѣшало употребленію сказанной функціи. Притомъ слѣдуетъ ввести условіе, чтобы градіентъ въ поверхностныхъ слояхъ былъ заключенъ въ извѣстныхъ предѣлахъ. Положимъ н. п. что наибольшій градіентъ доходитъ до $35^1/_3$ метровъ, наименьшій не превышаетъ 25 метровъ. Эти предѣлы достаточно широки, ибо, хотя на дѣлѣ градіентъ измѣняется въ болѣе широкихъ предѣлахъ, все таки слѣдуетъ помнить о томъ, что величина градіента зависитъ тоже отъ чисто мѣстныхъ условій.

Если рядомъ съ этимъ предположимъ, что температура центра равна 4000°С., то разность [1]) между наибольшимъ и наименьшимъ разстояніемъ внѣшней поверхности отъ центра окажется въ 1,5 километра; если-же температура центра равна 10,000°С., то тоже самая разность окажется почти въ 10 километровъ. Притомъ въ первомъ случаѣ разности между темпе-

[1]) Предполагается, что коэфф. линейнаго расширенія ε.=0,0000126 на 1°С. какъ у Фишера.

пературами въ одной и той-же концентрической сферической поверхности доходятъ до 216°С. на глубинѣ около 150 килом. во второмъ же случаѣ эти разности доходятъ до 800° слишкомъ градусовъ С. на глубинѣ около 250 килом.

Принимая меньшіе предѣлы для градіента, но желая получить тѣ-же самыя числа, нужно взять большую температуру для центра.

Нельзя придавать этимъ числамъ особеннаго значенія. Они только показываютъ, что высокія начальныя температуры и высокія температуры центральной области способствуютъ деформаціямъ, во вторыхъ, что для образованія материковъ нужно, чтобы внутри шара разности между температурами въ одной и той-же шаровой концентрической поверхности доходили до нѣсколькихъ сотъ градусовъ.

До сихъ поръ мы разбирали условія, способствующія деформаціи, теперь, насколько возможно, постараемся обсудить въ какой степени онѣ исполняются.

На счетъ продолжительности времени ничего не знаемъ, есть только догадки. Томсонъ думаетъ, что съ момента отвердѣнія [если вещества внутри земли отвердѣли] истекло не менѣе 20, не болѣе 400 милліоновъ лѣтъ. Дэна съ начала Палеозойской эпохи до нашего времени считаетъ сто милліоновъ лѣтъ, но до нея имѣемъ очень длинную архэйскую эпоху. Г. Г. Дарвинъ вычисляетъ, что съ момента отдѣленія луны отъ земли истекло никакъ не менѣе 57 милліоновъ лѣтъ, но этотъ промежутокъ времени можетъ быть въ десять и сто разъ больше. За то можно составить себѣ понятіе о годичномъ сокращеніи радіуса земли. Для этого мы должны допустить, что земля есть однородное тѣло. Такимъ образомъ результатъ не можетъ претендовать на большую точность, но даетъ вполнѣ понятіе о настоящемъ значеніи сокращенія.

Въ продолженіе времени: dt элементъ объема $dxdydz$ сокращается на:

$$\mu \frac{\partial V}{\partial t} . dx\, dy\, dz\, dt$$

гдѣ μ обозначаетъ коэффиціентъ кубическаго расширенія
— V — температуру
но внутри [1]) тѣла:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 . \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\}$$

гдѣ a^2 есть термометрическій коэффиціентъ теплопроводности: $\left(\frac{k}{c}\right)$. Слѣдовательно въ теченіе времени dt элементъ объема сокращается на:

$$\mu . a^2 \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} dx\, dy\, dz\, dt$$

а объемъ цѣлаго тѣла на:

$$\mu\, a^2 \int\int\int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx\, dy\, dz\, . dt$$

гдѣ интеграція простирается на весь объемъ тѣла.

Извѣстно, что этотъ интегралъ по всему объему [2]) сводится на интегралъ по всей поверхности:

$$\mu\, a^2 \int\int \frac{\partial V}{\partial n} df . dt$$

гдѣ n обозначаетъ внѣшнюю нормаль къ поверхности тѣла.
— df — элементъ поверхности.

---

[1]) Это есть фундаментальное уравненіе теоріи теплопроводности.

[2]) См. любой учебникъ теоретической физики, главу о потенціалѣ и. п. Kirchhoff Vorlesungen Ueber Mathematische Physik. Leipzig. 1883. гл. XVI

Въ случаѣ шара:

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{g}$$

гдѣ g обовначаетъ градіентъ въ поверхностномъ слоѣ. Разумѣется принимаемъ во вниманіе средній градіентъ. Тогда можно вывести g за знакъ интеграціи и расширеніе шара опредѣлится величиной

$$-\frac{\mu a^2}{g}.4\pi R^2.dt$$

гдѣ R есть радіусъ шара. Но, если шаръ расширяется, то его радіусъ увеличивается. Пусть увеличенія радіуса будетъ:

$$dR$$

Тогда объемъ шара:

$$\frac{4\pi}{3}R^3$$

сдѣлается больше, именно онъ будетъ теперь:

$$\frac{4\pi}{3}(R+dR)^3=\frac{4\pi R^3}{3}+4\pi R^2.dR$$ [приблизительно, такъ какъ dR въ сравненіи съ R есть очень малая величина].

И такъ мы нашли разъ, что увеличеніе объема равно:

$$-\frac{\mu a^2}{g}\,4\pi R^2$$

а другой разъ, что оно равно:

$$4\pi R^2.dR$$

слѣдовательно:

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{\mu a^2}{g}$$

Въ настоящее время градіентъ въ англійскихъ [1]) единицахъ т. е. футахъ и градусахъ Фаренгейта имѣетъ численную величину: 51, $a^2 = 400$ въ тѣхъ-же единицахъ и при единицѣ времени: годъ, наконецъ:

$$\mu = 3\varepsilon$$

гдѣ ε есть коэффиціентъ линейнаго разширенія.

$$\varepsilon = 0{,}000007 \text{ по Фишеру}$$

слѣдовательно

$$\mu = 0{,}000021$$

а потому сокращеніе [2]) радіуса въ теченіе года при настоящей средней величинѣ градіента составляетъ

0,000164 анг. фута

Соотвѣтствующее годичное сокращеніе поверхности составляетъ:

82420 кв. анг. [3]) фут. т. е. около $\frac{1}{148}$ квадратной версты.

Еслибы градіентъ въ поверхности былъ извѣстенъ въ функціи отъ времени, то можнобы вычислить среднее сокращеніе радіуса въ продолженіе какого угодно промежутка времени. Однако вообще для того, чтобы знать измѣненіе градіента въ поверхности, нужно знать распредѣленіе температуры внутри шара въ извѣстный моментъ. Тогда можно тоже вычислить время, истекшее со сказаннаго момента до настоящаго времени. Конечно, въ виду неоднородности земного шара это

[1]) Мы пользуемся англ. единицами, такъ какъ всѣ величины заимствованы изъ англійскихъ источниковъ, чтобы избѣжать перечисленія. *Прим. авт.*

[2]) Говоримъ сокращеніе, ибо приращеніе отрицательное. *Прим. авт.*

[3]) Англ. футъ равенъ русскому. *Прим. авт.*

вычисленіе все таки было бы неточное, но моглобы дать весьма важныя указанія [1]).

Во всякомъ случаѣ изъ нашего вычисленія видно, что за многіе годы до и послѣ современной эпохи сокращеніе радіуса земли идетъ весьма и весьма медленно, но при маломъ градіентѣ ежегодное сокращеніе было значительно больше. Поэтому, если предположимъ, что въ исторія земли было такое время, когда температура внѣшнихъ слоевъ была высокая, то придемъ къ заключенію, что въ тоже самое время всѣ процессы, зависящіе отъ сокращенія земли были значительно интензивнѣе чѣмъ въ настоящее время, ибо при высокой температурѣ внѣшнихъ слоевъ сначала градіентъ былъ малый.

Возвратимся опять къ гипотезѣ отдѣленія луны.

Объемъ луны въ 50 разъ меньше объема земли. Еслибы все вещество луны распредѣлить въ видѣ слоя постоянной толщины на одномъ полушаріи, то полученный такимъ образомъ слой имѣлъ бы толщину приблизительно въ 80 километровъ. Значитъ, предѣльная средняя толщина слоя, оставшагося съ одной стороны земли и устраненнаго съ другой не можетъ быть больше.

Нѣсколько выше, вычисляя различія въ сокращеніи внѣшнихъ слоевъ [тамъ, гдѣ мы пользовались задачей Томсона] мы предполагали толщину слоя почти въ двѣнадцать разъ большую. Очевидно возможная деформація будетъ меньше той, о которой говорилось выше. Однако такъ какъ охлажденіе и сокращеніе наиболѣе интензивны во внѣшнихъ слояхъ, а веще-

---

[1]) Одно уже значеніе средняго градіента въ предыдущія геологическія эпохи можетъ дать весьма важныя указанія. Но надежное опредѣленіе градіента въ какой нибудь отдаленный отъ насъ моментъ возможно только по косвеннымъ признакамъ н. п. по глубинѣ очаговъ вулканической дѣятельности и результаты его весьма сомнительны. Скорѣе всего добьемся нѣкоторыхъ указаній въ далекомъ будущемъ, когда послѣ продолжительныхъ наблюденій удастся опредѣлить измѣненіе средняго градіента съ теченіемъ времени. *Прим. авт.*

ство луны взято не изъ глубокихъ сферъ ядра, а преимущественно изъ внѣшнихъ пластовъ, то деформація не будетъ въ 12 разъ меньше. Напротивъ того, изъ діаграммы Томсона [1]) графическимъ методомъ нахожу, что деформація будетъ всетаки составлять болѣе $^2/_3$ прежде вычисленной деформаціи. Значитъ, если коэффиціентъ расширенія во внѣшнихъ слояхъ подъ разными широтами и долготами измѣняется въ предѣлахъ н. п. $^1/_5$ своей средней величины [средней величиной считаемъ коэфф. Фишера] то разницы въ сокращеніи радіуса могутъ доходить почти до одной анг. мили (около $1^1/_2$ версты). Разумѣется эти числа не имѣютъ никакого особеннаго значенія тѣмъ болѣе, что, взявъ въ основаніе другія условія, получимъ другіе результаты.

Если снять съ одного полушарія пластъ, толщиною въ 80 кил., то можетъ оказаться, что при новомъ состояніи земли теплопроводность внѣшнихъ пластовъ одного полушарія значительно различается отъ теплопроводности внѣшнихъ пластовъ другого полушарія. Слѣдуетъ разобрать вопросъ, какое вліяніе на ходъ охлажденія имѣетъ пластъ, толщиною въ 80 кил., покрывающій одно только полушаріе.

Мы выше указали на критеріумъ, позволяющій составить себѣ понятіе о его вліяніи. Въ уравненіи II для первыхъ корней, находящихся въ области π, 2π. . . . уголъ: $\frac{\alpha}{n}$ будетъ малый, ибо n есть число довольно большое вслѣдствіе того, что радіусъ ядра въ 80 разъ больше толщины слоя. Слѣдовательно первые корни уравненія II будутъ близки къ корнямъ уравненія: I т. е., другими словами, большихъ различій въ ходѣ охлажденія одного и другого полушарія не будетъ, развѣ только другія условія будутъ благопріятствовать различіямъ.

Эти другія условія, собственно говоря, сводятся къ высокой температурѣ ядра.

---

[1]) Cooling of the Earth loc. cit. стр. 477.

Но при высокихъ температурахъ вещества ядра даже въ настоящее время могутъ находиться въ жидкомъ, даже, если температура превышаетъ критическую температуру [1]), въ газовомъ состояніи. Притомъ, благодаря огромному давленію, плотность газа можетъ въ тоже самое время быть равна плотности металловъ. Но въ жидкомъ или газовомъ ядрѣ передача теплоты можетъ тоже совершаться путемъ конвективныхъ [2]) токовъ.

Въ жидкомъ ядрѣ областныя значительныя различія въ ходѣ охлажденія не могутъ долго удержаться. Конвективные токи стремятся изгладить эти различія. Если-же причина различій постоянно дѣйствуетъ, то образуется постоянная система токовъ. Разумѣется токи вслѣдствіе большой вязкости вещества обладаютъ весьма малыми скоростями.

Возьмемъ н. п. во вниманіе вліяніе плохо проводящаго слоя въ нѣкоторой области земной коры. Мѣстность подъ этимъ слоемъ будетъ составлять центръ нѣкоторой системы компенсативныхъ токовъ, уносящихъ излишекъ теплоты, поэтому постоянный излишекъ температуры будетъ меньше, чѣмъ при подобныхъ условіяхъ внутри твердаго тѣла. Изъ этого въ свою очередь слѣдуетъ, что деформаціи, обусловленныя различной теплопроводностью веществъ коры будутъ значительно уменьшены. Конвенктивные токи стремятся изгладить вліяніе первоначальнаго эксцентрическаго распредѣленія теплоты.

---

[1]) Гульдбергъ вычисляетъ критическую температуру

ртути	въ	1000°C.
желѣза	—	5200°C.
мѣди	—	3900°C.
платины	—	8000°C.
золота	—	4300°C.

см. Guldberg. Zeitschr. für Phys. Chemie I томъ стр. 231. 1887 г. Слѣдуетъ однако замѣтить, что основанія вычисленія довольно шатки.

[2]) Фишеръ склоняется въ пользу гипотезы о жидкомъ ядрѣ. Онъ подозрѣваетъ нѣкоторую связь между конвективными токами и вѣковыми измѣненіями склоненій, наклоненій и т. д. магнитной стрѣлки. *Прим. авт.*

Отдѣленіе луны навѣрно совершилось еще въ то время, когда земля была почти цѣликомъ въ жидкомъ состояніи. Вслѣдствіе этого кромѣ конвективныхъ токовъ должны были проявиться токи, вызванные стремленіемъ принять фигуры равновѣсія, стремленіемъ, проникающимъ рѣшительно всѣ пласты.

Вся деформація, обусловленная приноровленіемъ къ условіямъ равновѣсія должна была совершиться въ сравнительно короткое время. Разъ земля приблизительно приняла новую форму равновѣсія и новая ось вращенія установилась, деформацію слѣдуетъ считать почти оконченной. Для слѣдующаго затѣмъ времени остаются только деформаціи вслѣдствіе измѣненія сжатія, деформаціи вслѣдствіе неодинаковаго сокращенія тѣхъ частей коры, которыя различаются въ способности измѣнять свой объемъ вслѣдствіе измѣненія температуры, наконецъ весьма незначительныя деформаціи, происходящія отъ различій въ теплопроводности веществъ коры.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Итакъ оказалось, что даже послѣ катастрофы обладающая несимметричнымъ строеніемъ земля должна при охлажденіи подвергаться весьма значительнымъ деформаціямъ, если температуры ея ядра были и есть высокія. Но, чѣмъ выше температура, тѣмъ болѣе вѣроятно, что ядро находится въ жидкомъ состояніи, что же касается самаго момента катастрофы, то гипотеза отдѣленія луны требуетъ, чтобы земля кромѣ тонкой коры, да пожалуй небольшого центральнаго твердаго ядра находилась въ полужидкомъ состояніи.

Тогда въ свою очередь вѣроятность крупныхъ несимметричныхъ деформацій, сопровождающихъ охлажденіе значительно уменьшается, ибо въ полужидкой массѣ земли новое приноровленіе къ условіямъ равновѣсія должно было въ высокой степени уменьшить несимметричность внутренняго строенія, созданную катастрофой.

Если новое приноровленіе къ фигурѣ равновѣсія не уничтожило совсѣмъ неровностей рельефа, созданныхъ катастрофой, то лишь благодаря тому, что вязкость веществъ во внѣшнихъ слояхъ была очень большая, что вѣроятно до катастрофы уже существовала твердая кора, которую, правда, катастрофа разбила на куски, но не уничтожила совершенно. Можно сказать, что слѣды катастрофы, какъ бы застыли на поверхности земли.

Во всякомъ случаѣ слѣды значительно уменьшились. Мы вычислили, что, взявъ вещество для составленія луны лишь съ одного полушарія, мы бы получили углубленіе, занимающее поверхность всего полушарія со средней глубиной въ 80 килом., между тѣмъ средняя глубина Океановъ не превышаетъ $3^1/_2$ километровъ.

Итакъ, если температура ядра невысокая, то *eo ipso* несимметричныя деформаціи незначительны, если же температура ядра высокая, то несимметричныя деформаціи опять незначительны, ибо послѣ катастрофы произошло приноровленіе къ условіямъ равновѣсія въ высокой степени уменьшившее несимметричность. По всей вѣроятности несимметричность осталась только во внѣшней корѣ и во внѣшнемъ рельефѣ, гдѣ застыли слѣды катастрофы.

Поэтому материки и Океаническіе бассейны современной эпохи въ общемъ вѣроятно мало различаются отъ материковъ и Океаническихъ бассейновъ того времени, когда завершилась деформація, обусловленная приноровленіемъ къ условіямъ равновѣсія послѣ катастрофы.

Совсѣмъ не то съ равномѣрнымъ радіальнымъ сокращеніемъ радіуса земли вслѣдствіе общаго охлажденія. Если температура ядра есть высокая, если со времени катастрофы прошло не сто милліоновъ лѣтъ а гораздо больше, то сокращеніе радіуса является причиной вполнѣ достаточной для того, чтобы объяснить образованіе всѣхъ горныхъ кряжей теперь существующихъ и исчезнувшихъ съ лика земли.

Оба условія: продолжительность промежутка времени и высокая темп. ядра тѣсно соединены между собою.

Коль скоро положимъ, что темп. ядра высокая и что вмѣстѣ съ тѣмъ и въ моментъ катастрофы она значительно превышала температуру внѣшнихъ слоевъ, то, выражая условіе, что теоретическій градіентъ во внѣшнихъ слояхъ долженъ быть равенъ наблюдаемому, найдемъ всегда для времени, истекшаго

съ момента катастрофы промежутокъ гораздо большій чѣмъ тотъ [1]) который былъ найденъ Томсономъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ слой безъ деформаціи окажется на несравненно большей глубинѣ, чѣмъ полагаютъ Фишеръ и Маллярдъ Ридъ.

Распредѣленіе горныхъ кряжей несимметрично, ибо несмотря на приблизительную симметричность ядра, кора благодаря катастрофѣ обладаетъ неправильнымъ несимметричнымъ строеніемъ. Притомъ въ корѣ есть слабыя мѣста. Это между прочимъ тѣ мѣста, гдѣ вслѣдствіе накопленія прибрежныхъ осадковъ геоизотермы возвышаются и породы размягчаются [2]). Въ такихъ мѣстахъ эффектъ радіальнаго сокращенія какъ-бы сосредоточивается.

Въ своемъ сочиненіи: Antlitz der Erde Зюссъ нѣсколько разъ указываетъ на то, что горные кряжи преимущественно состоятъ изъ мощныхъ прибрежныхъ осадковъ.

Дарвинъ и Фишеръ полагаютъ, что луна образовалась изъ оторвавшейся выпуклости приливной волны въ жидкомъ тѣлѣ земли. Поэтому Фишеръ полагаетъ, что Тихій Океанъ занимаетъ мѣсто ямы, образовавшейся съ той стороны земли, откуда отдѣлилась луна. Съ другой стороны Пуэнкаре показалъ, что при извѣстной скорости вращенія однородная жидкая масса распадается на двѣ части. До распаденія между двумя частями находится соединяющая ихъ шея. Если бы оказалось, что неоднородная масса тоже распадается подобнымъ образомъ, то можно бы положить, что Тихій Океанъ находится на сторонѣ противуположной той, откуда оторвалась луна, а материки полушарія суши суть слѣды разорванной соединяющей шеи.

---

[1]) При иныхъ распредѣленіяхъ температуры этотъ промежутокъ въ 1000 разъ больше. *Прим. авт.*

[2]) Извѣстно что Маллярдъ Ридъ построилъ всю свою теорію образованія горъ на этомъ явленіи. Но пожалуй лучше отнести образованіе горъ на счетъ первичной, чѣмъ вторичной причины, особенно послѣ того, какъ оказалось, что возраженія, основанныя на близости слоя безъ деформаціи отъ поверхности земли оказались ошибочными.

Нѣтъ возможности объяснить образованіе несимметричнаго рельефа земли безъ гипотезы о катастрофѣ. Безъ катастрофы мы бы имѣли только мелкія складки, провалы и трещины, вулканы и т. п. Безъ катастрофы между деформаціями обоихъ полушарій должна существовать полная аналогія. Гипотеза катастрофы вполнѣ объясняетъ образованіе материковъ и Океаническихъ бассейновъ. Интересно то, что крупныя измѣненія рельефа послѣ катастрофы, за исключеніемъ складчатыхъ горныхъ кряжей оказываются мало вѣроятны. Невольно является вопросъ, не претерпѣла ли земля нѣсколькихъ катастрофъ?

Но въ настоящее время только одна катастрофа является вполнѣ вѣроятной. Это Дарвинова гипотеза отдѣленія луны. Она не придумана нарочно, а такъ сказать, сама обнаружилась изъ цѣлаго ряда изслѣдованій Дарвина надъ послѣдствіями того факта, что въ настоящее время луна запаздываетъ въ своемъ движеніи, факта замѣченнаго Адамсомъ еще въ 1853 г. [1]). Наконецъ изслѣдованія Пуэнкаре, Ковалевской и Максвелля по теоріи фигуръ равновѣсія жидкостей въ высокой степени поддерживаютъ эту гипотезу.

Кромѣ этого возможными являются еще катастрофы спеціальнаго рода, обусловленныя неполной симметричностью строенія внѣшнихъ пластовъ земли. Эти внѣшніе пласты, внѣшній рельефъ не вполнѣ удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія. Изслѣдованія надъ качаніями маятника и отклоненіемъ отвѣса показали, что возвышенности рельефа компенсируются меньшей плотностью коры въ тойже самой области. Это было указано уже извѣстнымъ астрономомъ Эри [2]), потомъ Праттомъ и Фэемъ [3]).

---

[1]) Ср. Thomson et Tait Treatise on Nat. Phil. II часть II изданіе 1883.

[2]) Ср. On variations of gravity.... O. Fisher. Phil. Magaz. 1886 г. 22 томъ стр. 1.

[3]) Tisserand Traité de mecan. celeste. II томъ стр. 353.

Θ. А. Слудскій [1]) изъ разбора наблюденій надъ качаніями маятника приходитъ къ заключенію, что вообще материкамъ и возвышенностямъ соотвѣтствуютъ недостатки плотности, а Океанамъ ея избытки.

Однако въ виду весьма неправильнаго строенія земной коры трудно предполагать, чтобы ея приноровленіе къ условіямъ равновѣсія было всегда и всюду совершенное, а потому можетъ случиться слѣдующее: вслѣдствіе неравномѣрнаго сокращенія или другой причины можетъ произойти нѣкоторое небольшое измѣненіе фигуры коры; затѣмъ измѣняется и фигура жидкаго ядра (нужно въ этомъ случаѣ допустить, что ядро есть жидкое). Эта новая фигура можетъ быть фигурой равновѣсія или нѣтъ. Если она есть фигура равновѣсія, то все обстоитъ благополучно, но если новая фигура ядра, обусловленная измѣненіемъ фигуры твердой коры, не есть фигура равновѣсія, то отступленіе отъ фигуры равновѣсія должно вообще увеличиваться. Но такой случай можетъ довести до новой катастрофы. Подъ напоромъ давленія жидкости ядра кора можетъ треснуть. Не исключена тоже возможность отдѣленія нѣкоторой части ядра отъ главной массы.

Въ настоящей работѣ мы ничего не говорили о тѣхъ деформаціяхъ, которыя могутъ происходить вслѣдствіе химическихъ и физическихъ процессовъ внутри самыхъ веществъ, изъ коихъ состоитъ земля. Извѣстно, что многія дислокаціи въ соленосныхъ пластахъ обусловлены расширеніемъ ангидрида при переходѣ въ гипсъ, — многія другія химическія измѣненія сопровождаются расширеніемъ или сокращеніемъ. Поэтому хими-

---

[1]) Матем. Сборн. томъ XVI 1892 г. Строеніе земной коры.... стр. 233. Выше было указано, что явленіе компенсаціи не должно быть отнесено на счетъ неравномѣрностей въ охлажденіи, какъ думаетъ Фэй, оно скорѣе является результатомъ приноровленія къ условіямъ равновѣсія. Явленіе компенсаціи показываетъ, что натяженія внутри земнаго шара далеко не такъ громадны, какъ вычисляетъ Дарвинъ въ работѣ. On the stresses due to the weight of continents. Phil. Trans. 1882 г. *Прим. авт.*

ческіе и физическіе процессы могутъ дать поводъ къ образованію возвышенностей, складокъ и т. п. Но этотъ вопросъ разбирался уже не разъ. Поэтому не будемъ имъ заниматься. Скажемъ только, что безъ допущенія хоть одной катастрофы и химическіе процессы не могутъ довести до несимметричнаго рельефа. Ибо при вполнѣ симметричномъ первоначальномъ строеніи земли только одни климатическіе факторы моглибы вызвать различія въ ходѣ процессовъ. Но и эти факторы при вполнѣ симметричномъ строеніи подвержены измѣненіямъ, проходящимъ тѣ же самыя фазы въ обоихъ полушаріяхъ. Въ такомъ случаѣ и деформація отъ химическихъ и физическихъ процессовъ должны оказывать симметрію относительно экватора и не оказывать зависимости отъ долготы.

Нѣкоторыя изъ здѣсь помѣщенныхъ разсужденій могутъ въ послѣдствіи оказаться не вполнѣ вѣрными. Наше знаніе относительно свойствъ веществъ при температурахъ, доходящихъ до нѣсколькихъ тысячъ или десятковъ тысячъ градусовъ, при давленіяхъ въ сотни тысячъ и милліоны атмосферъ настолько ограничено, что при всей осторожности нетрудно попасть въ заблужденіе. Но заключеніе, что несимметричность рельефа земли неминуемо ведетъ къ гипотезѣ хоть одной катастрофы, по крайней мѣрѣ въ глазахъ автора настоящей работы, совершенно правильно.

М. П. Рудскій.

Прибавленіе къ I части.

Краткій очеркъ исторіи вопроса о вѣковомъ охлажденіи.

Первая строгая теорія охлажденія земли принадлежитъ, собственно говоря, Фурье и все, что было въ послѣдствіи сдѣлано сводится къ разработкѣ задачъ, изложенныхъ у Фурье. Уже въ знаменитомъ сочиненіи: *Theorie analytique de la chaleur* [1]) онъ рѣшаетъ задачу объ охлажденіи однороднаго шара и объ охлажденіи безконечнаго тѣла съ одной стороны ограниченнаго безконечной плоскостью, задачу, приложимую къ охлажденію внѣшнихъ пластовъ очень большого шара. Въ одномъ изъ мемуаровъ, помѣщенныхъ въ Annales de Chimie et de Physique именно въ XIII томѣ онъ дѣлаетъ приложеніе послѣдней задачи къ случаю земли. Въ этомъ мемуарѣ онъ доказываетъ, что въ настоящее время теплота ядра почти не оказываетъ вліянія на температуру почвы. Онъ находитъ, что, еслибъ это вліяніе совсѣмъ отсутствовало, то температура почвы понизилась бы всего на $^1/_{30}$ долю градуса Цельзія.

Соперникъ Фурье Пуассонъ оставилъ послѣ себя сочиненіе, такъ сказать, параллельное сочиненію Фурье подъ заглавіемъ: Theorie mathematique de la chaleur [2]). Въ этомъ сочи-

---

[1]) Новое изданіе. (Oeuvres de J. Fourrier) Paris 1888.

[2]) Paris 1835. Извѣстно, что гипотеза Пуассона о причинѣ внутренней теплоты земли совершенно оставлена. Она состояла въ томъ, что земля нагрѣлась проходя сквозь очень теплую область междупланетнаго пространства.

ненія разбирается тоже вопросъ охлажденія большого шара и доказывается, что тонкій поверхностный слой даже очень плохо проводящаго вещества оказываетъ весьма малое вліяніе на общій ходъ охлажденія шара. Изъ этого Пуассонъ выводитъ заключеніе, что вліяніе физическихъ свойствъ почвы на ходъ охлажденія земли весьма незначительно. Въ послѣднихъ главахъ разбирается спеціально вопросъ проникновенія солнечной теплоты въ почву и ходъ температуры почвы въ разныя времена года Пуасонъ рѣшаетъ тоже задачу объ охлажденіи шара, если условія охлажденія неодинаковы подъ всѣми широтами и долготами. Это рѣшеніе впрочемъ не въ той формѣ, въ которой оно предложено у Пуассона, а въ формѣ, которую ей придалъ Жорданъ и излагается въ первой части этой работы, но коэффиціенты, отъ которыхъ зависитъ скорость охлажденія были доселѣ неизвѣстны. Именно въ первой части этой работы въ III приложеніи доказывается теорема, помощью которой эти коэффиціенты могутъ быть опредѣлены.

Въ сочиненіи Римана [1]) «Partielle Differentialgleichungen нѣсколько странницъ посвящены вѣковому охлажденію земли, но онѣ въ сущности не содержатъ ничего новаго. Онъ между прочимъ замѣчаетъ, что нельзя точно обосновать теорію вѣкового охлажденія, пока наблюденія надъ градіентомъ обнимаютъ сравнительно небольшіе промежутки времени.

Томсонъ въ работѣ: Cooling of the Earth [2]) пользуется задачей Фурье объ охлажденіи безконечно большого однороднаго тѣла, съ одной стороны ограниченнаго безконечной плоскостью. Онъ предполагаетъ, что земля есть однородное тѣло, что температура ея въ моментъ отвердѣнія была всюду постоянна, что отвердѣніе совершилось весьма скоро и при температурѣ въ 7000° Фаренгейта. Потомъ вводится условіе, чтобы теоретичес-

[1]) Braunschweig 1882.

[2]) Treat. on Nat. Phil. II часть Cambridge 1883 г. Тоже De Motu caloris per terrae corpus Glasgow. 1846.

кій градіентъ былъ равенъ наблюдаемому. Изъ этого условія выходитъ, что отъ момента отвердѣнія до настоящаго времени должно было истечь около ста милліоновъ лѣтъ.

Книга Бишофа: Die Wärmelehre des Jnneren unseres Planeten [1]) посвящена вопросу распредѣленія геоизотермовъ въ зависимости отъ неровностей рельефа, отъ физическихъ свойствъ породъ и т. д.

Фэй въ своихъ статьяхъ обращаетъ вниманіе на то, что области, залегающія подъ дномъ моря должны быть болѣе охлаждены, чѣмъ области, залегающія подъ сушею. Лаппаранъ [2]) указываетъ на то, что полярныя области несомнѣнно болѣе охлаждены, чѣмъ экваторіальныя.

Другія работы, какъ Дрыгальскаго, Фишера и др. суть только спеціальныя приложенія изслѣдованій вышеуказанныхъ авторовъ. О работѣ Дрыгальскаго я имѣлъ случай говорить въ первой части этой работы (стр. 22), о работахъ Фишера въ нѣсколькихъ мѣстахъ второй части. Гэмпель [3]) только доказываетъ, что формулы Томсона точно выражаютъ температуры при взятыхъ во вниманіе условіяхъ.

Опыты Бишофа [4]) надъ базальтовыми шарами были произведены въ условіяхъ, сходныхъ съ условіями Томсона, поэтому не удивительно, что они не противорѣчатъ его выводамъ.

---

¹) Leipzig. 1837.

²) Статьи Фэя и Лаппарана въ Comptes Rendus и Revue Scientifique за 1886 годъ.

³) Ueber den Wärmezustand der Erde Arch. Math. и Phys. 65 томъ стр. 337.

⁴) G. Bischof. Gesetz der Temperaturzunahme nach dem Erdinneren Ann. Phys. u. Chem. 35 Band. стр. 209.

О предѣлахъ атмосферы.

М. П. Рудскаго.

(Sur les limites de l'atmosphère).

M. P. Rudski.

Чаще всего въ книгахъ, посвященныхъ теоретической метеорологіи встрѣчаемъ мнѣніе, что атмосфера имѣетъ верхній предѣлъ, хотя рядомъ съ этимъ мнѣніемъ встрѣчаемъ и другое, именно, что атмосфера не имѣетъ верхняго предѣла. Положительныхъ фактическихъ данныхъ, говорящихъ въ пользу того или другого мнѣнія нѣтъ.

Изъ наблюденій надъ сѣвернымъ сіяніемъ Ліе заключаетъ, что высота атмосферы не меньше 400 километровъ. Скіапарелли замѣчаетъ, что метеориты начинаютъ блестѣть на высотахъ больше 200 километровъ. Это указываетъ на присутствіе воздуха. Метеоритъ накаливается отъ тренія о воздухъ и начинаетъ издавать свѣтъ.

Съ другой стороны въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ до сихъ поръ неудалось подмѣтить вліянія сопротивленія среды. Слѣдуетъ однако замѣтить, что это не составляетъ доказательства, такъ какъ въ очень разрѣженной средѣ замѣтныя измѣненія въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ быть можетъ требуютъ гораздо большаго времени, чѣмъ то время, за которое имѣются точныя астрономическія наблюденія.

А. Риттеръ [1]) пытался опредѣлить высоту атмосферы на основаніи слѣдующаго принципа. Работа нужная для того, что-

---

[1]) Ritter. Anwendungen der mech. Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Hannover 1879 г.

бы перевести единицу массы воздуха отъ предѣла атмосферы до поверхности земли эквивалентна тому количеству теплоты, которое заключается въ такой-же самой массѣ воздуха, находящейся у поверхности земли. Онъ находитъ, что атмосфера совершеннаго газа, находящагося въ адіабатномъ состояніи должна имѣть высоту $27^1/_2$ километровъ. Но, измѣняя условія, [именно устраняя гипотезу, что газъ есть совершенный] онъ получаетъ для земной атмосферы высоту слишкомъ въ десять разъ большую.

Но, кажется мнѣ, принципъ Риттера не выдерживаетъ критики. Онъ справедливъ только для атмосферы, находящейся въ адіабатномъ состояніи. Если н. п. подымать единицу массы газа все выше и выше, съ условіемъ, чтобы она находилась въ адіабатномъ состояніи, то ея температура на данной высотѣ вообще окажется неравной температурѣ окружающаго воздуха. Наша атмосфера не находится въ адіабатномъ состояніи, она получаетъ солнечную теплоту и теряетъ ее вслѣдствіе лучеиспусканія [1]). Весьма легко представить себѣ въ высокихъ слояхъ атмосферы такое равновѣсіе между утратой теплоты и нагрѣваніемъ отъ солнечныхъ лучей, что повышеніе температуры въ различныхъ уровняхъ совсѣмъ незначительно.

Изъ уравненія [2]) равновѣсія атмосферы нельзя вывести никакихъ заключеній относительно ея предѣловъ точно такъ, какъ изъ выраженія потенціала притяженія внутри тѣла нельзя вывести заключеній относительно разстоянія его поверхности отъ центра.

---

[1]) См. Abbe. Atmospherie Radiation of Heat. Amer. Journ. of Science 1892 г. Май. По Траберту килограммъ воздуха теряетъ ежечасно путемъ лучеиспусканія 0,032—0,036 калорій.

[2]) Уравненіе равновѣсія газа со вниманіемъ на собственную аттракцію его частицъ найдено Громекою: Нѣкоторые случаи равновѣсія совершеннаго газа. Казань 1886 г. В. Томсономъ. Equilibrium of a gas under ist own Gravitation. Phil. Mag. 5 ser. 23 томъ стр. 287 и Риттеромъ. Wied. Ann. 1882 г.

Такъ н. п. Маскаръ [1]) допускаетъ, что атмосфера имѣетъ предѣлъ, а потомъ старается опредѣлить форму функціи, удовлетворяющей дифференціальному уравненію равновѣсія атмосферы. Громека [2]) дѣлаетъ предположеніе, что температура постоянна во всемъ междупланетномъ пространствѣ. Но такое предположеніе очевидно равносильно предположенію, что газъ заполняетъ [3]) все пространство. Поэтому неудивительно, что Громека пришелъ къ заключенію, что количество газа должно быть безконечно велико, иначе даже въ поверхности земли его плотность будетъ безконечно малая. Очевидно подобный результатъ показываетъ, что атмосфера неимѣетъ предѣла.

Температура воздуха на высотѣ нѣсколькихъ сотъ километровъ надъ поверхностью земли неизвѣстна, но во всякомъ случаѣ весьма низка [4]). Съ другой стороны Ольшевскій [5]) утверждаетъ, что при — 220°С. даже при давленіи въ 4 мм. воздухъ остается жидкимъ и прозрачнымъ. Слѣдовательно, на далекомъ разстояніи отъ поверхности земли неисключена возможность присутствія жидкаго воздуха или жидкаго кислорода и азота, какъ полагаетъ Риттеръ [6]). Но еслибы даже жидкій воздухъ составлялъ нѣкоторую плёнку вокругъ земной атмос-

---

[1]) Journ. de Physique 1892 г. Майская книжка.

[2]) Loc. cit.

[3]) Это явствуетъ изъ уравненія:

$$pv = kT$$

где p давленіе газа
v объемъ »
T абсол. температура газа.

[4]) Фрэлихъ (Fröhlich Repert. für Meteor. VI томъ) опытнымъ путемъ нашелъ—127°С. и —131°С.

[5]) Handbuch der Anorganischen Chemie Dammer. Stuttgart. 1892 г.

[6]) Anwendungen etc.... стр. 9.

Извѣстно, что на основаніи наблюденій воздухоплавателя Глешера Менделѣевъ пытался опредѣлить отношеніе между измѣненіемъ температуры и давленіемъ по мѣрѣ повышенія. Онъ допускаетъ нѣкоторую неопредѣленность относительно границъ атмосферы. Ср. Воейковъ Климаты земного шара. С.-Пет. 1884 г. стр. 269.

феры, то, приходящій снизу газъ, можетъ легко разорвать подобную плёнку и уйти далеко за ея предѣлы. Я говорю о подходящемъ снизу газѣ, ибо нѣтъ сомнѣнія, что даже на самыхъ большихъ высотахъ происходятъ нѣкоторыя движенія.

Изъ кинетической теоріи газовъ можно вывести послѣдствія, бросающія нѣкоторый свѣтъ на занимающій насъ вопросъ. Согласно этой теоріи въ данномъ объемѣ газа при какой угодно температурѣ имѣются частицы, обладающія различными поступательными скоростями, начиная отъ весьма небольшихъ до самыхъ огромныхъ [у совершеннаго газа отъ 0 до ∞].

При высокой температурѣ процентъ частицъ, обладающихъ большой поступательной скоростью больше, при низкой меньше, но всегда есть нѣкоторый процентъ частицъ, обладающихъ очень большой поступательной скоростью.

Съ другой стороны извѣстно, что, еслибъ не треніе, то тѣло, обладающее у поверхности земли первоначальной скоростью въ направленіи радіуса, большей, чѣмъ $\sqrt{2ga}$ [гдѣ g есть ускореніе силою тяжести, a радіусъ земли] можетъ удалиться отъ земли на безконечное разстояніе.—Поэтому, если въ извѣстномъ объемѣ воздуха есть частицы, обладающія поступательной скоростью по направленію радіуса, превышающей какихъ нибудь 11200 метровъ въ секунду, то непремѣнно многія изъ нихъ, уйдутъ на безконечное разстояніе отъ земли.

Въ болѣе высокихъ сферахъ атмосферы нужна даже меньшая поступательная скорость для того, чтобы частица навсегда удалилась отъ земли.

Къ тому слѣдуетъ прибавить, что центробѣжная сила способствуетъ удаленію частицъ отъ земли [1]) и что на извѣстномъ разстояніи онѣ попадаютъ въ область, гдѣ притяженіе другихъ тѣлъ солнечной системы преобладаетъ надъ притяженіемъ земли.

---

[1]) Лапласъ полагалъ, что атмосфера земли оканчивается только тамъ, гдѣ центробѣжная сила уравновѣшиваетъ притяженіе. Объ этомъ будетъ рѣчь дальше. *Прим. авт.*

Такимъ образомъ между нашей атмосферой и междупланетнымъ пространствомъ долженъ происходить постоянный обмѣнъ частицъ [1]):

Междупланетное пространство все выполнено крайне разрѣженнымъ воздухомъ. Тѣла солнечной системы суть только центры сгущенія атмосферы.

Но разъ происходитъ обмѣнъ газовъ между нашей атмосферой и междупланетнымъ пространствомъ, то этотъ обмѣнъ можетъ въ годичномъ балансѣ давать потерю или прибыль. Другими словами состояніе нашей атмосферы по всей вѣроятности не есть стаціонарное. Давленіе, плотность у поверхности земли, даже составъ атмосферы подвержены вѣковымъ измѣненіямъ. Быть можетъ, что атмосфера потому отсутствуетъ на лунѣ, что она уже лишилась своего воздуха главнымъ образомъ въ пользу земли, какъ ближайшаго, да притомъ сравнительно съ луной, гораздо большаго тѣла.

Коль скоро нѣтъ внѣшней свободной поверхности, то нѣтъ условія, чтобы линіи токовъ лежали въ этой свободной поверхности. Такимъ образомъ дѣлаются возможными многіе виды движеній, которые не согласуются съ вышеупомянутымъ условіемъ.

---

[1]) Этотъ обмѣнъ весьма медленный. Процентъ частицъ, способныхъ улетѣть на безконечное разстояніе выражается стомилліонными долями. Такъ н. п. въ кислородѣ при 0° и 760 mm. давленія частицъ, обладающихъ скоростью по направленію радіуса земли [да притомъ отъ земли наружу] большей, чѣмъ 804 метра въ секунду всего 219 на 10000 [немногимъ больше, какъ одна на 500]. Между тѣмъ улетѣть могутъ только тѣ, у которыхъ, направленная наружу радіяльная скорость больше, чѣмъ 11200 метровъ въ секунду. Я потому не привожу точныхъ чиселъ, указывающихъ интересующій насъ процентъ частицъ, что таблицы Крампова интеграла, встрѣчающагося при вычисленіи этого процента даже не содержатъ соотвѣтственныхъ аргументовъ. Этотъ процентъ вычисляется изъ формулы.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\int_{11{,}200}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{\alpha^2}} d\omega,$$

гдѣ α при 0°C и 760 миллиметрахъ давленія равно 397.

Если воздушный Океанъ состоитъ изъ опредѣленнаго конечнаго количества газа, то само собою очевидно, что онъ долженъ двигаться вмѣстѣ съ землею такъ, какъ движутся водяные Океаны т. е., упустивъ изъ виду разныя теченія, какъ часть твердаго тѣла.

Не то въ случаѣ, когда атмосфера безпредѣльная. Воздухъ, чѣмъ дальше отъ поверхности земли, тѣмъ больше отстаетъ отъ ея движенія.

Разсмотримъ сначала вращательное движеніе земли и воздуха. Тогда вопросъ сводится къ задачѣ о вращательномъ движеніи шара въ безконечной жидкости.

Притомъ можно сдѣлать слѣдующія предположенія:

1) Что движеніе стаціонарно. Это неточно, но близко къ истинѣ, такъ какъ вѣковыя измѣненія состоянія атмосферы весьма медленны.

2) Что существуетъ только вращательное движеніе.

3) Что у самой поверхности шара воздухъ вполнѣ увлекается его движеніемъ. Хотя бы коэффиціентъ тренія воздуха о поверхность земли былъ самый незначительный, то послѣ продолжительнаго вращенія слой воздуха непосредственно прикасающійся къ поверхности шара, долженъ пріобрѣсть ея скорость.

Уравненія движенія въ сферическихъ координатахъ суть слѣдующія: [1])

---

[1]) Ср. Whitehead. Second appr. to viscous fluid motion Quart. Journ. XXIII. 1889 г. стр. 145. Эти уравненія вѣрны, хотя вообще работа Уайтгэда довольно слаба. Первая часть въ томъ-же самомъ томѣ Quart. Journ. содержитъ рѣшеніе интересующей насъ задачи для несжимаемой жидкости. Однако рѣшеніе невѣрно. Вопервыхъ Уайтгэдъ говоритъ, что рѣшеніе вѣрно только въ такомъ случаѣ, когда пренебрегаемъ квадратами скоростей. Между тѣмъ когда $u = v = o$, это есть строгое рѣшеніе. Во вторыхъ онъ приходитъ къ результату (loc. cit. стр. 91), что при условіи, чтобы въ поверхности шара жидкость прилипала къ шару, скорости u и v не могутъ быть равны нулю. Это тоже ложно. Уайтгэдъ ссылается на Стокеса [Mathem. and Phys. papers Cambr. 1880 Vol. I стр. 103] но Стокесъ имѣлъ въ виду другой видъ движенія. Вѣрное рѣшеніе находится у Д. Эдуардса: D. Edwardes Steady motion of a viscous fluid in which.... Quart. Journ. 1892 года стр. 75.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-2(v\zeta-w\eta)=-\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}+\frac{\zeta \cot\theta}{r}-\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial \eta}{\partial \phi}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}.\frac{\partial \delta}{\partial r}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}-2(w\xi-u\zeta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial \xi}{\partial \phi}-\frac{\partial \zeta}{\partial r}-\frac{\zeta}{r}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}\frac{\partial \delta}{r\partial \theta}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}-2(u\eta-v\xi)=-\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial P}{\partial \phi}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}+\frac{\eta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}.\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial \delta}{\partial \phi}
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial r}+v\frac{\partial \rho}{r\partial \theta}+\frac{w}{r\sin\theta}.\frac{\partial \rho}{\partial \phi}+\rho\delta=0\dots\quad \text{V}$$

$$\delta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\operatorname{cotg}\theta.\frac{v}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial w}{\partial \phi}\quad \text{VI}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\xi&=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{w\operatorname{cotg}\theta}{r}-\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial v}{\partial \phi}\\
2\eta&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\\
2\zeta&=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}\right\}\ \text{VII}$$

Здѣсь r обозначаетъ растояніе отъ центра шара.

θ .... угловое разстояніе отъ сѣверной (положительной) части полярной оси.

ϕ .... географическую долготу.

$u=\frac{dr}{dt}$...... скорость по направленіи радіуса.

$v = r.\frac{d\theta}{dt}$ .... увеличивающагося угла θ

$w = r\sin\theta.\frac{d\phi}{dt}$ .... угла ϕ

ξ, η, ζ суть слагающія вихреваго движенія вокругъ осей параллельныхъ тремъ главнымъ направленіямъ.

ρ обозначаетъ плотность жидкости.

μ коэффиціентъ [1]) внутренняго тренія.

$$P = \frac{1}{2}\left(v^2 + u^2 + w^2\right) + \int\frac{dp}{\rho} - V$$

гдѣ p обозначаетъ давленіе

V .... потенціалъ внѣшнихъ силъ (въ данномъ случаѣ притяженія).

Изъ самаго характера разсматриваемаго движенія слѣдуетъ, что всѣ входящія сюда функціи независятъ отъ угла ϕ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ вводимъ вышеуказанныя предположенія, что движеніе стаціонарно и что:

$$u = v = 0$$

Тогда уравненіе непрерывности оказывается удовлетворено тождественнымъ образомъ. Потомъ: (ур. VI)

$$\delta = 0$$

т. е. нѣтъ расширенія вдоль струекъ, что само собою очевидно, такъ какъ жидкость течетъ по кругамъ, имѣющимъ центръ на полярной оси. Дальше:

---

[1]) Уравненія, которыми пользуемся суть общепринятыя уравненія Стокса. Онѣ до нѣкоторой степени только приблизительныя. Ср. Hicks. Recent progress in Hydrodynamics. Report. Brit. Ass. for. 1881 г. стр. 80.

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ 2\xi &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\frac{cotg\,\theta}{r} \\ 2\eta &= -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \end{aligned}\right\} \text{VII bis}$$

$$\left.\begin{aligned} 2w\eta &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ 2w\xi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{IV bis}$$

Послѣднее уравненіе, послѣ подставленія значеній для ξ и η изъ уравненій: VII bis принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(wr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(w\,sin\,\theta)\right] = 0$$

Это послѣднее уравненіе приводится сейчасъ къ уравненію Лапласа.

Общій его интегралъ есть слѣдующій:

$$w = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n.1.2...n.} \frac{d^{n+1}(q^2-1)^n}{dq^{n+1}} . \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right]$$

Здѣсь $n = 0, 1, 2, \ldots \ldots$

A_n и B_n суть постоянные коэффиціенты.

$q = cos\,\theta$.

Введемъ теперь условіе: 3.,, чтобы скорость жидкости въ поверхности шара равнялась скорости точекъ самой поверхности.

Послѣдняя скорость будетъ:

$$\omega . a . sin\,\theta$$

гдѣ ω обозначаетъ угловую скорость вращенія земли

a — средній радіусъ.

Тогда оказывается, что всѣ постоянныя A_n и B_n должны быть равны нулю, кромѣ A_1 и B_1 и условное уравненіе сводится къ слѣдующему:

$$\omega a = \left[A_1 a + \frac{B_1}{a^2}\right] \qquad \text{VIII}$$

Если положить, что $B_1 = 0$, тогда вся жидкость вращается съ землею какъ твердое тѣло. Если оставить A_1 и B_1 то, хотя жидкость отстаетъ отъ движенія земли, всетаки въ выраженія скорости жидкости будетъ членъ, увеличивающійся вмѣстѣ съ разстояніемъ отъ центра. И въ томъ и другомъ случаѣ скорость жидкости на безконечномъ разстояніи безконечно большая. Очевидно, земля, увлекая воздухъ въ своемъ движеніи, не можетъ возбудить безконечныхъ скоростей на безконечномъ разстояніи. Слѣдовательно единственное возможное рѣшеніе есть то, въ которомъ

$$A_1 = 0$$
$$B_1 = \omega a^3$$

А потому:

$$w = \frac{\omega \,.\, a^3}{r^2} . \sin\theta \qquad \text{IX}$$

Изъ этого рѣшенія вытекаютъ нѣкоторыя интересныя слѣдствія. Если возьмемъ то рѣшеніе, въ которомъ $B_1 = 0$, $A_1 > 0$ т. е. если предположимъ, что воздухъ вращается съ землею, какъ твердое тѣло, то относительно земли атмосфера будетъ въ состояніи совершеннаго покоя. Тогда очевидно (ур. VIII).

$$A_1 = \omega, \quad w = r\omega \sin\theta$$

Изъ уравн. VII bis получаемъ:

$$\xi = \omega \cos\theta$$
$$\eta = -\omega \sin\theta$$

Слѣдовательно:

$$2w\eta = -2\omega^2 r \sin^2\theta$$
$$2w\xi = 2\omega^2 r \cos\theta \sin\theta$$

Тогда изъ IV bis:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega^2 r \sin^2\theta = \frac{\partial}{\partial r}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta) .$$
$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega^2 r^2 \cos\theta \sin\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta)$$

Слѣдовательно, вспомнивъ значеніе P.

$$\omega^2 r^2 \sin^2\theta = \int\frac{dp}{\rho} - V + \frac{w^2}{2}$$

но $w = \omega r \sin\theta$, слѣдовательно:

$$V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin\theta = \int\frac{dp}{\rho}$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} + \omega^2 r^2 \sin^2\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{X}$$
$$\frac{\partial V}{\partial\theta} + \omega^2 r^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

Такъ какъ V выражаетъ потенціалъ притяженія[1]), то мы получили извѣстное уравненіе для равновѣсія газа, окружающаго шаръ причемъ:

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

есть потенціалъ мнимой центробѣжной силы.

---

[1]) Строго говоря, подъ V слѣдуетъ подразумѣвать нетолько потенціалъ притяженія земли, но и притяженія однѣхъ частицъ газа на другія.

Возьмемъ теперь наше болѣе соотвѣтствующее дѣйствительности рѣшеніе:

$$w = \frac{\omega . a^3}{r^2} \sin \theta$$

Поступая совершенно такъ, какъ въ прежнемъ случаѣ, получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6 . \omega^2}{r^5} \sin^2\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{a^6 . \omega^2}{r^4} \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \quad XI$$

Изъ которыхъ сейчасъ видно, что на дѣлѣ нѣтъ никакого потенціала центробѣжной силы.

Но въ болѣе удаленныхъ слояхъ атмосферы слагающія центробѣжной силы несравненно меньше. Въ первомъ случаѣ онѣ возрастаютъ по мѣрѣ удаленія отъ земли, здѣсь-же онѣ уменьшаются.

Нетрудно убѣдиться, что величина: $\frac{\partial p}{\partial r}$ постоянно отрицательная. Для того, чтобы она могла измѣнить знакъ, нужно чтобы:

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6 \omega^2}{r^5} \sin^2\theta = 0$$

Возьмемъ во вниманіе только притяженіе земли, тогда

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{g . a^2}{r^2}$$

но, какъ извѣстно, $g = 289 . \omega^2 a$ (приблизительно), слѣдовательно послѣднее уравненіе можно написать подъ видомъ.

$$\frac{a^3}{r^3} \sin^2\theta = 289.$$

Очевидно, корень его даже на экваторѣ меньше, чѣмъ a, а потому внѣ шара: $\frac{\partial p}{\partial r}$ постоянно отрицательно. Поверхность Лапласа [1]) не существуетъ, приращеніе давленія газа всюду направлено къ землѣ. Оно измѣняетъ направленіе только тамъ, гдѣ притяженіе другихъ небесныхъ тѣлъ преобладаетъ надъ притяженіемъ земли.

Разсматривая вторую изъ формулъ XI [1]) замѣчаемъ, что зависящая отъ географической широты слагающая центробѣжной силы слабѣетъ по мѣрѣ удаленія отъ земли.

При помощи формулы IX нетрудно вычислить отставаніе воздуха противъ движенія земли. Такъ н. п. надъ экваторомъ на высотѣ $6\frac{1}{2}$ килом. воздухъ отстаетъ приблизительно на одинъ метръ въ секунду.

До сихъ поръ мы брали во вниманіе только вращательное движеніе земли. Теперь слѣдуетъ взять во вниманіе поступательное движеніе. Собственно говоря, слѣдовалобы взять во вниманіе поступательное движеніе вмѣстѣ съ вращательнымъ, но къ сожалѣнію даже рѣшеніе задачи о движеніи вязкой жидкости, въ которой находится эллипсоидъ или шаръ, обладающій поступательнымъ движеніемъ, дается только тогда [3]),

---

[1]) Гдѣ центробѣжная сила уравновѣшиваетъ притяженіе.

[2]) Формулы наши не совсѣмъ точны для поверхности земли, такъ какъ поверхность шара не есть эквипотенціальная поверхность. Поэтому, желая получать болѣе точныя формулы, слѣдуетъ вмѣсто шара взять эллипсоидъ, а потомъ ввести условіе, чтобы поверхность эллипсоида была эквипотенціальная поверхность. Задача о вращеніи эллипсоида въ жидкости находится у Эдвардса. D. Edwardes. Steady motion of a viscous fluid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axis. Quart. Journ. 1892 г. стр. 70.

[3]) См. Oberbeck. Ueber stat. Flüssigkeitsbewegungen. Crelle LXXXI 1876 г. стр. 62.

когда пренебрегаемъ квадратами скоростей, а потому результаты получаются неточные.

При поступательномъ движеніи шара давленіе должно быть нѣсколько больше впереди, чѣмъ позади его [1]).

Поэтому вслѣдствіе поступательнаго движенія земли на той сторонѣ ея, которая въ данный моментъ находится впереди (по отношенію къ движенію по орбитѣ) долженъ оказаться нѣкоторый небольшой излишекъ давленія, на противуположной нѣкоторое уменьшеніе давленія.

Такимъ образомъ является вопросъ, не находится ли это явленіе въ связи съ двойнымъ суточнымъ колебаніемъ барометра.

Очевидно только что указанная механическая причина измѣненій давленія имѣетъ своимъ періодомъ сутки точно такъ, какъ термическая причина т. е. нагрѣваніе солнцемъ. Фазы обѣихъ различны, ибо механическая причина должна вызывать свой максимумъ давленія въ 6 часовъ утра, а минимумъ въ 6 часовъ вечера, (приблизительно) термическая должна вызывать минимумъ около 2 час. пополудни, а максимумъ недолго до восхода солнца. Смотря по ходу слагающихъ колебаній, результирующее колебаніе можетъ имѣть одинъ или больше максимумовъ и минимумовъ въ продолженіи сутокъ [1]).

Поэтому прежде всего посмотримъ въ какихъ предѣлахъ заключаются колебанія барометра, обусловленныя движеніемъ

---

[1]) Ср. Lamb. Motion of fluids. стр. 225. У Обербека наоборотъ, должно быть вслѣдствіе какой-то ошибки въ знакѣ. Впрочемъ къ выраженію давленія у Обербека [стр. 74 loc. cit.] слѣдуетъ прибавить постоянную.

[2]) Н. п. функція:

$$A\sin^2\theta + B\sin(\alpha + \theta)$$

смотря по значеніямъ коэффиціентовъ A, B и аргумента α можетъ имѣть 3 максимума и 3 минимума, 2 максимума и 2 минимума, или даже (когда $\alpha = o$) одинъ максимумъ и одинъ минимумъ. Между тѣмъ періодъ каждой изъ слагающихъ и результирующей функціи: 2π.

земли. Обербекъ предполагаетъ, что шаръ движется прямолинейно, но такъ какъ діаметръ орбиты въ 23000 разъ больше діаметра земли, то заключенія, слѣдующія изъ задачи Обербека, приложимы къ землѣ.

Согласно Обербеку на экваторѣ:

$$p = Const + \frac{3}{2}\mu . \frac{V}{a} \cos\varphi$$

гдѣ φ обозначаетъ угловое разстояніе отъ прямой, проведенной сквозь центръ земли и ту точку экватора, которая въ данный моментъ находится впереди земли.

V обозначаетъ поступательную скорость земли по орбитѣ

a радіусъ земли

$$\mu = 0{,}134\rho$$ [1].

μ выражено въ сантим. и секундахъ.

Если теперь сдѣлаемъ вычисленіе такъ, чтобы получить сразу давленіе въ миллиметрахъ ртути [2]), то найдемъ, что колебанія барометра, вызываемыя этой механической причиной выражаются дробью, которой числитель есть единица, а знаменатель число, состоящее изъ 14 знаковъ. Замѣтимъ, что въ задачѣ Обербека разсматривается жидкость несжимаемая, которой плотность постоянна, а потому вышеуказанная амплитуда колебаній барометра, обусловленныхъ поступательнымъ движеніемъ земли, составляетъ для нашей атмосферы верхній предѣлъ.

Въ разсматриваемыхъ выше задачахъ мы упустили изъ виду притяженіе другихъ тѣлъ солнечной системы. Но извѣст-

---

[1]) Helmholtz Ueber Atm. Bew. Sitzb. Akad. Wiss. Berlin. 1888 г. стр. 649.

[2]) Въ такомъ случаѣ плотность: $\rho = \frac{760}{ga}$

гдѣ g = 9,81 метрамъ въ секунду
a = 6370000 метрамъ.

но, что это притяженіе оказываетъ малое вліяніе на наиболѣе интересующіе насъ нижніе слои атмосферы, точно также отставаніе воздуха въ этихъ слояхъ незначительно

Впрочемъ мы можемъ съ нѣкоторой увѣренностью разсуждать только о нижнихъ слояхъ атмосферы.

Хотя наши рѣшенія были вполнѣ строги, но мы не имѣемъ увѣренности, что это движеніе устойчиво. Еслибы оно оказалось неустойчивымъ, тогда наши результаты относительно отставанія воздуха и т. д. будутъ *качественно*, но не *количественно* справедливы. Насколько кажется, отставаніе въ такомъ случаѣ будетъ еще больше.

Мы принуждены пока оставить этотъ вопросъ въ сторонѣ, такъ какъ устойчивость движенія есть вопросъ только недавно поставленный на очереди и далеко еще не разработанный полностью.

М. П. Рудскій.



Антитермы изопіестическихъ и изометрическихъ процессовъ совершенныхъ газовъ.

Н. Умовъ.

(Antithermen der isopiestischen und isometrischen Processe vollkommener Gase).

N. Umow.

---

1. Пусть v, p, t означаютъ объемъ, давленіе и абсолютную температуру единицы массы совершеннаго газа, c_p и c_v удѣльныя теплоемкости при постоянномъ давленіи и постоянномъ объемѣ, выраженныя въ терміяхъ.

Вообще принимается, что количество тепла

$$c_p dt \text{ и } c_v dt \tag{I}$$

приводятся газу только въ двухъ вполнѣ опредѣленныхъ процессахъ — первое въ процессѣ изопіестическомъ, второе — въ процессѣ изометрическомъ.

Здѣсь будетъ показано, что существуютъ еще другіе процессы, въ которыхъ подводимыя газу количества теплоты, представляются тѣми-же выраженіями (I).

Въ діаграммѣ (p, v) эти процессы изобразятся кривыми линіями, которыя я назову *антитермами*; изопіестическіе и изометрическіе процессы въ той-же діаграммѣ представляются, какъ извѣстно, взаимно-перпендикулярными прямыми.

Различіе между обоего рода процессами состоитъ въ томъ, что разумѣя подъ выраженіями (1) абсолютныя величины количествъ тепла, эти послѣднія

приводятся:

изопіестически }
изометрически } при возрастающей температурѣ,

антитермически – при убывающей температурѣ;

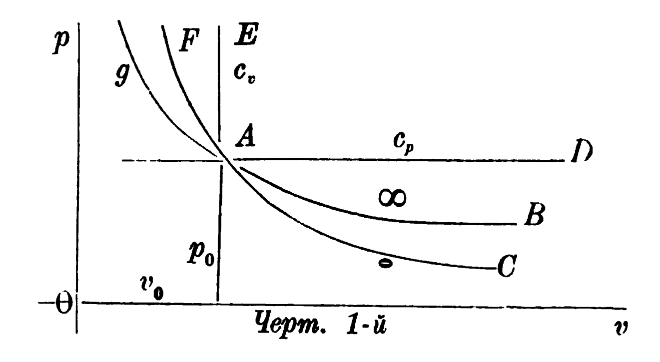
отводятся:

изопіестически }
изометрически } при убывающей температурѣ;

антитермически—при возрастающей температурѣ.

Вообще—каждому обращаемому процессу соотвѣтствуетъ *антитермическій*.

Мы приходимъ всего проще къ доказательству существованія подобныхъ процессовъ слѣдующимъ разсужденіемъ.



Черт. 1-й

На діаграммѣ (p, v) черт. 1, проведемъ черезъ точку A (p_0, v_0) изетерму GAB, изентропу FAC, изопіесту AD и изометру AE.

Пусть δQ означаетъ въ терміяхъ количество тепла, которое сообщается газу въ нѣкоторомъ обращаемомъ процессѣ при измѣненіи его температуры на δt. Отношеніе

$$Z = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

представитъ удѣльную теплоту газа въ данномъ процессѣ и для даннаго состоянія. Будемъ считать подводимое тепло положительнымъ, и уводимое—отрицательнымъ.

Въ части плоскости $(p\ v)$, лежащей между изентропой FC и безконечностью, теплота приводится тѣлу въ каждомъ процессѣ, который, исходя изъ состоянія A, продолжается въ ∞ при постоянномъ расширеніи или при постоянномъ сокращеніи объема тѣла. Въ этомъ смыслѣ, въ указанной части плоскости, δQ—положительно.

Для этихъ же процессовъ δt будетъ положительно въ области $FADAB$ и отрицательно въ области BAC. Въ первой, или *внѣшней* области, величины z возрастаютъ отъ нуля на изентропѣ AF черезъ значенія c_v, c_p, до $+\infty$ на изотермѣ AB. Во второй, внутренней области, величина z отрицательна и имѣетъ всѣ значенія отъ $-\infty$ вблизи изотермы AB до нуля на изентропѣ AC. По этому каждому значенію $+z$ во внѣшней области, соотвѣствуетъ значеніе $-z$ во внутренней. Такъ какъ значенія dt въ обоихъ областяхъ имѣютъ также противуположные знаки, то подведенное количество тепла для *термы* во внѣшней области будетъ имѣть ту же величину какъ и на *антитермѣ* для внутренней.

2. Найдемъ теперь уравненіе антитермы изопіесты. Мы имѣемъ:

$$\delta Q = c_v dt + p dv \qquad (1)$$

Для искомой антитермы:

$$\delta Q = - c_p dt$$

и, кромѣ того,

$$dt = \frac{1}{R}(pdv + vdp), \quad \frac{c_p - c_v}{R} = 1.$$

Полагая еще

$$\frac{2c_p}{R} = \alpha \qquad (2)$$

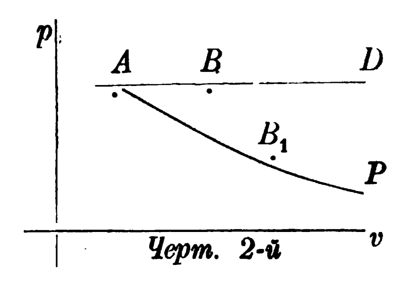
получаемъ

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\alpha p}{(\alpha - 1)v} \qquad (3)$$

откуда, интегрируя, находимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha-1} = 1 \\ \frac{v}{v_0} \quad \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha-1} = 1 \\ \frac{p}{p_0} \quad \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha} = 1 \end{array}\right\} \qquad (I)$$

гдѣ v_0, p_0, t_0 соотвѣтствуютъ нѣкоторой точкѣ антитермы.



Черт. 2-й

Проведемъ черезъ точку A (v_0, p_0, t_0) антитермы AP—изопіесту AD (*черт. 2-й*).

Разность температуръ въ точкахъ B и A изопіесты пусть будетъ $t'_0 - t_0$; на антитермѣ AP существуетъ такая точка B_1, что разность температуръ состояній A и B_1, т. е. $t_0 - t$,

равна разности температуръ въ B и A, или

$$t'_0 - t_0 = t_0 - t, \text{ откуда } t = 2t_0 - t'_0. \tag{4}$$

Я назову точки B и B_1 *соотвѣтственными* и изъ нихъ B—*основною точкою;* точку A я назову *начальною* точкою. Пути AB и AB_1 будутъ *соотвѣтственными.*

И такъ:

1) *Температура начальной точки есть средняя ариѳметическая температуръ соотвѣтственныхъ точекъ.*

2) *Количества тепла, подведенныя на соотвѣтственныхъ путяхъ, другъ другу равны.*

Мы имѣемъ по закону Шарля и Бойля

$$\frac{t}{t_0} = 2 - \frac{t'_0}{t_0} = 2 - \frac{v'_0}{v_0} \dots\dots\dots \tag{5}$$

слѣдовательно по (1) и (5) положеніе соотвѣтственной точки представится по положенію основной—уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0\left(2 - \frac{v'_0}{v_0}\right)^{\alpha} \\ v &= v_0 \frac{1}{\left(2 - \frac{v'_0}{v_0}\right)^{\alpha-1}} \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Отсюда вытекаетъ, что основной точкѣ $v'_0 = 2v_0$ соотвѣтствуетъ на антитермѣ—точка безконечно удаленная.

Представивъ себѣ цѣлую систему изопіестъ и на нихъ начальныя и основныя точки, уравненія (II) приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *если начальныя и основныя точки лежатъ на прямыхъ* ($v_0 = const$, $v'_0 = const.$) *перпендикулярныхъ оси абсциссъ,*

соотвѣтственныя точки лежатъ на такомъ же перпендикулярѣ. (v=*const.*)

2) *Прямыя, соединяющія начальныя точки съ соотвѣтственными, пересѣкаются въ одной точкѣ оси абсциссъ* (ибо $\frac{p}{p_0}$ будетъ тоже *const.*).

Эти свойства даютъ намъ возможность по одной антитермѣ изопіесты начертить остальныя.

Одной основной точкѣ, взятой на какой нибудь изопіестѣ, мы можемъ подъискать рядъ соотвѣтственныхъ точекъ на антитермахъ, пересѣкающихъ данную изопіесту. Эти соотвѣтственныя точки образуютъ кривую, простирающуюся въ безконечность: я назову ее — *соотвѣтственной кривой.* Мы получаемъ дифференціяльное уравненіе этой кривой, дифференцируя соотношенія (II) по v_0, такъ какъ p_0, v'_0, t'_0 остаются неизмѣнными, а мѣняется положеніе начальной точки на данной изопіестѣ. Съ помощью ур. (I) мы исключимъ v_0 изъ отношенія $\frac{\delta p}{\delta v}$ и получимъ:

$$\frac{2\,\delta p}{\alpha\, p^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} = \frac{t'_0}{p_0^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{\delta t}{t^2}$$

Такъ какъ основная точка (p_0, v'_0, t'_0) лежитъ тоже на искомой кривой, то интеграціей получаемъ ея уравненіе въ слѣдующихъ видахъ:

$$2\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{t'_0}{t} = 1$$

или (III)

$$2\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{v'_0\, p_0}{v\, p} = 1$$

Эта кривая приближается ассимптотически къ антитермѣ, проходящей черезъ точку p_0, $\frac{v'_0}{2}$.

Означимъ черезъ t_0 температуру точки пересѣченія изопіесты и антитермы; черезъ μ_0 означимъ энтропію въ той же точкѣ. Проведемъ еще изентропу μ_1, сѣкущую первыя двѣ кривыя; пусть t_1 есть температура въ точкѣ пересѣченія изентропы съ изопіестой и t_2 въ точкѣ пересѣченія изентропы съ антитермой.

Мы имѣемъ для изопіесты

$$td\mu = c_p dt,$$

для антитермы

$$td\mu = - c_p dt.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\mu_1 - \mu_0 = c_p log \frac{t_1}{t_0}$$

$$\mu_1 - \mu_0 = - c_p log \frac{t_2}{t_0}.$$

Вычитая, получаемъ:

$$log \frac{t_1 t_2}{t^2_0} = 0$$

или

$$t_0 = \sqrt{t_1 t_2}$$

т. е. *температура въ точкѣ пересѣченія изопіесты и антитермы есть средняя геометрическая температуръ въ точкахъ пересѣченія этихъ кривыхъ съ произвольной изентропой.*

3. Мы можемъ теперь установить уравненія антитермъ для изометрическихъ процессовъ. Пріемомъ, сходнымъ съ вышеизложеннымъ, получимъ искомое уравненіе въ слѣдующихъ видахъ:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha-2}=1$$

$$\frac{v}{v_0}\cdot\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha-2}=1 \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\alpha-1}=1$$

Соотношеніе между соотвѣтственной точкой и основной (v_0, p'_0) дается выраженіями:

$$p=p_0\left(2-\frac{p'_0}{p_0}\right)^{\alpha-1}$$

$$v=v_0\frac{1}{\left(2-\frac{p'_0}{p_0}\right)^{\alpha-2}} \qquad \text{(V)}$$

Уравненіе соотвѣтственной кривой:

$$2\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}}-\frac{p'_0v_0}{pv}=1$$

или (VI)

$$2\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}}-\frac{t'_0}{t_0}=1.$$

Замѣтимъ, что

$$\alpha-2=\frac{2c_r}{R}.$$

4. Для воздуха $\alpha=6{,}8807$; потому черезъ точку $p_0=1$, $v_0=1$, проходятъ слѣдующія кривыя:

изотерма............ $\log p=-\log v$
антитерма изопіесты . $\log p=-1{,}17 \log v$
антитерма изометры .. $\log p=-1{,}205 \log v$
изентропа .... $\log p=-1{,}41 \log v$.

5. Установимъ теперь общее уравненіе антитермы. Будемъ снабжать штрихами величины, относящіяся къ термѣ. Координаты пересѣченіи термы и ея антитермы суть p_0, v_0, t_0.

Мы имѣемъ для термы:

$$\delta Q' = c_v dt' + p' dv';$$

для соотвѣтственнаго элемента антитермы:

$$\delta Q = c_v dt + p dv.$$

По опредѣленію:

$$\delta Q' = \delta Q \ ; \ dt' = - dt$$

и

$$dt = \frac{pdv + vdp}{R},$$

слѣдовательно:

$$\left(\frac{2c_v}{R} + 1\right) pdv + \frac{2c_v}{R} vdp = p'dv' \qquad (1)$$

Соотношенія между p' и v' дается уравненіемъ термы.

Для соотвѣтственныхъ элементовъ

$$t = 2t_0 - t'$$

или, по закону Шарля и Бойля:

$$p = \frac{1}{v} [2t_0 R - p'v']. \qquad (2)$$

Это соотношеніе даетъ намъ возможность исключить изъ конечнаго результата перемѣнную v', такъ какъ произведеніе $p'v'$ есть функція одного v', по уравненію термы.

Исключая dp и p изъ (1) съ помощью (2), мы находимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій дифференціяльное уравненіе антитермы:

$$[2t_0R - p'v']\frac{1}{v}\frac{dv}{dv'} = \frac{2c_v}{R}\frac{d(p'v')}{dv'} + p'$$

и интегрируя:

$$\log\left\{v.\left(2t_0R-p'v'\right)^{\frac{2C_v}{R}}\right\} - \int\frac{p'dv'}{2t_0R-p'v'}=const. \qquad \text{(VII)}$$

Входящій сюда интегралъ мы находимъ пользуясь уравненіемъ термы; затѣмъ, при помощи этого же уравненія и соотношенія (2), исключаемъ изъ (VII) величины p' и v' и получаемъ уравненіе антитермы.

Выраженіе (VII) можно представить еще въ видѣ:

$$\log\left\{v^{\alpha-1}\,p^{\alpha-2}\right\} - \int\frac{p'dv'}{2p_0v_0-p'v'} = const. \qquad \text{(VIII)}$$

Одесса
Ноябрь 1892 г.

Къ физикѣ системы, имѣющей перемѣнное движеніе.

Н. Любимова.

Различіе двухъ состояній,—покоя и движенія, ничѣмъ не обозначается въ тѣлѣ, если движеніе свершается равномѣрно и прямолинейно. Матерія сама по себѣ индифферентна къ покою и движенію. Матеріальная точка не носитъ въ себѣ причины измѣненія своего состоянія. Требуется дѣйствіе извнѣ, чтобы измѣненіе это послѣдовало и матеріальная точка отклонилась отъ прямолинейности пути или получила приращеніе скорости (положительное или отрицательное).

Абсолютнаго покоя мы не знаемъ въ природѣ. Всѣ матеріальныя точки природы находятся въ движеніи и всѣ физическія явленія суть измѣненія этихъ движеній. И притомъ именно *измѣненія*, такъ какъ движеніе само по себѣ физическаго признака не имѣетъ.

Сказанное объ одной матеріальной точкѣ примѣнимо къ каждой совокупности ихъ, которую можно разсматривать, какъ отдѣльное цѣлое, составляющее механическую систему. Общее всѣмъ этимъ точкамъ прямолинейное и равномѣрное движеніе ничѣмъ физическимъ себя не обнаруживаетъ. Тѣ же движенія въ системѣ, которыя происходятъ отъ взаимодѣйствія матеріальны хъточекъ, ее составляющихъ, происходятъ такъ, какъ если-

бы система была въ покоѣ. Безъ внѣшнихъ указаній, геометрически свидѣтельствующихъ о перемѣщеніи, разумное существо, заключенное въ системѣ, общее движеніе которой прямолинейно и равномѣрно,—какимъ-бы проницательнымъ умомъ ни обладало—не могло бы открыть признака этого общаго движенія системы, увлекающаго и его и все его окружающее въ системѣ. Такой законъ движенія, указанный Галилеемъ и со времени Ньютона именуемый вторымъ закономъ движенія, подтверждается наблюденіями въ кораблѣ, вагонѣ и иныхъ системахъ.

Не то бываетъ, если общее движеніе системы перемѣнное. Такое движеніе обнаруживаетъ себя физически. Въ такомъ случаѣ нельзя уже сказать, что взаимодѣйствія матеріальныхъ точекъ, составляющихъ систему, происходятъ такъ, какъ если бы система была въ покоѣ. Происходятъ явленія, заслуживающія особаго изученія въ отдѣльныхъ случаяхъ. Остановимся на явленіяхъ въ системѣ, подверженной дѣйствію тяжести. Разберемъ два случая. Во первыхъ, когда тяжелая система движется равномѣрно и прямолинейно, и во вторыхъ, когда такая система падаетъ или когда подымается вслѣдствіе верженія, находится слѣдовательно въ состояніи перемѣннаго движенія, происходящаго отъ дѣйствія тяжести.

Представимъ себѣ воздушный шаръ, подымающійся вертикально кверху или спускающійся книзу равномѣрнымъ движеніемъ. Явленія на немъ будутъ происходить такъ, какъ на движущемся кораблѣ или вообще въ системѣ, подчиненной второму закону движенія. Выроненный изъ рукъ сосудъ упадетъ на дно лодки, вода изъ опрокинутаго сосуда выльется, какъ это бываетъ при поверхности земли. Но представимъ себѣ иной случай. Пусть нѣкоторая система съ заключенными въ ней тѣлами свободно—и слѣдовательно ускорительно падаетъ внизъ или брошена вверхъ и подымается замедлительнымъ движеніемъ. Въ этомъ случаѣ явленія будутъ иными. Въ литературѣ всѣмъ извѣстенъ фантастическій разсказъ Жюля Верна о ядрѣ съ

наблюдателями, брошенномъ будто бы съ земли на луну. Но изъ сотни тысячъ читателей никто кромѣ неизвѣстнаго автора небольшой замѣтки въ Современной Лѣтописи «Московскихъ Вѣдомостей» стараго времени и затѣмъ меня—въ моемъ курсѣ Физики—не обратилъ вниманія на то, что интересное описаніе все основано на физической ошибкѣ. Жюль Вернъ описываетъ явленія въ ядрѣ во все время пути до нейтральной точки (гдѣ притяженіе земли сдѣлалось равнымъ притяженію луны) такъ, какъ явленія эти происходили бы въ ядрѣ, подымающемся подобно воздушному шару равномѣрно вверхъ. Какъ на поразительную особенность нейтральной точки указываетъ онъ на явленіе, удивившее наблюдателей: что всѣ тѣла внутри ядра потеряли свой вѣсъ и всякій предметъ, не падая, оставался въ воздухѣ тамъ, гдѣ былъ помѣщенъ. Въ моемъ курсѣ физики, въ числѣ предложенныхъ задачъ поставлено: «показать, что такое явленіе (потеря вѣса) должно было бы происходить не только въ этой нейтральной точкѣ, но и на всемъ протяженіи пути и что движеніе брошеннаго ядра нельзя сравнивать съ движеніемъ, напримѣръ, воздушнаго шара, поднимающагося вверхъ: каждая часть ядра летитъ не потому, что увлекается другими, а по силѣ верженія, съ такою же скоростію, какъ всѣ другія и не имѣетъ причины отъ нихъ отставать» *). Два, помѣщенныя рядомъ, тѣла не разстанутся между собою ни при паденіи, ни при верженіи и будутъ двигаться вмѣстѣ (сопротивленія воздуха не разсматриваемъ), не оказывая, очевидно, никакого дѣйствія одно на другое. Почему будутъ они давить во время движенія одно на другое, если помѣстить ихъ первоначально одно надъ другимъ, хотя бы въ прикосновеніи? Нижнее не препятствуетъ верхнему двигаться съ тою же скоростію, какъ движется само.

Для экспериментальнаго изученія явленій давленія въ свободно падающей системѣ, зимою прошлаго 1892 года мною

*) «Физика» проф. Любимова, изд. 1876 года, стр. 41 «рэпетиторіума».

былъ произведенъ рядъ опытовъ помощію приборовъ, за исполненіе которыхъ въ мастерской Ремесленнаго училища Цесаревича Николая въ Петербургѣ я долженъ принести благодарность учебному начальству училища *).

Опытъ I. Имѣетъ цѣлью обнаружить измѣненіе взаимодѣйствія тяжелыхъ тѣлъ, образующихъ изъ себя падающую систему. Паденіе производится на снарядѣ, представляющемъ собою родъ Атвудовой машины, аршинъ въ пять высоты (фиг. 1). Чтобы падающій снарядъ не ударялся въ землю, увлекаемая снарядомъ перекинутая чрезъ блокъ нить, послѣ нѣкоторой высоты паденія, начинаетъ увлекать за собою тяжелую цѣпь, замедляющую дальнѣйшее паденіе снаряда.

Падающій снарядъ состоитъ изъ металлическаго диска (фиг. 2) Q, на которомъ лежитъ металлическій цилиндръ P. Цилиндръ свободно ходитъ на аркообразномъ стержнѣ SS, къ которому прикрѣпляется нить переброшенная черезъ блокъ D. Цилиндръ отдѣленъ отъ диска спиралеобразною пружиною и прижимаетъ ее своимъ вѣсомъ. Когда снарядъ падаетъ, получая ускорительное движеніе, цилиндръ перестаетъ оказывать давленіе на дискъ. Пружина же сохраняетъ свое дѣйствіе. Разстояніе между дискомъ и цилиндромъ увеличивается: относительно диска цилиндръ подымается. Обнаружить это можно различными пріемами. На фигурѣ изображены два пріема: помощію пробочекъ и графическій.

Помѣстимъ надъ цилиндромъ пробочки t, t, съ легкимъ треніемъ могущія ходить по вѣтвямъ стержня S и S. Когда во время паденія цилиндръ P удалится отъ диска Q, онъ передвинетъ кверху пробочки t и t, которыя и окажутся при концѣ опыта въ положеніи t_1 и t_1.

Удаленіе цилиндра отъ диска во время паденія можно обнаружить также графическимъ пріемомъ. На верху арки стерж-

*) Чувствую себя особенно признательнымъ за помощь, оказанную мнѣ въ производствѣ опытовъ преподавателемъ физики въ училищѣ А. Н. Яковлевскимъ.

ния (фиг. 2) помѣщается дощечка T, которая во время паденія, при прохожденіи снаряда чрезъ кольцо C (фиг. 1), снимается этимъ кольцомъ. На дощечкѣ укрѣплена вертикальная пластинка M, покрытая копотью. Цилиндръ P имѣетъ пишущій стержень Z. Когда во время паденія цилиндръ удаляется отъ диска, стержень Z пишетъ на пластинкѣ черту вверхъ отъ своего первоначальнаго положенія. Въ моментъ, когда дощечка снимается, стержень идетъ книзу по той же приблизительно чертѣ. Въ концѣ опыта черта эта, насколько она находится выше первоначальнаго положенія пишущаго острія, свидѣтельствуетъ объ удаленіи цилиндра отъ диска.

Фиг. 6 изображаетъ пишущій приборъ въ нѣсколько иной формѣ. Пишущій стержень имѣетъ форму согнутаго рычажка, придерживаемаго легкою пружиною въ прикосновеніи съ цилиндромъ P, лежащемъ на дискѣ Q (въ изображаемомъ на фигурѣ снарядѣ стержень, проходящій чрезъ цилиндръ, не аркообразный, а прямой и пружина, находящаяся между цилиндромъ и дискомъ, настолько прижата вѣсомъ цилиндра, что дискъ находится съ нимъ въ прикосновеніи). Во время паденія, когда цилиндръ удаляется отъ диска, пишущее остріе чертитъ кривую линію (фиг. 7). Когда же чрезъ кольцо C (фиг. 1) дощечка снимается, остріе чертитъ внизъ вертикальную прямую линію. Кривая остается свидѣтельствомъ повышенія цилиндра надъ дискомъ во время паденія.

Когда я, во время пребыванія въ Одессѣ, въ маѣ текущаго 1893 года, сообщалъ въ мѣстномъ физико-математическомъ обществѣ о моихъ опытахъ, талантливый механикъ Новороссійскаго Университета І. А. Тимченко предложилъ и осуществилъ весьма остроумный способъ показать цѣлой аудиторіи, во время самаго паденія моего снаряда, удаленіе цилиндра отъ диска. Пріемъ изображенъ на фиг. 13 и 14. Снарядъ падаетъ на двухъ нитяхъ, перекинутыхъ черезъ двойной блокъ, укрѣпленный на верху вертикально поставленной доски (фиг. 11 и

12), доходившей до хоръ въ актовомъ залѣ Новороссійскаго Университета. Цилиндръ P соединяется помощію колѣнчатаго рычага RN и показателемъ Z изъ легкаго картона. Когда цилиндръ покоится на дискѣ, показатель Z, имѣющій форму стрѣлки, стоитъ вертикально. Когда цилиндръ удаляется отъ диска, плечо N поворачиваетъ валъ, несущій показатель Z и показатель этотъ принимаетъ горизонтальное положеніе, какъ на фиг. 14. Это случается во время самаго паденія и вся аудиторія видитъ, какъ во время паденія стрѣлка Z изъ вертикальной становится горизонтальной (фиг. 11).

Опытъ II. Если утрачивается давленіе верхняго тѣла на нижнее при паденіи, то не должно ли утрачиваться и гидростатическое давленіе верхнихъ слоевъ жидкой массы на нижнія? Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ слѣдующій опытъ. Двухколѣнная трубка укрѣплена на доскѣ, вмѣстѣ съ которой можетъ падать. Доска держится на одной или двухъ нитяхъ, смотря по тому происходитъ-ли паденіе на аппаратѣ, изображенномъ на фиг. 1, или на двойномъ блокѣ фиг. 11. Двухколенная трубка (фиг. 3) заключаетъ въ себѣ, въ одномъ, закрытомъ колѣнѣ a, воздухъ, въ другомъ, — открытомъ и обращенномъ загнутымъ концемъ въ сосудъ b, — колонну ртути. Подъ давленіемъ колонны ртути воздухъ находится въ колѣнѣ a въ сжатомъ состояніи. Во время паденія всего снаряда, сжимающее воздухъ давленіе ртути прекращается, упругость же воздуха вслѣдствіе паденія измѣненія не претерпѣваетъ. Часть ртути выливается изъ открытаго колѣна въ сосудъ b. Фиг. 10 и 10* изображаютъ тотъ же снарядъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ. Снаряду фиг. 3 можно дать такое расположеніе, что сосудъ b будетъ снятъ во время паденія при прохожденіи чрезъ кольцо.

Опытъ III. Опытъ этотъ относится къ давленію жидкости на погруженное въ ней тѣло, по Архимедову закону. Законъ Архимеда утрачиваетъ свое значеніе при паденіи системы. Представимъ себѣ, что въ сосудъ съ водою A (фиг. 4)

погружена пробка *P*. Пружина *F* удерживаетъ ее въ водѣ вопреки давленію жидкости снизу вверхъ, повинуясь которому пробка всплыла бы на верхъ. Во время паденія сосуда съ пробкою, этого давленія снизу вверхъ нѣтъ и пробка опускается внизъ, какъ показано на фиг. 5.

Обнаружить движеніе пробки внизъ можно графически помощію прибора, изображеннаго на фиг. 8 и 9. Въ снарядѣ, изображенномъ на этихъ фигурахъ, пробка удерживается въ водѣ помощію улиткообразной пружинки, помѣщенной не подъ пробкой (какъ на схематическомъ изображеніи фиг. 4 и 5), а надъ нею.

Въ снарядѣ, изображенномъ на фиг. 15 и 16, движеніе пробки обнаруживается помощію указателя г. Тимченки. Пружина *F* помѣщена подъ пробкою.

На фиг. 17, 18 и 19 изображенъ снарядъ, сдѣланный г. Тимченко для оправданія начала, къ которому относится мой второй опытъ; прекращеніе гидростатическаго давленія слоевъ жидкости, верхнихъ на нижнія, во время ихъ паденія. Воздухъ въ каучуковомъ шарѣ *K* сжатъ давленіемъ воды сосуда *A*, когда сосудъ этотъ находится въ покоѣ. Сжатый воздухъ чрезъ стеклянную трубку *S* дѣйствуетъ на каучуковую обвязку *Q* (фиг. 19), къ которой прилегаетъ рычажекъ *L*, удерживающій показатель *Z* (фиг 17) въ вертикальномъ положеніи. Когда сосудъ падаетъ, давленіе жидкости на шаръ *K* утрачивается, обвязка *Q* менѣе нажимаетъ на рычажекъ и показатель повертывается горизонтально, какъ на фиг. 18.

Я имѣю въ виду продолжить опыты въ примѣненіи и къ нѣкоторымъ другимъ явленіямъ, измѣняющимся при перемѣнномъ движеніи системы, сравнительно съ тѣмъ какъ они происходятъ, когда система находится въ покоѣ или въ движеніи постоянномъ. Прибавлю, что явленія того же порядка могутъ быть наблюдаемы, въ извѣстной степени, не только при свободномъ паденіи системы, но и въ системѣ катящейся внизъ по наклонной

плоскости или качающейся. Опыты съ катящеюся по наклонной плоскости или качающеюся системою могутъ быть произведены тѣмъ съ большимъ удобствомъ, что наблюдатель самъ можетъ помѣститься въ скатывающейся или качающейся системѣ (катиться съ горы, качаться на качеляхъ) и слѣдить за явленіями. Нѣтъ особаго затрудненія устроить и свободно падающую систему съ помѣщеннымъ въ ней наблюдателемъ, озаботившись, чтобы падающая система (напримѣръ корзина на перекинутой чрезъ блокъ веревкѣ) достигала земли безъ толчка, съ утраченною уже скоростію.

Область явленій, указываемая моими опытами, имѣетъ интересъ не только чисто физическій, но и физіологическій. Такъ какъ происходящія отъ тяжести давленія въ твердыхъ и жидкихъ частяхъ организма должны измѣняться, когда организмъ этотъ падаетъ, катится или качается, сравнительно съ тѣмъ, когда онъ находится въ покоѣ или движется равномѣрно, то физіологическія условія его должны вслѣдствіе того также претерпѣвать измѣненія. Въ этомъ происхожденіе ощущеній, испытываемыхъ человѣкомъ, когда онъ падаетъ съ высоты, катится ускоренно съ горы, качается на качеляхъ. Объясненіе физіологическихъ условій этого рода движеній организма заключается въ началахъ, для оправданія которыхъ произведены наши опыты.

Физика перемѣннаго движенія системы имѣетъ, быть можетъ, и еще болѣе широкій интересъ. Геометрическое перемѣщеніе тѣла, имѣющаго постоянное движеніе ничѣмъ, какъ сказано, физически въ немъ не обнаруживается. Но если движеніе перемѣнное, то оно всегда обусловливается причинами (силами), имѣющими физическое дѣйствіе. Возможно, что дѣйствіе это всегда сложнѣе, чѣмъ одно сообщеніе ускоренія. Извѣстно, что въ то время, какъ разнообразныя физическія явленія – тепло, свѣтъ, магнетизмъ, электричество — взаимно преобразуются и переходятъ одно въ другое, тяжесть стоитъ изолированно.

Фарадей искалъ связи между паденіемъ тѣла и индуктивнымъ возбужденіемъ электрическихъ токовъ, но такой связи не обнаружилъ. Опыты дали отрицательный результатъ. Если, однако, тяготѣніе, какъ надо думать, имѣетъ физическую причину, а не есть простое свойство, не требующее механическаго объясненія, то трудно отказаться отъ мысли, что причина эта можетъ обнаружиться и не однимъ ускореніемъ. Потому, изученіе явленій, сопровождающихъ ускореніе падающаго тѣла, можетъ оказаться небезплоднымъ и по отношенію къ вопросу, занимавшему умъ великаго англійскаго физика.

Если пріобрѣтаемое падающимъ тѣломъ ускореніе есть слѣдствіе дѣйствія невѣсомой среды, среди которой помѣщены вѣсомыя частицы, то дѣйствіе это должно сопровождаться противодѣйствіемъ, испытываемымъ средою и можетъ быть обнаруживается въ ней какими-либо явленіями, способными подлежать наблюденію.

Физическое изученіе явленій паденія, а также явленій, на сколько они доступны наблюденію, взаимнаго притяженія массъ на землѣ по закону всеобщаго тяготѣнія, связано съ величайшимъ вопросомъ философіи природы: о дѣйствіяхъ на разстояніи.

T

T

Fig. 15

N R C T S P A F

Fig. 16

C L N C Z T R S A P F

Fig. 17

C L R T A S K

Fig. 18

C C L R Z S A S K

Fig. 19

t L P F Q R T S

T

T

Опытъ изслѣдованія главнѣйшихъ явленій, наблюдаемыхъ у рѣкъ.

М. П. Рудскаго.

Essai sur les principaux phenomènes, observès chez les rivières.

par M. P. Rudski.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Работы надъ регуляціей рѣкъ начались въ Италіи еще въ средніе вѣка, поэтому неудивительно, что въ эпоху возрожденія италіянцы обратили вниманіе на теорію движенія проточной воды. Уже знаменитый Ліонардо-да-Винчи дѣлалъ измѣренія скорости теченія и занимался нѣкоторыми вопросами гидродинамики. Гидродинамикой занимался тоже Галлилей, хотя самъ ничего спеціальнаго по этому вопросу не написалъ. Его ученикъ монахъ Кастелли [1]) уже зналъ, что, при установившемся движеніи воды въ каналахъ или трубахъ, среднія скорости обратно пропорціональны площадямъ поперечныхъ сѣченій. Но и онъ и другой ученикъ Галлилея Торичелли имѣли ложныя понятія о распредѣленіи скоростей. Они полагали, что скорости вблизи дна больше, чѣмъ у поверхности. — Что касается самаго закона распредѣленія скоростей, то каждый изъ нихъ предлагалъ другой законъ. Быть можетъ, что Кастелли и

---

[1]) Rühlmann. Hydromechanik. Hannover 1879 §§ 121, 133. Свѣдѣнія о томъ, что сдѣлано физиками и гидротехниками для теоріи рѣкъ, заимствованы по большей части изъ Рюльмана.

Торичелли работали въ направленіи, указанномъ Галлилеемъ, но, раздѣлялъ-ли онъ ихъ взглядъ на распредѣленіе скоростей, неизвѣстно.

Первая болѣе полная теорія рѣкъ принадлежитъ Гуліельмини [Guglielmini De natura de fiumi 1697]. Относительно распредѣленія скоростей онъ придерживался ложнаго взгляда своихъ предшественниковъ, но впрочемъ, насколько можно судить по выноскамъ у Досса [1]) и другихъ, онъ имѣлъ довольно правильныя понятія о многихъ явленіяхъ жизни рѣкъ. Гуліельмини занимался прочнымъ состояніемъ рѣкъ, наводненіями, отношеніями притоковъ къ главной рѣкѣ и т. д. Такимъ образомъ, Гуліельмини понималъ теорію рѣкъ довольно широко. Въ свое время труды Гуміельмини пользовались громадной извѣстностью.

Большой шагъ впередъ сдѣлала теорія рѣкъ, благодаря извѣстному физику Маріотту. Онъ первый замѣтилъ, что скорости не увеличиваются отъ поверхности ко дну, а напротивъ того у дна меньше, чѣмъ вблизи поверхности.—Кажется впрочемъ, что Пито (Pitot) почти одновременно сдѣлалъ подобный выводъ изъ своихъ наблюденій, произведенныхъ помощью изобрѣтеннаго имъ прибора, позволяющаго измѣрять скорость теченія на какой угодно глубинѣ независимо отъ скорости въ другихъ глубинахъ.

Въ XVIII столѣтіи измѣреніемъ скоростей, производствомъ разныхъ опытовъ и выводомъ эмпирическихъ законовъ изъ наблюденій и опытовъ занимаются италіянцы: Зендрини (Zendrini), Лекки (Lecchi), Микелотти (Michelotti) отецъ и сынъ, Лорнья (Lorgna) и др., голландецъ Брюнингсъ (Brünings) и другіе. Шези (Chézy) во Франціи въ 1775 году предлагаетъ первую для практическихъ цѣлей годную формулу для равномѣрнаго движенія въ каналахъ. Вскорѣ затѣмъ Дюбюа (Dubuat) издаетъ

[1]) Dausse Etudes d'hydraulique pratique. Mem. Sav. Etr. 20 томъ стр. 340.

свои знаменитыя «Основы» (Principes 1779 г.). Къ концу XVIII и началу XIX столѣтій относятся работы Бернарда, Фабра и Лекрэ [1]), спеціально посвященныя рѣкамъ.

Въ нашемъ столѣтіи число работъ, посвященныхъ теоріи движенія проточной воды, чрезвычайно увеличивается; особенно много сдѣлано по этому вопросу французами, причемъ усилія многихъ направлены на выведеніе эмпирическихъ формулъ. Обходя молчаніемъ множество работъ, скажемъ только, что, благодаря теоретическимъ работамъ Навье, Пуассона и Стокеса, опытамъ Пуазейля и Дарси, было обнаружено существенное различіе между движеніемъ въ волосныхъ и въ большихъ трубахъ и каналахъ. Затѣмъ укажемъ еще на труды Понселе (Poncelet 1828 г.), Белянже (Bélanger 1828), Коріолиса (Coriolis 1836) и Вотье (Vauthier) надъ теоріей установившагося, неравномѣрнаго движенія проточной воды, потомъ на крайне важные опыты Дарси, продолженные послѣ его смерти Базэномъ, (1855 — 1860), относящіеся къ равномѣрному движенію, къ распредѣленію скоростей въ открытыхъ каналахъ и къ распространенію волнъ, на извѣстную работу Сюрелля (1840 г.) объ Альпійскихъ потокахъ, важную для морфологіи рѣчныхъ долинъ вообще и долинъ потоковъ спеціально, наконецъ на грандіозное изслѣдованіе нижняго теченія Миссисипи и ея притоковъ Гумфрейсомъ и Абботомъ. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что результаты этого изслѣдованія были переоцѣнены. Многіе думали, что найдена новая, настоящая теорія рѣкъ. Между тѣмъ найдены были эмпирическія, впрочемъ нѣсколько натянутыя формулы, вкратцѣ резюмирующія наблюденія Гумфрейса и Аббота. Тѣмъ не менѣе нѣтъ сомнѣнія, что наше фактическое знаніе значи-

---

[1]) Сочиненія Бернарда и Фабра (Observations sur les rivières et les torrents. Paris 1797) были для меня недоступны. Насколько можно судить изъ словъ Досса (Dausse см. выше), только книга Фабра заслуживаетъ нѣкоторое вниманіе. Книга Лекрэ (Le Creulx. Recherches sur la formation des rivières. Paris 1804) была для меня доступна, она представляетъ только историческій интересъ.

тельно увеличилось послѣ обнародованія труда только—что упомянутыхъ американскихъ моряковъ.

Въ началѣ семидесятыхъ годовъ Буссинекъ (Boussinesq 1872 г.) сдѣлалъ попытку создать цѣльную математическую теорію движенія проточной воды [Essai sur la theorie des eaux courantes]. Его огромный трудъ отличается высокими достоинствами и затрогиваетъ различные вопросы; тѣмъ не менѣе и послѣ него теорія движенія проточной воды далека еще отъ той степени развитія, которой достигли иныя физическія теоріи, н. п. теорія свѣта или звука.

Уже послѣ труда Буссинека появились нѣкоторыя работы В. Томсона [о волнахъ въ проточной водѣ], о которыхъ будетъ рѣчь дальше.

Кромѣ спеціальныхъ работъ по динамикѣ рѣкъ, гидротехники дали цѣлый рядъ монографій, между которыми наибольшей извѣстностью пользуется «La Seine» Бельграна (Belgrand), выяснившая, между прочимъ, связь между распредѣленіемъ проточныхъ водъ и формой долинъ съ одной и водопроницаемостью породъ съ другой стороны.

Физики и гидротехники, о которыхъ мы до сихъ поръ говорили, по большей части занимались движеніемъ воды, но мало интересовались отношеніемъ рѣкъ къ окружающимъ породамъ, размытію и т. д.; съ другой стороны геологи и географы сначала занимались результатами дѣятельности рѣкъ, именно вопросомъ образованія долинъ и только въ послѣднее время, по поводу вопроса образованію долинъ и размытія, стали заниматься теоріей рѣкъ.

Работы Риттера [1]) и Пэшеля [2]) о рѣкахъ хотя касаются многихъ вопросовъ, но поверхностно. Риттеръ говоритъ между прочимъ о томъ, что рѣки образуются изъ системъ озеръ, что можно раздѣлить всякое теченіе на верхнее (горное) среднее

[1]) C Ritter. Einleitung zur vergleichenden Geographie. Berlin 1852.
[2]) Peschel. Neue Probleme. Leipzig 1870 г. Гл. 10, 11, 12.

и нижнее, что направленіе теченія опредѣляется трещинами, что рѣка, образующаяся изъ соединенія двухъ рѣкъ, должна имѣть направленіе, среднее между направленіями образующихъ рѣкъ [параллелограммъ силъ] и т. д. Пэшель имѣетъ довольно ясное понятіе объ образованіи извилинъ, заимствованное, кажется, у Бэра; онъ высказываетъ нѣкоторыя довольно мѣткія замѣчанія объ отношеніи рѣкъ къ окружающимъ горнымъ системамъ, онъ говоритъ н. п., что рѣки удаляются отъ высокихъ горъ [1]), параллельныхъ ихъ теченію и т. д.

Большой интересъ возбудила работа Бэра (1860 г.) [2]) о вліяніи вращенія земли на перемѣщеніе русла рѣкъ: она вызвала рядъ статей, посвященныхъ этому вопросу (Цеппрпица, Дункера и другихъ). Къ сожалѣнію, механизмъ явленія былъ плохо понятъ какъ Бэромъ, такъ и многими другими, работавшими послѣ него.

Въ нашемъ столѣтіи геологи стали много заниматься вопросомъ образованія долинъ путемъ размытія. По мѣрѣ того, какъ накоплялись факты и наблюденія, становилось все болѣе и болѣе яснымъ, что рѣчныя долины суть всюду и всегда произведенія дѣятельности самихъ рѣкъ [3]). Поэтому неудивительно, что геологи стали обращать больше вниманія на самыя рѣки. Почипъ въ этомъ отношеніи сдѣлали англичане и американцы: Гринвудъ [4]) Жильбертъ (Geology of Henry Mountains) и Поуэль (Exploration of the Colorado river). Извѣстная книга Рихтгофена (Führer für Forschungsreisende), на которую будемъ очень часто ссылаться, содержитъ нетолько очень много цѣнныхъ наблюденій, но вмѣстѣ съ тѣмъ замѣчательные

---

[1]) Объ этомъ будетъ рѣчь въ текстѣ.

[2]) C. E. v. Baer. Ueber ein allgemeines Gesetz in der Gestaltung der Flussläufe. Bull Acad. S.-Pet. 1860 г.

[3]) Это мнѣніе было ясно высказано Гуттономъ еще въ прошломъ столѣтіи. Ср. Playfair. Illustrations of the Huttonian theory of the Earth ор. пер. Basset подъ загл. Explications de Playfair sur la theorie de la terre par Hutton. Paris 1815 г. стр. 272.

[4]) Ср. Oldham. On the law etc.. Quart. Journ. Geol. Soc. London. 1888 г. стр. 734.

общіе выводы, особенно по вопросу вліянія тектоники на характеръ теченія и на размытіе. Только тамъ, гдѣ авторъ вдается въ физическія теоріи, случаются промахи. О менѣе важныхъ работахъ, спеціально по теоріи рѣкъ, н. п. Филипсона, Пенка и др., будетъ рѣчь въ текстѣ.

Мы по необходимости должны ограничиться этими общими замѣчаніями, такъ какъ въ самомъ текстѣ намъ постоянно приходится указывать на ходъ развитія того или другого вопроса, а притомъ многія изъ исторически важныхъ сочиненій остались для автора недоступными.

Настоящая работа прежде всего имѣетъ цѣлью сопоставить извѣстное. Инымъ вопросамъ пришлось удѣлить много мѣста, но это объясняется тѣмъ, что въ трудахъ геологовъ и географовъ, гдѣ затрогиваются вопросы, имѣющіе связь съ физическими теоріями, встрѣчаются воззрѣнія, несогласныя съ принципами физики или-же отрицающія давно доказанныя, вполнѣ установленныя, истины.

Въ этой работѣ не затрогиваются вопросы о процессахъ, происходящихъ въ устьяхъ рѣкъ, не разсматривается ни вліяніе измѣненій климата, ни вліяніе геологическихъ переворотовъ, ни даже годичныя измѣненія состоянія рѣкъ. Первый изъ этихъ вопросовъ составляетъ самъ по себѣ отдѣльную тему, такъ какъ находится въ связи съ совершенно отдѣльнымъ вопросомъ морскихъ теченій, приливовъ и отливовъ и т. д. Второй и третій выходятъ за предѣлы программы этой работы, гдѣ имѣется въ виду больше всего сама рѣка и ея дѣятельность. Что касается послѣдняго вопроса, то онъ, собственно говоря, долженъ бы войти въ программу такой, какъ настоящая работы, но онъ требуетъ цѣлаго ряда предварительныхъ изслѣдованій по теоріи перемѣннаго состоянія рѣкъ, а потому мы были принуждены пока исключить его изъ спеціальнаго разсмотрѣнія, ограничиваясь только нѣкоторыми отдѣльными замѣчаніями, размѣщенными по разнымъ главамъ сообразно съ надобностью.

ГЛАВА I.

Движеніе жидкостей.

Движеніе всѣхъ жидкостей, сжимаемыхъ и несжимаемыхъ, представляетъ нѣкоторую замѣчательную особенность. При малыхъ относительныхъ скоростяхъ элементы жидкости движутся плавно, сопротивленіе уменьшается по мѣрѣ возвышенія температуры; [коэффиціентъ внутренняго тренія уменьшается по мѣрѣ возвышенія температуры], но, коль скоро относительныя скорости превзойдутъ извѣстные предѣлы, движеніе дѣлается безпорядочнымъ, сопротивленіе значительно увеличивается, причемъ почти не зависитъ отъ температуры.

Это явленіе давно извѣстно физикамъ и гидротехникамъ. Уже Навье имъ занимался. Понсэле называлъ безпорядочное движеніе «вихревымъ», [tourbillonnaire]. Гумфрейсъ и Абботъ называютъ его «пульсирующимъ». При вихревомъ, пульсирующемъ движеніи истинныя скорости теченія во всякомъ мѣстѣ постоянно и весьма скоро мѣняются въ ту и другую сторону нѣкоторой мѣстной средней скорости [1]). Такимъ образомъ, жидкость дѣйствительно какъ-бы пульсируетъ. Самопишущіе приборы для измѣренія скорости теченія хорошо показываютъ эти пульсаціи.

Названіе «вихревое движеніе» произошло отъ того, что дѣйствительно можно себѣ представить, что въ безпорядочно

[1]) Въ дальнѣйшемъ изложеніи подъ скоростями будемъ всегда понимать мѣстныя среднія скорости.

текущей жидкости постоянно возникаютъ и исчезаютъ мелкіе вихри. При прохожденіи каждаго вихря, направленіе и скорость движенія въ разсматриваемомъ мѣстѣ постоянно мѣняются. Слѣдуетъ помнить, что эти вихри не имѣютъ ничего общаго съ элементарными вихрями гидродинамики.

Нѣкоторые искали причину [1]) безпорядочнаго движенія въ шероховатости стѣнокъ каналовъ, рѣкъ, трубъ и т. д. Но опыты Рейнольдса [2]) показали, что, хотя сопротивленіе при безпорядочномъ движеніи увеличивается вмѣстѣ съ шероховатостью стѣнокъ, но, для перехода отъ плавнаго движенія къ безпорядочному и обратно, шероховатость стѣнъ имѣетъ второстепенное значеніе, и что есть нѣкоторыя предѣльныя относительныя скорости, при которыхъ этотъ переходъ непремѣнно совершается. Въ изслѣдованіи Рейнольдса, имѣющемъ преимущественно опытный характеръ, указаны предѣльныя среднія [3]) скорости теченія, при которыхъ совершается переходъ отъ плавнаго движенія къ безпорядочному но, очевидно, такимъ образомъ косвенно выражается зависимость отъ относительныхъ скоростей.—Дѣйствительно, положимъ, что относительныхъ скоростей нѣтъ.— Тогда жидкость движется какъ твердое тѣло и, несмотря на самую большую скорость, безпорядочное движеніе не можетъ имѣть мѣста.

Рейнольдсъ полагаетъ, что переходъ отъ плавнаго движенія къ безпорядочному совершается потому, что при извѣстныхъ скоростяхъ плавное движеніе дѣлается непрочнымъ, неустойчивымъ. Значитъ, устраняя всякія возмущенія, дѣлая стѣны абсолютно гладкими, можно было бы не допустить до перехода въ безпорядочное движеніе. Однако, причина явленія скрывает-

---

[1]) Cp. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. Mem. Sav. Etr. 23 томъ 51 стр.

[2]) Osborne Reynolds. On the law of resistance to the flow of water in parallel channels. Phil. Trans CLXXIV; II часть.

[3]) Т. е. среднія скорости всей воды, протекающей по трубамъ, съ которыми производились опыты.

ся глубже. Лордъ Кельвинъ (В. Томсонъ) и Бассе [1]) показали, что плавное движеніе устойчиво при какихъ угодно скоростяхъ, коль скоро допустимъ, что жидкости движутся по законамъ гидродинамики вязкихъ жидкостей. Слѣдовательно, явленіе выходитъ за предѣлы этихъ законовъ. Уже въ другомъ мѣстѣ я указалъ на то [2]), что при извѣстныхъ относительныхъ скоростяхъ жидкость постоянно разрывается. Съ ней происходитъ нѣчто подобное, какъ съ твердыми тѣлами, когда они ломаются отъ слишкомъ быстрой деформаціи, съ той разницею, что въ жидкости за разрывомъ сейчасъ слѣдуетъ соединеніе. Разрывъ происходитъ отъ того, что жидкость не успѣваетъ приноровить свое внутреннее строеніе къ слишкомъ быстрой деформаціи.

Если стать на эту точку зрѣнія, то станетъ вполнѣ яснымъ, почему шероховатость стѣнъ играетъ второстепенную роль при переходѣ къ безпорядочному движенію. Возмущенія хотя способствуютъ безпорядочному движенію, но не составляютъ его причины. Причина кроется въ физическихъ свойствахъ жидкостей, благодаря которымъ онѣ способны деформироваться вполнѣ непрерывно только до тѣхъ поръ, пока скорость, съ которой совершается деформація, не выходитъ за извѣстные предѣлы. Кажется, что высказанная мною мысль не вполнѣ нова для нѣкоторыхъ гидравликовъ. По крайней мѣрѣ убѣжденіе, что безпорядочное движеніе не подходитъ подъ законы обыкновенной гидродинамики, ясно видно у Буссинека [3]).

Предѣльныя среднія скорости теченія, при которыхъ совершается переходъ къ безпорядочному движенію, уменьшаются

[1]) Lord Kelvin. «On stability etc» и «Broad River etc» Phil. Magaz. 5 сер. 24 томъ. Basset. Stability of viscous liquids. Proc. Roy. Soc. LII стр. 273, ср. lord Rayleigh. «On the question etc». Phil. Magaz. 5 сер. 34 томъ.

[2]) M. P. Rudski. Note on the flow of water etc.... Phil. Magaz. 1893 г. 35 томъ 216 тетрадь (Майская).

[3]) Ср. Boussinesq loc. cit. стр. 6. Евневичъ Курсъ гидравлики. С.-Пет. 1891 г. стр. 91.

по мѣрѣ увеличенія размѣровъ сѣченія русла или трубы. Въ сущности плавное движеніе воды возможно только въ волосныхъ трубкахъ. Вслѣдствіе этого его законы приложимы только къ движеніямъ почвенной воды [1]).

Такъ какъ скорости увеличиваются вмѣстѣ съ уклономъ; то въ одной и той же трубкѣ при маломъ уклонѣ вода течетъ плавно, при большемъ безпорядочно. На основаніи добытыхъ опытнымъ путемъ формулъ Рейнольдса нетрудно убѣдиться, что еслибы при маломъ уклонѣ вода текла безпорядочно, то ея поступательныя скорости были бы меньше, а сопротивленіе больше, чѣмъ при томъ плавномъ движеніи, которое фактически происходитъ. Наоборотъ, оказывается, что еслибы, при большемъ уклонѣ, теченіе совершалось по законамъ плавнаго движенія, то поступательныя скорости были бы больше, а сопротивленіе меньше, чѣмъ при томъ безпорядочномъ движеніи, которое на самомъ дѣлѣ совершается. Такъ н. п., при помощи формулъ Рейнольдса нетрудно вычислить, что въ прямой трубѣ изъ жженной глины, съ круглымъ сѣченіемъ діаметра въ одинъ метръ при уклонѣ въ 0,0001, истинная средняя поступательная скорость воды равна всего 0,27 метрамъ въ секунду. При указанныхъ условіяхъ теченіе всегда безпорядочно, такъ какъ при данномъ діаметрѣ и уклонѣ скорости далеко больше предѣльныхъ скоростей, при которыхъ плавное движеніе еще возможно. Но если бы плавное движеніе было возможно, то при тѣхъ же самыхъ условіяхъ средняя скорость теченія равнялась бы 17 метрамъ въ секунду. Эти результаты получены въ предположеніи, что температура воды [2]) близка къ нулю, но, допуская, что температура равна примѣрно 15°C., мы бы получили среднюю скорость, почти вдвое большую.

---

[1]) Подробности этого вопроса читатель можетъ найти у Евневича loc. cit.

[2]) При безпорядочномъ движеніи поступательная скорость почти что не зависитъ отъ температуры.

Это обстоятельство имѣетъ громадное значеніе въ экономіи природы. Еслибы рѣки текли по законамъ плавнаго движенія, то и онѣ и весь «ликъ земли» имѣлибы другой видъ.

Благодаря безпорядочному движенію скорость рѣчного теченія не зависитъ отъ колебаній температуры; съ другой стороны оно поддерживаетъ одну и ту же температуру отъ дна до поверхности, ибо вода рѣки постоянно перемѣшивается. Частицы, бывшія на поверхности, устремляются ко дну и наоборотъ. Вслѣдствіе этого даже у самыхъ большихъ рѣкъ во всѣ времена года температура воды на разныхъ глубинахъ одна и таже [1]).

Постоянное перемѣшиваніе воды при безпорядочномъ движеніи имѣетъ громадное значеніе для перенесенія твердыхъ веществъ. Оно способствуетъ диффузіи химическихъ растворовъ. Механически взвѣшенный матеріалъ тоже быстро передается изъ периферическихъ струй воды къ центральнымъ. Такимъ образомъ вся масса воды насыщается мутью и разности въ насыщеніи периферическихъ и центральныхъ струекъ значительно уменьшаются. При совершенно плавномъ движеніи передача твердыхъ частей отъ стѣнъ къ центральной части теченія была-бы въ сущности невозможна. Наконецъ при безпорядочномъ движеніи подхватыванію твердыхъ частицъ со дна и береговъ [2]) способствуютъ мелькіе вихри, которыми оно сопровождается.

---

[1]) Ср. Жукъ. Темпер. воды въ Днѣпрѣ у Кіева въ 1890 г. Зап. Кіевск. Общ. Естеств. XII томъ, 2 вып. стр 325. Такъ н. п. зимою «пока рѣка покрыта льдомъ, температура всей массы воды колеблется между +0°,2 и 0°.4C. и не повышается пока ледъ не тронулся; наоборотъ независимо отъ обилія льда, движущагося по рѣкѣ, онъ не остановится и не покроетъ рѣки сплошной корой, пока температура всей массы воды не понизится до +0°,2 или +0°,3C.» loc. cit.

Въ Англіи за послѣдніе годы былъ сдѣланъ цѣлый рядъ наблюденій надъ темпер. рѣкъ, но наблюденія всюду производились на одной глубинѣ. Смотри Rep. on the seasonal variations of temp. Rep. Br. Ass. 1891 г. стр. 454.

[2]) Ср. Osborne Reynolds On certain laws of the river regime Rep. Br. Ass. за 1887 г. стр. 556.

Движенія атмосферы тоже совершаются по законамъ безпорядочнаго движенія, а потому скорости вѣтровъ никогда не достигаютъ тѣхъ предѣловъ, какіе [1]) возможны при плавномъ движеніи. Къ сожалѣнію, почти во всѣхъ трудахъ, посвященныхъ теоретической метеорологіи, за исключеніемъ трудовъ Марки [2]), предполагается, что сопротивленіе движенію воздуха пропорціонально первой степени отъ скорости. Этотъ законъ сопротивленія приложимъ къ плавному движенію, но не къ безпорядочному.

Чтобы дать понятіе о предѣльныхъ скоростяхъ, при которыхъ плавное движеніе воды еще возможно, скажемъ, что у трубъ Рейнольдса средняя критическая скорость, при которой плавное движеніе непремѣнно переходило въ вихревое, опредѣлялась формулой:

$$V=\frac{P}{BD}.$$

Въ этой формулѣ при единицахъ: метръ, секунда и градусы Цельзія [3]).

$B=43{,}79$

$D=$діаметру трубы

$$P=\frac{1}{1+0{,}0236T+0{,}0022T^2}$$

$T=$ температурѣ въ градусахъ Цельзія.

$V=$ средней скорости.

Наоборотъ, безпорядочное движеніе непремѣнно переходило въ плавное при критической скорости въ шесть слишкомъ разъ меньшей, чѣмъ вышеуказанная.

---

[1]) Ср. мои статьи. О законѣ сопротивленія при воздушныхъ движеніяхъ. Метеор. Вѣстникъ 1893 года № 4. Bemerkung zu Dr. Köppen's Aufsatz etc. Annalen der Hydrographie. 1893 г. № 3.

[2]) Marchi Saggio d'applicazione dei principii dell'idraulica etc... Ann. Uff. Centr. Meteor, Geodin. Parte I vol. VIII. 1886 года.

[3]) O. Reynolds. loc. cit.

Въ морскихъ теченіяхъ вода движется тоже безпорядочно, за исключеніемъ нѣкоторыхъ чрезвычайно медленныхъ подонныхъ теченій. Между тѣмъ вся теорія Цэпприца [1]) основана на уравненіяхъ плавнаго движенія. Поэтому въ этой теоріи вѣрна только основная мысль о вліяніи вѣтровъ, но всѣ численные результаты неточны. Кромѣ того замѣчу мимоходомъ, что разсматриваемый у Цэпприца случай двухъ параллельныхъ теченій, направленныхъ въ прямо противуположныя стороны и соприкасающихся между собою такъ, что въ нѣкоторой плоскости скорость движенія равна нулю, невозможенъ.

Этотъ видъ движенія неустойчивъ [2]), а потому при *малѣйшемъ* возмущеніи вода обоихъ теченій смѣшивается и послѣ самаго непродолжительнаго времени это движеніе совершенно разрушается. Неустойчивость движенія имѣетъ мѣсто и тогда, когда плоскость, раздѣляющая теченія вертикальна и тогда, когда она горизонтальна, но въ послѣднемъ случаѣ, если жидкость нижняго теченія плотнѣе, то вмѣсто смѣшенія жидкостей, неустойчивость даетъ поводъ къ образованію волнъ на границѣ между теченіями. Этимъ то объясняется образованіе волнъ на поверхности воды подъ вліяніемъ вѣтра [3]).

---

[1]) Изъ Krümmel'я Handbuch der Ozeanographie. II томъ стр. 351 вижу, что уже Г. Герцъ обратилъ было вниманіе на это обстоятельство.

[2]) Ср. Rayleigh. On the stability of certain fluid motions Proc. Math. Soc. XI томъ.

[3]) Ср. Helmholtz. Energie der Wogen und des Windes Sitzb. Akad. Wiss. Berlin 1890 г. стр. 853. Ср. тоже опыты Рейнольдса въ нѣсколько разъ приводимой работѣ въ Phil. Trans.

ГЛАВА II.

Распредѣленіе скоростей при равномѣрномъ установившемся движеніи.

Теорія движенія жидкостей представляетъ громаднѣйшія затрудненія. Уже Галлилей [1]) говорилъ, что гораздо легче разгадать законы движенія небесныхъ тѣлъ, столь отъ насъ удаленныхъ, чѣмъ законы движенія воды, протекающей въ нѣсколькихъ шагахъ отъ наблюдателя. Тоже самое говоритъ Герштнеръ [2]), знаменитый авторъ теоріи волнъ. Сэнъ-Венанъ называлъ гидродинамику «приводящей въ отчаяніе загадкой» [3]). Даже въ теоріи плавнаго движенія въ волосныхъ трубкахъ съ точностью рѣшены только нѣкоторыя болѣе простыя задачи. Къ этимъ «рѣшеннымъ» задачамъ принадлежитъ задача о равномѣрномъ установившемся [4]) движеніи воды въ прямой волосной трубкѣ, хотя впрочемъ полныя рѣшенія [5]), т. е. дающія ско-

---

[1]) Rühlmann. Hydromechanik. Hannover. 1879 г. стр. 338.

[2]) Gerstner Theorie der Wellen. переводъ Saint-Venant'a Ann. Ponts et Chaussées 1887 г. I полуг. стр. 36.

[3]) Boussinesq. loc. cit. стр. 36.

[4]) Движеніе называется равномѣрнымъ, когда скорости одинаковы во всѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, установившимся, когда скорости не мѣняются съ теченіемъ времени.

[5]) Ср. н. п. Greenhill. On the flow of a viscous fluid in a pipe or channel. Proc. Lond. Math. Soc. XIII томъ.

Graetz. Ueber die Bewegung der Flüssigkeit in Röhren. Zeitschr. für Math. und Phys. 1880.

рости отдѣльныхъ струй, извѣстны только для нѣкоторыхъ формъ сѣченія трубки. За то положительно извѣстно, что между средней скоростью, уклономъ и такъ называемымъ гидравлическимъ радіусомъ существуетъ слѣдующая связь:

$$L^2 \sin i = cV \tag{1}$$

гдѣ V есть средняя поступательная скорость теченія
» i » уклонъ
» L » гидравлическій радіусъ т. е. отношеніе площади живого сѣченія къ смачиваемому периметру.
» c » нѣкоторая постоянная, зависящая отъ коэффиціента вязкости и отъ формы сѣченія.

Такъ какъ уклонъ i есть величина обыкновенно очень малая, то вмѣсто $\sin i$ пишутъ просто i.

Но формула: (1) годится только для волосныхъ трубокъ и каналовъ. Для сходнаго случая, когда въ большихъ трубахъ и каналахъ при безпорядочномъ движеніи мѣстныя среднія скорости равномѣрны и установившіяся, собственно говоря, нѣтъ вполнѣ надежной теоретической формулы [1]). Теоретическія формулы н. п. формулы Буссинека выведены при нѣкоторыхъ вѣроятныхъ, но недоказанныхъ предположеніяхъ. Однако въ виду того, что законы движенія проточной воды представляютъ громаднѣйшій практическій интересъ, существуетъ цѣлый рядъ эмпирическихъ формулъ, добытыхъ путемъ опытовъ и наблюденій. Приведемъ нѣкоторыя изъ этихъ формулъ, удержавъ прежнія знакоположенія и обозначивъ кромѣ того черезъ a, b, c.... постоянныя, зависящія отъ формы сѣченія, его размѣровъ, отъ физическихъ свойствъ стѣнъ и опредѣляемыя каждый разъ изъ наблюденій.

---

[1]) Формулы Буссинека подходятъ подъ первый типъ (см. ниже). Другіе теоретики отдаютъ предпочтеніе формуламъ второго типа.

Большинство этихъ формулъ могутъ быть подведены подъ три типа: Первый типъ:

$$Li = bV^2 \qquad (2)$$

какъ формулы Тадини, ($b = 0{,}0004$), Гангулье и Куттера [1]) и др.: Второй типъ:

$$Li = aV + bV^2 \qquad (3)$$

какъ старыя формулы Прони, Эйтельвейна и др. [2]).

Третій типъ:

$$Li = b.V^n \qquad (4)$$

гдѣ n есть число, близкое къ 2. Таковы н. п. формулы Шези, С. Венана и Рейнольдса.

Формулы Гумфрейса и Аббота, Гауклера, Борнемана, Гагена, Гардера и др. болѣе сложны и различаются и отъ вышеприведенныхъ и одна отъ другой. Очевидно, что ни одна изъ этихъ формулъ не имѣетъ общаго теоретическаго значенія [3]). Онѣ показываютъ, что связь между L, V, i по всей вѣроятности довольно сложная и во всякомъ случаѣ иная, чѣмъ выражаемая ур. (1), свойственнымъ плавному движенію.

Для того-же самаго равномѣрнаго, установившагося движенія въ безконечно широкомъ каналѣ теорія даетъ для распредѣленія скоростей въ зависимости отъ глубины законъ обыкновенной параболы. Другими словами, если станемъ разсматривать глубины какъ абсциссы, то скорости окажутся пропорціональны ординатамъ нѣкоторой обыкновенной параболы. Въ виду того, что ширина большихъ рѣкъ очень часто въ нѣсколько десятковъ разъ больше глубины, можно ожидать, что по крайней мырѣ въ срединѣ теченія большихъ рѣкъ, въ тѣхъ мѣ-

---

[1]) Kutter. Die Bewegung des Wassers. Berlin 1885 г. стр. 4.

[2]) Meissner. Hydraulik Jena 1878 г. I томъ § 132, 133.

[3]) Cp. Rühlmann. Hydromechanik, Hannover. 1879 г. стр. 408.

стахъ, гдѣ движеніе приблизительно равномѣрно и установившееся, истинное распредѣленіе мѣстныхъ скоростей должно подходить подъ теоретическій законъ. Опыты Гумфрейса и Аббота[1]) на Миссисипи и ея притокахъ, Гарляхера[2]) на Дунаѣ и Эльбѣ, Рингеля на Эльбѣ[3]), Нацлани на Тибрѣ[4]), Вагнера[5]) на Рейнѣ и Везерѣ, точно также опыты другихъ гидрологовъ подтверждаютъ результатъ теоріи, но далеко не удовлетворительно. Иной разъ можно очень легко подвести наблюдаемыя скорости подъ другую кривую. Нѣкоторые гидрологи дѣйствительно предлагаютъ другія кривыя н. п. кубическую параболу и т. д. но совершенно напрасно. Дѣло въ томъ, что чаще всего скорости верхнихъ слоевъ довольно хорошо выражаются одной параболой, а скорости подонныхъ другой, обладающей большей кривизной. Другими словами, вблизи дна скорости меньше сравнительно съ тѣми, которыя можно было бы ожидать судя по распредѣленію скоростей въ верхнихъ слояхъ. Вагнеръ[6]) справедливо замѣчаетъ, что это результатъ большей затраты энергіи въ подонныхъ слояхъ. Дѣло въ томъ, что законъ обыкновенной параболы во всякомъ случаѣ приложимъ только къ равномѣрно нагруженной механически взвѣшенными матеріаломъ водѣ. Между тѣмъ подонные слои всегда больше нагружены, чѣмъ верхніе, а потому здѣсь затрата энергіи на перенесеніе твердаго матеріала больше.

Наконецъ слѣдуетъ помнить, что законъ обыкновенной параболы основанъ на предположеніяхъ вѣроятныхъ, но недо-

---

[1]) Meissner loc. cit. стр. 211.

[2]) Harlacher. Die Messungen an der Elbe und Donau. Leipzig. 1887..

[3]) Ringel. Mittheilungen ueber die an der Elbe ausgeführten Messungen. Civilingenieur. 1888 г. стр. 505.

[4]) Knoke. Beiträge zur Hydraulik in Italien, Zeitschr. deut. Ingenieure. 1883 г. стр. 809.

[5]) Wagner. Hydraulische Untersuchungen. Braunschweig 1881 г.

[6]) Wagner loc. cit. стр. 39.

казанныхъ [1]), что даже съ точки зрѣнія теоріи Буссинека онъ справедливъ только для безконечно широкаго канала. Такъ н. п. для каналовъ съ полукруглымъ сѣченіемъ Буссинекъ находитъ законъ кубичной параболы.

Упомянутыя выше гидрологическія наблюденія кромѣ того показываютъ, что распредѣленіе скоростей вообще крайне измѣнчиво въ зависимости отъ разныхъ факторовъ. Между этими факторами весьма важную роль играетъ вѣтеръ. Такъ н. п. у Миссисипи [2]) динамическая ось т. е. струя, обладающая наибольшей скоростью [3]) при тихой погодѣ находится на глубинѣ, равной 0,317 общей глубины, при вѣтрѣ, дующемъ вверхъ по теченію со скоростью 12 метровъ въ секунду динамическая ось оказалась на глубинѣ 0,56 общей глубины, значитъ, вѣтеръ задерживалъ верхніе слои, наконецъ при вѣтрѣ такой-же силы, дующемъ внизъ по теченію, динамическая ось оказалась на глубинѣ 0,08, значитъ, вѣтеръ способствовалъ движенію верхнихъ слоевъ. Вліяніе вѣтра болѣе замѣтно у большихъ рѣкъ, чѣмъ у малыхъ.

Среднее положеніе динамической оси различно у разныхъ рѣкъ и въ разныхъ участкахъ той-же самой рѣки. Положеніе ея несомнѣнно другое во время половодья, какъ во время межени. Вагнеръ находилъ динамическую ось въ разныхъ случаяхъ на разныхъ глубинахъ, начиная съ 0 до 0,28 общей глубины. У Тибра Наццани [4]) нашелъ динамиче-

---

[1]) Какъ мало можно полагаться на математическую теорію движенія проточной воды видно изъ слѣдующаго обстоятельства. Законъ распредѣленія скоростей въ круглыхъ трубахъ и открытыхъ круглыхъ каналахъ по математической теоріи одинъ и тотъ-же, между тѣмъ какъ это противорѣчитъ опытамъ. Въ трубахъ убываніе скорости отъ оси сѣченія къ периферіи оказывается значительно болѣе медленнымъ, чѣмъ въ открытыхъ каналахъ. Ср. Bazin. Recherches experimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts. Mem. Sav. Etr. XIX томъ стр. 27.

[1]) Meissner loc. cit.

[2]) Динамическая ось соотвѣтствуетъ вершинѣ кривой скоростей.

[3]) loc. cit.

[4]) Knoke loc. cit.

скую ось на разстояніи отъ поверхности нѣсколько меньшемъ, чѣмъ одна треть глубины. Гарляхеръ [1]) и Рингель [2]) нашли у Эльбы наибольшую скорость у самой поверхности. Къ сожалѣнію сравнительныхъ измѣреній, произведенныхъ на одной и той-же рѣкѣ, въ томъ же мѣстѣ, но въ различныя времена года при различномъ состояніи рѣки имѣется черезчуръ мало. На основаніи опытовъ Дарси и своихъ собственныхъ, произведенныхъ въ искусственныхъ каналахъ, Базэнъ [3]) пришелъ къ заключенію, что сопротивленіе *спокойнаго* воздуха въ сравненіи съ сопротивленіемъ стѣнъ русла совсѣмъ незначительно, такъ что, если бы положеніе динамической оси зависѣло единственно отъ сопротивленія воздуха, то она всегда находилась-бы вблизи поверхности.

Вмѣстѣ съ тѣмъ Базэнъ убѣдился [4]), что динамическая ось находится тѣмъ дальше отъ поверхности, чѣмъ отношеніе глубины къ ширинѣ больше и чѣмъ скорость движенія меньше. Въ связи съ послѣднимъ обстоятельствомъ находится и тотъ подмѣченный Базэномъ [5]) фактъ, что въ каналахъ одной и той-же величины, съ однимъ и тѣмъ-же уклономъ динамическая ось находится тѣмъ глубже, чѣмъ стѣны болѣе шероховаты.

Базэнъ думаетъ, что причину этого явленія слѣдуетъ искать въ особенно сильной безпорядочности движенія верхнихъ слоевъ воды. «Когда вода течетъ въ трубѣ» говоритъ онъ [6]) «то сопротивленіе стѣнъ вызываетъ нѣкоторую солидарность между разными частями теченія и мѣшаетъ сильнымъ вихревымъ движеніямъ, замѣчаемымъ у поверхности. При теченіи въ открытомъ каналѣ, благодаря отсутствію сопротивленія во верхней поверхности, благодаря несимметричности распредѣленія

---

[1]) loc. cit.
[2]) loc. cit.
[3]) loc. cit. стр. 162.
[4]) loc. cit. стр. 238.
[5]) loc. cit. стр. 223.
[6]) loc. cit. стр. 180.

скоростей [1]), въ верхнихъ слояхъ получаются особенно благопріятныя условія для безпорядочныхъ вихревыхъ движеній, вслѣдствіе чего (поступательная) скорость здѣсь уменьшается».

Въ предшествующей главѣ мы указывали на то, что движеніе проточной воды безпорядочно во всей ея массѣ. Отмѣтимъ теперь, что во верхнихъ слояхъ при мало-мальски быстромъ движеніи эта безпорядочность видна на глазъ, какъ это можно видѣть, слѣдя н. п. за колебаніями плавающихъ сигнальныхъ знаковъ и другихъ предметовъ.

Безпорядочность движенія зависитъ нетолько отъ отсутствія сдерживающаго сопротивленія, но также отъ быстроты теченія, доходящей у горныхъ потоковъ до того, что вся масса воды клокочетъ. Слѣдовательно у быстрой рѣки движеніе всюду весьма безпорядочно и нѣтъ особенно большого различія между поверхностными слоями и, скажемъ, подонными Поэтому положеніе струи, обладающей наибольшей скоростью, регулируется вліяніемъ сопротивленія стѣнъ. Она находится въ наиболѣе удаленномъ отъ нихъ мѣстѣ, т. е. поближе къ поверхности въ центрѣ поперечнаго сѣченія русла. Между тѣмъ при медленномъ теченіи движеніе въ остальныхъ частяхъ канала нестоль безпорядочно какъ вблизи поверхности; а потому безпорядочность движенія верхнихъ слоевъ обнаруживается какъ имѣющій большое значеніе факторъ и, уменьшая скорость верхнихъ слоевъ, понижаетъ положеніе динамической оси.

Чѣмъ глубина при той-же самой ширинѣ больше, тѣмъ ниже опускается динамическая ось. Въ иныхъ случаяхъ наибольшая скорость находится на глубинѣ равной $^2/_5$ общей глубины. Мнѣ кажется, что это явленіе обусловливается большей устойчивостью теченія, характеризуемаго глубокимъ положеніемъ динамической оси. Вообще для движеній жидкостей вопросъ

---

[1]) Подразумѣвается симметрія между верхней и нижней частью теченія.

[2]) Мы говоримъ для простоты о прямомъ каналѣ.

устойчивости, какъ это замѣчаетъ Буссинекъ [1]), имѣетъ большое значеніе. Однако здѣсь мы довольствуемся тѣмъ, что констатируемъ фактъ, не вдаваясь въ детальное обсужденіе этого вопроса, такъ какъ это могло бы насъ завлечь слишкомъ далеко.

Мы выше упомянули о томъ, что у Миссисипи динамическая ось находится глубоко. Это хорошо согласуется съ результатами опытовъ Базэна. Миссисипи рѣка глубокая [говоримъ о ея нижнемъ теченіи] до 120 футовъ и болѣе, и сравнительно узкая, при томъ ея теченіе довольно медленно: 1,25 —1,50 метровъ въ секунду.

Изъ сказаннаго видно, что нѣтъ и рѣчи о какомъ нибудь постоянномъ простомъ законѣ распредѣленія скоростей въ вертикальномъ направленіи. Если къ тому прибавимъ вліяніе неправильностей въ формѣ дна, кривизны русла и т. д. то увидимъ, что распредѣленіе скоростей всегда крайне разнообразно. Жаль только, что вліяніе различныхъ факторовъ на распредѣленіе скоростей мало извѣстно. Гидротехники чаще всего стремятся именно къ выводу эмпирической средней формулы, а потому нетолько не стараются обнаружить разныя уклоненія отъ средняго типа, но скорѣе отодвигаютъ ихъ на задній планъ. Тоже самое разнообразіе существуетъ и въ другихъ отношеніяхъ. Такъ н. п. отношеніе наибольшей скорости къ средней измѣняется въ предѣлахъ отъ 2 для каналовъ, которыхъ стѣны сильно шероховаты, до 1,18 для гладкихъ стѣнъ [2]). Скорости у дна и боковыхъ стѣнъ русла различны. Наибольшія бываютъ у дна на стрежени т. е. подъ динамической осью, наименьшія, иногда нуль, а вслучаѣ образованія водоворотовъ даже отрицательныя, бываютъ у береговъ вблизи поверхности.

---

[1]) loc. cit. стр. 120.

[2]) Bazin. loc. cit. стр. 151. Это зависитъ нетолько отъ шероховатости, но тоже отъ самаго материала, изъ котораго состоятъ стѣны. Вода не скользитъ по поверхности тѣхъ тѣлъ, которыя смачиваются водою. Ср. Helmholtz u. Piotrowski. Reibung der Flüssigkeiten. Helmholtz Wiss. Abh. I томъ Leipzig 1882 г. стр. 218.

Разумѣется, когда динамическая ось рѣки подходитъ къ одному изъ береговъ, то скорости у этого берега значительны, за то у противуположнаго тѣмъ меньше. Никакихъ постоянныхъ отношеній конечно нѣтъ. Можно сказать только то, что при равенствѣ прочихъ условій абсолютныя разности между наибольшей и наименьшей скоростью теченія тѣмъ больше, чѣмъ рѣка больше.

Иные полагаютъ, что скорость у дна равна двумъ пятымъ средней скорости. Во всякомъ случаѣ это правило имѣетъ тоже только чисто относительное значеніе. Извѣстно только, что, чѣмъ рѣка быстрѣе, тѣмъ «ceteris paribus» подонныя скорости больше.

Наконецъ, чтобы дать понятіе о томъ, какъ различны бываютъ причины, вліяющія на измѣненіе скорости, приведемъ слѣдующій примѣръ. Въ одномъ старомъ каналѣ, котораго стѣны были облицеваны камнемъ, Базэнъ велѣлъ соскоблить тонкій слой мха, покрывавшаго, впрочемъ далеко не всюду, поверхность камней. Оказалось, что вода сейчасъ стала стекать гораздо [почти въ полтора раза] быстрѣе.

Довольно распространено мнѣніе, что теоретическое распредѣленіе скоростей въ паралельныхъ внѣшней поверхности плоскостяхъ тоже подчиняется закону обыкновенной параболы. Даже въ теоріи этотъ законъ справедливъ только для прямого канала безконечной глубины, конечной ширины, огражденнаго вертикальными стѣнками. Онъ вовсе не приложимъ къ рѣкамъ, у которыхъ ширина всегда въ нѣсколько разъ больше глубины. Какъ и слѣдуетъ ожидать, наблюдаемое у рѣкъ распредѣленіе скоростей во внѣшней и въ параллельныхъ внѣшней плоскостяхъ представляетъ только далекое сходство съ параболическимъ распредѣленіемъ. Обыкновенно это распредѣленіе представляетъ много мѣстныхъ аномалій, находящихся въ зависимости отъ мѣстныхъ неправильностей въ формѣ дна и береговъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что даже теорія равномѣрнаго установившагo движенія проточной воды вообще неудовлетворительна. Теорія неравномѣрнаго движенія находится въ нелучшемъ, а теорія перемѣннаго движенія пожалуй въ еще худшемъ состояніи.

ГЛАВА III.

Потоки и рѣки.

Дѣленіе теченія на верхнее быстрое, горное, нижнее медленное, равнинное и среднее переходное, хотя имѣетъ за собою авторитетъ Риттера, удобно только въ чисто морфологическомъ отношеніи. Если станемъ н. п. съ понятіемъ верхняго теченія связывать понятіе большой скорости, то найдемъ столько исключеній, что само опредѣленіе окажется негоднымъ.

Въ виду того, что скорость есть самый важный признакъ въ характерѣ рѣки, наиболѣе важными слѣдуетъ считать дѣленія, основанныя на этомъ признакѣ.

Газе [1]) предлагаетъ дѣлить теченія на горныя. и равнинныя, понимая подъ первыми быстрыя, подъ другими медленныя теченія. Но вмѣсто дѣленія Газе гораздо удобнѣе ввести динамическое дѣленіе С. Венана на потоки (torrents) и рѣки (rivières). Опыты, наблюденія и теорія [2]) согласны въ томъ, что существуетъ коренное различіе въ родѣ движенія проточной воды, смотря потому будетъ-ли:

---

[1]) Haase Flüsse und Flusslaüfe Peterm. Mith. 1891 г. стр. 49.

[2]) W. Thomson. On the solitary Waves in flowing water Phil. Magaz. 5 сер. 22 и 23 томъ.

Boussinesq. loc. cit. § XVI и др.

$$V^2 < agL \qquad (1)$$

или:

$$V^2 > agL$$

причемъ, какъ прежде V обозначаетъ среднюю скорость,
» » » L » гидравлическій радіусъ:
» » » g » ускореніе силою тяжести (9,8 метр. въ сек.).
» » » a » нѣкоторый множитель, нѣсколько большій чѣмъ единица и зависящій отъ формы сѣченія и отъ свойствъ породъ, изъ которыхъ состоятъ стѣны русла [1]).

Тѣ теченія, для которыхъ имѣетъ мѣсто первое неравенство относятся къ типу рѣкъ, тѣ, для которыхъ имѣетъ мѣсто второе неравенство, принадлежатъ къ типу потоковъ.

Указанное динамическое различіе находится въ тѣсной связи съ законами распространенія волнъ, $\sqrt{gL}$ есть та скорость, съ которой длинныя волны распространяются въ водѣ, глубина которой равна L. Вслѣдствіе этого всякія возмущенія у рѣкъ сообщаются въ тоже время и вверхъ и внизъ по теченію, у потоковъ только внизъ [2]), вслѣдствіе чего явленія, производимыя реакціей морскихъ приливовъ и отливовъ на теченіе рѣкъ, какъ н. п. маскарэ, поророка и т. д. возможны только у рѣкъ, но отнюдь не у потоковъ.

При проходѣ черезъ преграды и при низверженіи скорость потока весьма быстро мѣняется и вообще явленія, происходящія въ верхнемъ теченіи не зависятъ отъ того, что происходитъ на нижнемъ. Не то въ рѣкахъ. Передъ преградами ихъ скорость медленно и постепенно убываетъ, а глубина уве-

---

[1]) Буссинекъ полагаетъ, что при уклонѣ большемъ чѣмъ 0,0039 теченіе имѣетъ почти всегда харакеръ потока, при меньшемъ чѣмъ 0,0036 теченіе имѣетъ непремѣнно характеръ рѣки. Опыты Базэна (loc. cit. стр. 34) доказываютъ что, смотря по формѣ и величинѣ сѣченія, эти предѣлы значительно шире т. е. напримѣръ при весьма широкомъ сѣченіи теченіе можетъ имѣть характеръ рѣки при большемъ, чѣмъ 0,0039 уклонѣ.

[2]) Это провѣрено непосредственными опытами Базэна (loc. cit. стр. 34).

личивается, передъ водопадами и стремнинами скорость постепенно увеличивается, а глубина убываетъ. Уклонъ поверхности у рѣкъ всегда измѣняется постепенно, убывая передъ преградою, увеличиваясь передъ водопадомъ или стремниною. Съ другой стороны надъ буграми и вообще надъ возвышенностями дна поверхность воды въ рѣкѣ нѣсколько понижается, надъ ямами нѣсколько возвышается, у потоковъ наоборотъ.

Движеніе проточной воды въ потокахъ представляетъ нѣкоторое сходство съ движеніемъ твердыхъ тѣлъ. Вода стремится по своему пути независимо отъ того, что происходитъ впереди. Поэтому повороты теченія остаются рѣзкими, кромѣ того на поворотахъ, вода, ударяясь въ преграду, заставляющую ее измѣнить направленіе, долбитъ въ ней яму. Подобныя ямы образуются на днѣ передъ выходами твердыхъ породъ, пересѣкающими теченіе особенно, если пласты наклонены противъ теченія [1]). Во всѣхъ такихъ особенныхъ мѣстахъ образуются вихри, водовороты, движеніе весьма бурно. Вслѣдствіе этого русло потоковъ неправильно, очертанія его рѣзки, нѣтъ мягкихъ округленныхъ контуровъ.

Напротивъ того, въ рѣкахъ движеніе въ любомъ поперечномъ сѣченіи регулируется движеніемъ въ слѣдующихъ внизъ по теченію сѣченіяхъ, всякое отклоненіе или измѣненіе теченія впереди отражается на всемъ позади находящемся участкѣ. Оттого-то контуры теченія рѣкъ, особенно тихихъ болѣе округлены. На днѣ рѣкъ тоже образуются ямы особенно тамъ, гдѣ вода приходитъ во вращательное движеніе, есть тоже разныя неправильности въ конфигураціи дна, но онѣ не доходятъ до тѣхъ размѣровъ, что у потоковъ.

Когда потокъ вслѣдствіе уменьшенія уклона переходитъ въ состояніе рѣки, то переходъ всегда сопровождается бурнымъ движеніемъ и образованіемъ водоворотовъ. Кромѣ того вслѣдствіе самаго измѣненія уклона вода потока ударяется о

---

[1]) Richthofen. Führer etc... стр. 169.

дно. Вслѣдствіе этого особенно глубокія и большія ямы находятся у мѣстъ перехода. Очень часто измѣненія уклона столь часты и рѣзки, что на коротенькомъ промежуткѣ, гдѣ уклонъ меньше, потокъ не успѣваетъ перейти въ болѣе правильное рѣчное движеніе. Тогда потокъ состоитъ изъ участковъ со стремительнымъ теченіемъ, прерываемыхъ коротенькими участками, гдѣ вода кружится надъ ямой и переливается черезъ край ея, чтобы погнаться по новому участку стремительнаго движенія.

Весьма характеристической чертой у горныхъ потоковъ является внезапность ихъ разливовъ. Эта внезапность есть съ одной стороны результатъ главнаго свойства потоковъ, большого уклона, съ другой результатъ внѣшнихъ условій, именно того, что ихъ бассейны не велики, а ливни въ горахъ болѣе обильны, чѣмъ на равнинахъ. Поэтому потокъ иногда въ продолженіе нѣсколькихъ недѣль не получаетъ ни капли дождевой воды, за то сильный ливень, выпавшій въ его бассейнѣ, сразу доставляетъ огромное количество воды. На крутыхъ скатахъ только малая часть этой воды проникаетъ въ почву, остальная поспѣшно устремляется въ потокъ.

Долину горнаго потока можно всегда раздѣлить на двѣ части, на бассейнъ питанія (bassin de réception), находящійся въ горахъ, въ которомъ мелкіе ручьи соединяются въ болѣе крупный потокъ, и на конусъ отложенія (cône de déjection), находящійся уже въ долинѣ той рѣки, въ которую впадаетъ потокъ. Третья часть, каналъ истеченія (canal d'écoulement)[1]) обыкновенно ущелье, соединяющее бассейнъ питанія съ областью отложенія, не столь существенна. Она очень часто низводится до совсѣмъ ничтожныхъ размѣровъ.

Воронкообразная форма, свойственная бассейну питанія горныхъ потоковъ, не совсѣмъ еще выяснена. Нѣкоторые авторы н. п. Лаппаранъ [2]) полагаютъ, что образованію этой спеціальной формы

---

[1]) Какъ извѣстно, эта классификація установлена Сюрелемъ.
[2]) Lapparent. Traité de Geologie Paris 1883 стр. 186.

способствовали какія-то другія силы кромѣ размытія проточной водою. Но, если вспомнимъ, что такъ называемыя кальдеры (calderas) т. е. бассейны питанія потоковъ, стекающихъ по склонамъ вулканическихъ конусовъ, имѣютъ тоже воронкообразную форму, то прійдемъ къ заключенію, что въ образованіи воронокъ можно допустить только три фактора: концентрацію ручьевъ въ одно мѣсто вслѣдствіе натуральнаго распредѣленія склоновъ, осыпи и содѣйствіе подземнаго размытія. На это послѣднее обстоятельство указываетъ Рихтгофенъ [1]).

ГЛАВА IV.

Энергія рѣкъ.

Всякая капля рѣчной воды обладаетъ нѣкоторой потенціальной энергіей, равной произведенію ея вѣса на высоту центра тяжести надъ уровнемъ моря и кинетической энергіей, равной произведенію ея массы на половину квадрата скорости. Энергія рѣки состоитъ нетолько изъ энергіи всей ея воды, но также изъ потенціальной и кинетической энергіи всѣхъ движущихся твердыхъ частицъ. Поэтому, если будемъ разсматривать двѣ совершенно одинаковыя рѣки съ русломъ одной формы и тѣхъ же самыхъ размѣровъ, съ равными и одинаковыми поперечными сѣченіями, съ одинаковыми уклонами, но предположимъ, что въ одной изъ нихъ течетъ чистая вода, въ другой вода, несущая гальку, песокъ и т. д.; то въ виду того, что вѣсъ этихъ тѣлъ [приблизительно въ $2-2^1/_2$ раза] больше, чѣмъ вѣсъ воды, потенціальная энергія второй рѣки будетъ несомнѣнно больше.

---

[1]) Führer etc. стр. 60.

Съ другой стороны кинетическая энергія второй рѣки будетъ меньше. Дѣйствительно, песокъ, галька могутъ катиться подъ вліяніемъ одной лишь силы тяжести только по склонамъ, далеко превышающимъ уклоны рѣчнаго дна, а потому ихъ кинетическая энергія почти всецѣло заимствуется у воды. Между тѣмъ треніе гальки, песку и вообще твердыхъ частицъ между собою и о дно русла поглощаетъ гораздо большія количества энергіи, чѣмъ треніе воды. Кромѣ того, такъ какъ кинетическая энергія равна произведенію половины квадрата скорости на массу, а масса рѣки, несущей гальку, несомнѣнно больше, то скорости теченія несомнѣнно меньше, чѣмъ у рѣки, несущей чистую воду. Во второй главѣ мы указывали на нѣкоторые факты, вполнѣ подтверждающіе сказанное и свидѣтельствующіе о томъ, что наиболѣе нагруженныя твердыми веществами струи воды движутся особенно медленно, причемъ эта медленность не можетъ быть объяснена однимъ треніемъ о дно.

Но, если въ свою очередь предложимъ вопросъ, которая изъ двухъ рѣкъ больше размываетъ, то окажется, что, не смотря на меньшую скорость, на меньшую кинетическую энергію, больше размываетъ рѣка, несущая гальку и песокъ, особенно если русло проложено въ твердыхъ породахъ. Даже весьма быстрая, но чистая или содержащая только тонкую мутъ вода производитъ незначительное дѣйствіе на твердыя породы. Галька, а еще больше песокъ чрезвычайно усиливаютъ размытіе, царапая и истирая самые твердые камни. Песокъ состоитъ изъ угловатыхъ зеренъ кварца, онъ тверже всѣхъ остальныхъ породъ, встрѣчающихся какъ составная часть стѣнъ дна. Известковыя породы особенно плохо противустоятъ дѣйствію песка.

Протекая отъ верховьевъ къ устью, рѣчная вода растрачиваетъ свою потенціальную энергію. Обыкновенно за исключеніемъ небольшихъ участковъ вблизи источниковъ, скорость теченія нетолько не увеличивается, но даже замедляется. Слѣдовательно на пути къ морю совершается растрата не только

потенціальной, но даже отчасти кинетической энергіи, имѣвшейся на верхнемъ теченіи главной рѣки и ея притоковъ. Нѣкоторая доля энергіи, присущей рѣкѣ, передается морю вмѣстѣ съ рѣчной водою. Значительная доля энергія растрачивается на треніе, сопровождающее поступательное и вихревое движеніе воды. Затѣмъ много энергіи затрачивается на размытіе, т. е. на отдѣленіе твердыхъ частицъ отъ дна, — наконецъ на размельченіе ихъ.

На отдѣленіе отъ дна нужна всегда работа т. е. затрата энергіи тѣмъ большая, чѣмъ сильнѣе прикрѣплена ко дну данная твердая частица. Затѣмъ нужна затрата энергіи для того, чтобы сообщить твердымъ частицамъ тѣ скорости, которыми онѣ обладаютъ и на преодолѣніе всѣхъ тѣхъ треній, которыми сопровождается ихъ движеніе въ водѣ или по дну. Вычислить эту работу для каждой отдѣльной частицы совершенно невозможно, ибо она зависитъ отъ всѣхъ тѣхъ толчковъ и ускореній, которымъ твердая частица подвергалась въ теченіе извѣстнаго времени.

Рихтгофенъ [1]) ошибается, говоря, что затрата энергіи на перенесеніе частицы въ теченіе времени t равна произведенію вѣса частицы въ водѣ на ту высоту, съ которой она упалабы въ спокойной водѣ въ теченіе того-же времени t.

Еслибы это разсужденіе было справедливо, то точно также на перенесеніе извѣстнаго тѣла въ пустотѣ въ горизонтальномъ направленіи или на поддержаніе его въ одномъ и томъ-же уровнѣ въ теченіе времени t нужна была бы работа, равная произведенію его вѣса въ пустотѣ на ту высоту, съ которой она падаетъ въ теченіе времени t. Это противорѣчитъ основнымъ принципамъ механики. На поддержаніе тѣла въ одномъ и томъ-же уровнѣ не *нужна никакая работа*, но такъ

[1]) Richthofen. Führer стр. 149. Онъ очевидно говоритъ о перенесеніи въ горизонтальномъ направленіи. Слѣдуетъ замѣтить, что падающая въ водѣ частица даже передаетъ водѣ часть своей энергіи, такъ что отъ паденія твердыхъ частицъ кинетическая энергія воды увеличивается.

какъ тѣло падаетъ подъ вліяніемъ силы тяжести, то нужно подложить подъ него твердую неподвижную подставку или сообщать ему толчки, постоянно приводящіе его въ прежній уровень. Послѣдній случай и есть тотъ, который дѣйствительно происходитъ при перенесеніи твердыхъ тѣлъ водою, но затрачиваемая при этомъ работа вполнѣ зависитъ отъ самыхъ толчковъ.

Если вычисленіе энергіи, расходуемой на перенесеніе извѣстной частицы невозможно, то спрашивается, нельзя ли на основаніи нѣкоторыхъ болѣе или менѣе вѣроятныхъ предположеній вычислить нѣкоторую *среднюю* затрату энергіи при передвиженіи извѣстнаго количества извѣстныхъ твердыхъ тѣлъ. Къ сожалѣнію, наше теоретическое знаніе относительно движенія твердыхъ тѣлъ въ водѣ столь ограничено, что нельзя ожидать никакихъ надежныхъ результатовъ отъ подобныхъ вычисленій. Надежно толко то, что непосредственно основано на опытѣ и наблюденіи.

Такъ н. п. по даннымъ, даваемымъ наблюденіями, весьма нетрудно вычислить общую затрату энергіи, происходящую за извѣстное время въ извѣстной части теченія. Положимъ, что намъ извѣстны расходъ [1]). скорость и т. д. въ двухъ поперечныхъ сѣченіяхъ. № 1 и № 2, находящихся на разстояніи единицы длины другъ отъ друга.

Если обозначимъ черезъ g ускореніе силою тяжести
Q расходъ
ρ плотность
V среднюю скорость
h высоту центра тяжести сѣченія
надъ уровнемъ моря, то количество кинетической энергіи, вно-

[1]) Расходомъ рѣки называется объемъ воды, протекающей въ продолженіе единицы времени сквозь данное сѣченіе. Когда рѣка по пути не теряетъ и не получаетъ воды, то расходъ есть величина постоянная вдоль теченія.

симой въ разсматриваемое пространство въ теченіе единицы времени сквозь сѣченіе № 1 будетъ:

$$Q_1 \rho_1 \frac{V_1^2}{2}$$

а потенціальной:

$$Q_1 g \,.\, \rho_1 h_1$$

Въ тоже самое время сквозь сѣченіе № 2 уносится съ водою

$$Q_2 \rho_2 \cdot \frac{V_2^2}{2}$$

единицъ кинетической энергіи и:

$$Q_2 g \,.\, \rho_2 h_2$$

потенціальной. И такъ, въ продолженіе единицы времени въ разсматриваемой части теченія расходуется количество энергіи:

$$E = Q_1 \rho_1 \left[\frac{V_1^2}{2} + g h_1\right] - Q_2 \rho_2 \left[\frac{V_2^2}{2} + g h_2\right] \ldots . \quad (1)$$

Количество E всегда положительно, но какая его доля теряется на треніе, какая на преодолѣніе сопротивленій при отдѣленіи частицъ отъ стѣнъ русла, какая доля идетъ на перенесеніе твердыхъ частицъ, не знаемъ.

Когда средняя скорость, расходъ и насыщеніе воды химически и механически взвѣшенныимъ матеріяломъ постоянны вдоль русла; то выраженіе: (1) сводится къ простому виду:

$$E = g Q \,.\, \rho (h_1 - h_2).$$

Но такъ какъ сѣченія находятся на разстояніи, равномъ единицѣ, то:

$h_1 - h_2 = \sin i$, гдѣ i есть уклонъ.

Слѣдовательно:

$$E = g \,.\, Q \,.\, \rho \,.\, \sin i \qquad (1) \text{ bis.}$$

Примѣнимъ эту простую формулу къ слѣдующему примѣру: Уклонъ [1]) Волги въ среднемъ: 0,00004. Расходъ у Александровскаго моста [2]) близъ Сызрани въ среднемъ 9889 куб. метровъ въ сек., $\rho=1$, $g=9{,}8$ метра въ секунду. На основаніи этого:

$$E=3{,}88 \text{ килограммометрамъ}$$

т. е. въ пространствѣ, заключенномъ между двумя поперечными сѣченіями, находящимися на разстояніи одного метра въ продолженіе единицы времени затрачивается работа равная той, которая нужна для поднятія у поверхности земли въ пустотѣ 3,88 килограмма на высоту одного метра. Слѣдуетъ помнить, что несомнѣнно только малая доля этой энергіи идетъ на настоящую механическую работу.

Теперь слѣдуетъ сказать нѣсколько словъ о томъ, какъ энергія воды передается твердымъ тѣламъ. Къ сожалѣнію мы и здѣсь должны удовлетвориться нѣкоторыми общими свѣдѣніями, такъ какъ знаніе наше о всѣхъ этихъ процессахъ весьма и весьма ограничено.

Для совершенія работы, нужной для отдѣленія твердой частицы отъ стѣнъ русла и для перенесенія ея, вода затрачиваетъ часть своего запаса энергіи. Она производитъ давленіе на всякое тѣло, котораго скорость не равна и неодинаково направлена, какъ средняя скорость окружающаго теченія. Такимъ образомъ, поскольку не мѣшаетъ треніе о дно, твердымъ тѣламъ, движущимся медленнѣе чѣмъ теченіе, сообщается ускореніе. Покоющіяся тѣла сдвигаются съ мѣста коль скоро давленіе воды преодолѣетъ сопротивленіе, происходящее отъ прикрѣпленія частицы ко дну.

Ньютонъ [3]) полагалъ, что сопротивленіе воды движенію тѣлъ пропорціонально квадрату скорости. На основаніи теоре-

---

[1]) Мушкетовъ. Физич. Геол. II томъ стр. 251.

[2]) Воейковъ. Климаты земного шара стр. 518.

[3]) Rühlmann Hydromechanik. Hannover 1880 г. стр. 732.

мы Торичелли, пренебрегая реакціей воды на заднюю сторону плоскости, Эйлеръ показалъ [1]), что, если плоскость движется въ водѣ, то сопротивленіе движенію пропорціонально квадрату скорости и поверхности плоскости. Въ виду важности вопроса сопротивленія воды для теоріи движенія и постройки кораблей, соотвѣтственые опыты производились много разъ. Какъ и слѣдовало ожидать, опыты показали, что явленія, сопровождающія движеніе твердыхъ тѣлъ въ водѣ сложны, что сопротивленіе движенію тѣла есть результатъ *нѣсколькихъ одновременно дѣйствующихъ причинъ*, что законъ Эйлера далеко не точенъ. До сихъ поръ никому не удалось создать удовлетворительную теорію. Стокесъ [2]) полагаетъ, что при малыхъ скоростяхъ сопротивленіе пропорціонально первой степени, при большихъ квадрату отъ скорости.

Вопросъ о связи между *скоростью* и *давленіемъ* или, какъ говорятъ, силою удара [3]) (Stosskraft) о тѣло, покоющееся въ водѣ, или движущееся съ меньшей скоростью, чѣмъ окружающая вода, есть въ сущности тотъ-же, что вопросъ о сопротивленіи воды движенію тѣла. Дѣло не въ томъ, что движется и что покоится, а въ относительной скорости воды и тѣла. По этому обыкновенно полагаютъ, что это давленіе тоже пропорціонально квадрату скорости воды, если тѣло покоится, квадрату относительной скорости, если тѣло движется. Но этотъ законъ, точно также какъ обратный законъ сопротивленія завѣдомо [4]) неточенъ. И такъ, наше теоретическое знаніе въ сущности сводится къ тому, что давленіе тѣмъ больше, чѣмъ относительныя скорости больше, что оно зависитъ отъ поверхности и формы тѣла, что тяжелое тѣло труднѣе сдвинуть, чѣмъ болѣе легкое того-же самаго объема, что легче сдвинуть пло-

---

[1]) Fink. Untersuchungen etc. Civilingenieur 1892 г. вып. 7 стр. 540.
[2]) Rühlmann loc. cit. стр. 621.
[3]) Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. Cambr. 1883 г. I ч. стр. 367.
[4]) Phillipson [Beitrag zur Erosionstheorie. Peterm. Mitth. 1886 г. стр. 68]. полагаетъ, что сила удара пропорціональна квадрату скорости.
[5]) Rühlmann. loc. cit. стр. 595.

ское тѣло, стоящее поперекъ теченія, чѣмъ вдоль его и т. д. Положительныя количественныя свѣдѣнія добыты путемъ опытовъ и наблюденій.

Опытъ показалъ [1]), что при подонной скорости въ 0,15 метровъ въ секунду по дну переносится грубая муть, состоящая изъ частицъ, которыхъ діаметръ въ среднемъ равенъ: 0,0004 метрамъ;

при	скорости	въ	0,20	м.	въ	сек.	тонкій песокъ	діам.	въ	0,0007
»	»	»	0,30	»	»	»	грубый	»	»	0,0017
»	»	»	0,70	»	»	»	мелкая галька	»	»	0,0092
»	»	»	1,20	»	»	»	галька величиною въ яйцо			
»	»	»	1,50	»	»	»	плоская галька [2]).			

Подонныя скорости весьма различны, онѣ наибольше на стрежени, гдѣ очень часто равны одной трети, половинѣ и большей доли средней скорости и уменьшаются въ обѣ стороны отъ стрежени, доходя до минимума у того берега, который находится подальше отъ стрежени. Смотря по формѣ русла при той-же самой средней скорости подонныя скорости бываютъ различны, такъ что по средней скорости нельзя судить о томъ, какой матеріялъ передвигается по дну.

---

[1]) Lapparent. Traité de Geologi·. Paris 1883 г. стр. 22.

[2]) Рядомъ съ этимъ приводимъ слѣдующія данныя, заим·твованныя у Коллиньона (Collignon Cours de Mécan. Paris 1880 г. II part. стр. 301).

Размытіе	начинается	въ размокшей почвѣ	при подон.	скорости	0,076	метр.	въ	сек.
»	»	» глинѣ	» » »	»	0,152	»	»	»
»	»	» пескѣ	» » »	»	0,305	»	»	»
»	»	» мелкой галькѣ	» »	»	0,609	»	»	»
»	»	» крупной (pierres cassées)		»	1,220	»	»	»
»	въ конгломератахъ и мягкихъ сланцахъ			»	1,520	»	»	»
»	» слоистыхъ породахъ			»	1,830	»	»	»
»	» твердыхъ скалахъ			»	3,030	»	»	»

Изъ сравненія обоихъ таблицъ видно, что при произведеніи опытовъ не пытались отличить скорости достаточной для сдвиженія съ мѣста т. е. для размытія отъ скорости достаточной для перенесенія. Коллиньонъ приводитъ данныя по Прони.

Только въ водопадахъ, стремнинахъ, у весьма бурныхъ горныхъ потоковъ галька и вообще крупный матеріялъ совершенно подхватываются. Обыкновенно посреди теченія несется только муть и мелкій песокъ — подхваченные и передаваемые мелкими вихрями.

Дѣйствіе твердыхъ частицъ, несомыхъ рѣкою, зависитъ отъ ихъ твердости, массы, формы и отъ скорости, которой онѣ обладаютъ въ моментъ удара. Рихтгофенъ [1]) справедливо замѣчаетъ, что корразія т. е. размытіе помощью твердыхъ частицъ, потому болѣе сильно дѣйствуетъ, чѣмъ эрозія (размытіе чистой водою), что толчекъ, сообщаемый твердымъ тѣломъ, сообщается сразу всей массой этого тѣла, и энергія удара не теряется на треніе, сопровождающее передвиженія и скольженія частицъ другъ по другу, какъ это бываетъ съ жидкостью.

Размытію способствуетъ размоченіе породъ водою и химическія реакціи, благодаря которымъ поверхностные слои въ твердыхъ породахъ распадаются на мелкія части. Кромѣ того вода растворяетъ многія вещества и уноситъ ихъ съ собою. Это есть *химическое* размытіе, совершающееся на счетъ *химической* энергія воды. Роль движенія здѣсь состоитъ только въ томъ, чтобы приносить ненасыщенную и уносить насыщенную растворомъ воду.

Вода рѣкъ содержитъ въ растворѣ углекислую известь, хлористый натрій, сѣрнокислую известь, угле и сѣрнокислую магнезію, кремнеземъ и т. д. [2]).

Ключевая вода богата растворимыми твердыми веществами; за то вода, происходящая отъ обильныхъ дождей, отъ таянія снѣга, не процѣженная сквозь почву, содержитъ весьма мало химически растворенныхъ веществъ. Поэтому во время весеннихъ водополей процентное содержаніе растворовъ, остав-

---

[1]) loc. cit. стр. 135.

[2]) J. Roth. Allgemeine und chemische Geologie I томъ. Berlin 1879 г. стр. 460.

ляющихъ воду прозрачной, меньше, чѣмъ въ меженное время. Такъ н. п. Тэмза на 10,000 частей воды (по вѣсу) несетъ весною у Кингстона, повыше Лондона, 2,379 твердыхъ химически растворенныхъ веществъ, а зимою 3,158. При замерзаніи химическія примѣси выдѣляются, за то въ остальной водѣ получается болѣе концентрированный растворъ. Вслѣдствіе этого, а тоже вслѣдствіе того, что зимою рѣки питаются преимущественно изъ ключей, максимумъ процентнаго содержанія солей обыкновенно соотвѣтствуетъ зимнему времени [1]).

Углекислой известью особенно богаты рѣки, протекающія сквозь мѣстности, покрытыя обильной растительностью и имѣющія известковую подпочву. Дождевая вода пропитывается углекислотою въ верхнихъ слояхъ почвы и проникнувъ въ подпочву растворяетъ много извести. Въ известковыхъ горахъ н. п. въ Карстѣ преобладаетъ химическое размываніе. Слѣдуя сначала по маленькимъ трещинамъ, вода размываетъ ихъ въ большіе подземные каналы. Въ подобныхъ странахъ цѣлыя рѣки пропадаютъ т. е. наземное теченіе смѣняется подземнымъ.

До недавняго времени полагали, что перенесеніе химическихъ растворовъ, оставляющихъ воду прозрачной, и перенесеніе механически взвѣшенной мути—вещи различныя. Между тѣмъ уже опыты Сиделля [2]) показали, что въ морской водѣ осажденіе мути идетъ по крайней мѣрѣ въ пятнадцатъ разъ скорѣе чѣмъ въ рѣчной. Затѣмъ болѣе обстоятельные опыты Брюера [3]) показали, что въ химически чистой водѣ тончайшая муть остается еще взвѣшенной по прошествіи шести лѣтъ Изъ этого Брюеръ заключаетъ, что тутъ къ механическому явленію присоединяется химическое, что образуются какіе-то растворы кремнеземныхъ соединеній. Наконецъ изслѣдованія Бэруса показали, что

---

[1]) J. Roth. loc. cit. стр 454.

[2]) См. Dana Manual of Geology 3 изд. стр. 677.

[3]) Brewer. On the suspension and sedimentation of clays Amer. Journ. of Sc. 3 сер 29 томъ стр. 1.

скорость осѣданія мути въ химически чистой водѣ вообще значительно меньше теоретической скорости, вычисленной при предположеніи, что имѣемъ дѣло съ чисто механическимъ паденіемъ мелкихъ тѣлъ въ водѣ. Повышеніе температуры, примѣсь солей, кислотъ ускоряютъ осѣданіе [1]). Однимъ словомъ, муть проявляетъ свойства *химическаго* раствора. Всякая частичка мути растворяется съ поверхности, разбухаетъ, окружается какъ-бы атмосферой болѣе легкаго полурастворенваго вещества. Такимъ образомъ ея плотность, а вслѣдъ за тѣмъ и скорость паденія уменьшаются. За то когда прибавимъ какую нибудь щелочь, кислоту, или вообще какое-нибудь легко растворимое въ водѣ вещество, то трудно растворимыя вещества, изъ которыхъ состоитъ муть, сейчасъ выдѣляются, скопляются и быстро осѣдаютъ.

Само собою понятно, что эта химическая растворимость мути въ высшей степени способствуетъ ея перенесенію проточной водою [2]). Зъ другой стороны очевидно, что осѣданіе мути при впаденіи рѣки въ море происходитъ нетолько отъ замедленія теченія, но въ гораздо большей степени отъ химическаго выдѣленія при смѣшеніи съ морской водою, содержащей соли, гораздо болѣе удоборастворимыя, чѣмъ разныя кремнеземныя соединенія, изъ которыхъ преимущественно состоитъ муть.

По тѣмъ-же самымъ причинамъ рѣки, отличающіяся большимъ содержаніемъ чисто химическихъ растворовъ, должны быть менѣе способны къ перенесенію мути, чѣмъ рѣки, находящіяся впрочемъ въ тѣмъ-же самыхъ условіяхъ, но менѣе сильно насыщенныя химическими растворами.

---

[1]) Barus. Subsidence etc. Bull. U. S. Geol. Surv. № 36 стр. 24.

[2]) Болѣе крупные продукты размытія истираются о дно и одни о другихъ, размельчаются и превращаются въ муть. Уже чисто механическое перенесеніе мути гораздо легче, чѣмъ перенесеніе болѣе крупныхъ веществъ. Къ тому присоединяется содѣйствіе химическихъ процессовъ. Такимъ образомъ даже при маломъ уклонѣ и скорости, обыкновенно господствующихъ на нижнемъ теченіи рѣкъ, возможно перенесеніе огромныхъ количествъ размельченныхъ твердыхъ веществъ.

ГЛАВА V.

Размытіе и отложеніе.

Всякая рѣка можетъ переносить только извѣстное количество твердыхъ веществъ, количество вообще тѣмъ большее, чѣмъ рѣка больше и чѣмъ скорость теченія больше. Поэтому, гдѣ съ одной стороны теченіе быстро, а съ другой готовый рыхлый матеріалъ находится въ изобиліи, тамъ проточной водою переносятся огромныя количества гальки, песку и мути.

Такъ н. п. въ сухомъ климатѣ Колорадскаго плоскогорья [1]) во время бездождія на склонахъ накопляется множество рыхлыхъ веществъ, происшедшихъ отъ вывѣтриванія. Мелкіе степные притоки Колорадо, обыкновенно остающіеся сухими, послѣ всякаго ливня превращаются въ бурные потоки. Эти потоки захватываютъ нагроможденный вывѣтриваніемъ матеріямъ въ такомъ изобиліи, что въ сущности по руслу несется не вода, а грязь. Даже по объему процентное отношеніе твердаго матеріала къ водѣ равно 3:1.

Способность переносить твердыя вещества увеличивается съ увеличеніемъ скорости (ср. прежнюю главу). Чѣмъ скорость больше, тѣмъ больше то количество твердыхъ веществъ, которое рѣка можетъ передвигать и предѣльная величина зеренъ, еще передвигаемыхъ водою, больше. Скорость не имѣетъ зна-

---

[1]) Dutton Tertiary history of the Grand Canon district II Mon. U. S. Geol. Surv. стр. 237.

ченія только для перенесенія химически растворенныхъ веществъ и тончайшей мути, которая есть отчасти тоже химическій растворъ.

Проточная вода одновременно несетъ частицы разной величины. Составъ того матеріяла, который въ данный моментъ въ извѣстномъ мѣстѣ переносится водою, зависитъ отъ того, какія вещества размывались на верхнемъ теченіи, потомъ отъ скоростей, господствующихъ сейчасъ повыше разсматриваемаго мѣста, наконецъ отъ длины пути, проходимаго несомыми частицами.

Вліяніе скоростей сказывается въ томъ, что при уменьшеніи скорости выдѣляются и отлагаются болѣе крупныя зерна, а при увеличеніи напротивъ того подбираются. Вліяніе длины пути сказывается въ томъ, что несомыя частицы по пути истираются однѣ о другія и о дно, а потому постоянно размельчаются.

У многихъ рѣкъ, особенно у тѣхъ, которыя вытекаютъ изъ горъ, скорость теченія уменьшается по направленію отъ источниковъ къ устью. Это даетъ поводъ къ выдѣленію болѣе крупныхъ частицъ. А такъ какъ рядомъ съ этимъ происходитъ размельченіе, то обыкновенно на горномъ теченіи рѣкою передвигается болѣе крупный матеріялъ съ малой примѣсью мелкаго, (ибо крупныя зерна еще не размельчены) но, чѣмъ дальше внизъ по теченію, тѣмъ вещества становятся мельче. Тотъ самый порядокъ наблюдается въ отложеніи наносовъ.

Далеко не всѣ увлекаемыя водою частицы несутся до самаго моря. Многія изъ нихъ опять падаютъ на дно, другія, двигавшіяся по дну, останавливаются. Такъ н. п., двигавшійся по дну камешекъ, наталкивается на другой, сообщаетъ ему скорость, а самъ останавливается или замедляетъ свое движеніе. Одна и та-же частица попадаетъ въ разныя струи, движущіяся съ различными скоростями. Благодаря вихревому безпорядочному движенію воды, твердыя вещества перемѣщаются въ

различныхъ направленіяхъ. Частицы увлекаются, опускаются на дно, опять подбираются и такъ дальше. Слѣдовательно можно сказать, что въ каждомъ мѣстѣ русла рядомъ происходитъ и размытіе и отложеніе. Но отношеніе этихъ двухъ различныхъ сторонъ дѣятельности рѣки различно смотря по условіямъ. Рѣка можетъ отлагать больше или меньше, чѣмъ размываетъ. Если она больше размываетъ, чѣмъ отлагаетъ, то насыщеніе твердыми веществами увеличивается, но только до нѣкотораго предѣла. При данномъ уклонѣ, формѣ русла и расходѣ [1]) рѣка можетъ переносить только извѣстное количество твердыхъ веществъ и сейчасъ выдѣляетъ всякій излишекъ.

Можно разсматривать состояніе рѣки или по отношенію къ ней самой, или по отношенію къ руслу. Въ первомъ случаѣ можно различать состояніе ненасыщенное, насыщенное и пересыщенное. Пересыщенное состояніе непрочно и неестественно. Рѣка не станетъ переносить больше твердыхъ веществъ, чѣмъ это возможно. Коль скоро, благодаря внѣшнимъ причинамъ, [н. п. обвалу большой массы веществъ со стѣнъ долины] дѣйствительное насыщеніе сдѣлается больше возможнаго при данныхъ условіяхъ полнаго насыщенія, сейчасъ весь излишекъ выдѣляется такъ, что рѣка остается въ насыщенномъ состояніи.

Во второмъ случаѣ можно различать состояніе, въ которомъ размытіе преобладаетъ надъ отложеніемъ, т. е. объемъ захватываемыхъ рѣкою веществъ больше объема отлагаемыхъ, во вторыхъ состояніе равновѣсія между размытіемъ и отложеніемъ, наконецъ состояніе, характеризуемое преобладаніемъ отложенія.

Состоянія первой категоріи соотвѣтствуютъ состояніямъ второй категоріи но не вполнѣ. Такъ н. п. Поуэлль и Дуттонъ

---

[1]) Перенесеніе твердыхъ веществъ зависитъ отъ скоростей, но такъ какъ насыщеніе въ свою очередь вліяетъ на скорость, [вслѣдствіе затраты энергіи на перенесеніе твердыхъ частицъ скорость уменьшается] то лучше разсматривать уклонъ, форму, размѣры русла и расходъ какъ независимыя перемѣнныя, а скорости и насыщеніе какъ зависимыя.

ошибаются [1]) говоря, что насыщенная рѣка не можетъ углублять своего русла. Дѣйствительно, представимъ себѣ, что рѣка, находящаяся въ равномѣрномъ и установившемся состояніи (ср. гл. II), въ извѣстномъ участкѣ вполнѣ насыщена извѣстными твердыми веществами. Нѣсколько дальше внизъ по теченію эти вещества вслѣдствіе истиранія сдѣлаются мельче, но рѣка можетъ переносить большее количество [и по вѣсу и по объему] мелкихъ частицъ, чѣмъ крупныхъ, а потому, если рѣка должна остаться насыщенной, то нужно къ ея грузу прибавить нѣкоторое новое количество твердыхъ веществъ. Само собою очевидно, что при такихъ условіяхъ русло должно углубляться или разширяться, или и то и другое вмѣстѣ. Конечно, насыщенная рѣка углубляетъ свое русло въ далеко меньшей степени, чѣмъ ненасыщенная, ибо размельченіе твердыхъ частицъ идетъ медленно и замѣна несомыхъ рѣкою частицъ вновь подбираемыми совершается по частямъ и постепенно.

Способность переносить твердыя вещества не должна быть разсматриваема какъ функція отъ средней скорости. Такъ н. п. при той-же самой средней скорости и расходѣ мелководная и широкая рѣка обладаетъ большими подонными скоростями, чѣмъ глубокая и узкая, а потому можетъ катить больше гальки (или болѣе крупную) по дну.

Смотря по величинѣ и по распредѣленію скоростей извѣстная рѣка можетъ, положимъ, передвигать извѣстной величины гальку въ совершенно опредѣленномъ количествѣ, но кромѣ этой самой крупной гальки рѣка можетъ передвигать нѣкоторое количество менѣе крупной, потомъ еще нѣкоторое количество песку, затѣмъ еще извѣстное количество мути. Рѣка не несущая самой крупной гальки, но обладающая достаточной для этого скоростью, можетъ за то нести больше песку, при-

---

[1]) См. Dutton loc. cit. стр. 76.

чемъ этотъ излишекъ будетъ опредѣленный [1]). Дѣйствительный составъ и качества переносимаго матеріяла опредѣляются, конечно, нетолько способностью, но и возможностью т. е. всѣми тѣми условіями и отношеніями, въ которыхъ находится данная рѣка.

Филипсонъ говоритъ [2]), что на счетъ размытія существуетъ такая путаница, что одинъ авторъ объясняетъ сильное размытіе обиліемъ несомой гальки, а другой той-же причиной объясняетъ ничтожность размытія. Очевидно авторы, о которыхъ говоритъ Филипсонъ, не задавали себѣ вопроса о томъ, въ какомъ состояніи находились разсматриваемыя ими рѣки, ибо дѣло не въ томъ, сколько рѣка несетъ гальки или даже сколько размываетъ, а въ томъ, больше-ли размываетъ и уноситъ, чѣмъ отлагаетъ и приноситъ, или наоборотъ. Преобладаніе размытія надъ отложеніемъ и обратно возможно при всякихъ скоростяхъ [3]), но первое всегда сопровождается углубленіемъ и расширеніемъ долины, второе возвышеніемъ русла и дна долины.

Обиліе гальки и песку (ср. прежнюю главу) способствуетъ размытію русла, но только до нѣкоторыхъ предѣловъ. Само собою очевидно, что, когда движущаяся галька и песокъ образуютъ нѣсколько слоевъ, то всѣ слои, кромѣ самаго нижняго,

---

[1]) Мы здѣсь указываемъ на то, что обыкновенно перенесеніе одного матеріала до нѣкоторой степени исключаетъ присутствіе другаго. Само собою очевидно, что если вслѣдствіе отсутствія гальки, рѣка несетъ только песокъ, хотя могла-бы нести и гальку, то для перенесенія песку имѣется больше энергіи, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда рѣка уже несетъ гальку. Замѣтимъ однако, что у рвущихъ горныхъ потоковъ примѣсь мелкихъ твердыхъ частицъ иногда столь значительна, что плотность жидкости замѣтно увеличивается. Это въ свою очередь способствуетъ перенесенію камней. Подобные случаи бываютъ при внезапномъ размытіи запрудъ, образованныхъ обвалами. Ср. Lapparent. loc. cit. стр. 188.

[2]) Phillipson. Ein Beitrag zur Erosionstheorie. Peterm. Mitth. 1886 г. стр. 70.

[3]) Н. п. потокъ, выходящій на равнину отлагаетъ гальку при тойже скорости, при которой иная рѣка находится въ преимущественно размывающемъ состояніи.

никакого непосредственнаго отношенія къ размытію дна имѣть не могутъ.

Размытіе хотя не прекращается но дѣлается совершенно ничтожнымъ съ того момента, когда скорости воды у дна окажутся меньше тѣхъ скоростей, которыя нужны для того, чтобы отрывать и уносить частицы породъ, составляющихъ дно и берега. Положимъ н. п. что рѣка протекаетъ среди песку съ зернами средней величины *a*. Размытіе сдѣлается ничтожнымъ съ того момента, когда подонныя скорости окажутся меньше тѣхъ скоростей, при которыхъ возможно передвиженіе песчинокъ величины *a*. Начиная съ этого момента размытіе ограничивается только тѣми попадающимися то здѣсь то тамъ маленькими зернами, которыя всегда примѣшаны къ болѣе крупнымъ,— кромѣ того химическое размытіе, которое не зависитъ отъ скорости теченія, тоже не прекращается.

Уже Гуліельмини [1]), знаменитый итальянскій гидравликъ конца XVII и начала XVIII столѣтій говоритъ, что размытіе прекращается при нѣкоторомъ конечномъ уклонѣ вообще тѣмъ меньшемъ, чѣмъ рѣка больше, а породы мягче и называетъ подобное состояніе упрочившимся [stabilito]. Гуліельмини, Вентуроли [2]), Доссъ [3]), Буссинекъ [4]), Коллиньонъ [5]), Рихтгофенъ [6]) всѣ они полагаютъ, что переходъ къ упрочившемуся состоянію совершается тогда, когда сопротивленіе породъ сдѣлался равнымъ энергіи рѣки. Но Вентуроли [7]) полагалъ, что переходъ къ прочному состоянію зависитъ тоже отъ мутности воды (torbi-

---

[1]) Guglielmini. Sulla natura de fiumi 1697 см. Dausse Etudes d'hydr. pratique Mem. Sav. etr. 20 томъ (1872) стр. 340.

[2]) ibidem. (Venturoli Elementi d'idraulica 3 и д. Milano 1818).

[3]) ibidem.

[4]) Boussinesq. Essai etc. стр. 156.

[5]) Collignon. Cours de méc. стр. 286.

[6]) Richthofen Führer etc. стр. 141.

[7]) См. Dausse loc. cit. стр. 341.

dezza). Поуэлль и Дуттонъ [1]) полагаютъ, что это состояніе совпадаетъ съ состояніемъ полнаго насыщенія. Мы уже выше указали на то, что насыщенная рѣка можетъ въ то-же самое время углублять свое русло, слѣдовательно не можемъ признать этого взгляда правильнымъ тѣмъ болѣе, что рѣка можетъ оказаться въ насыщенномъ состояніи при какихъ угодно скоростяхъ а размытіе прекращается при опредѣленныхъ скоростяхъ. Наконецъ состояніе, о которомъ говорятъ указанные американскіе ученые, не можетъ распространиться на все теченіе, ибо насыщенная рѣка должна гдѣ нибудь находиться въ преимущественно размывающемъ состояніи. Дѣйствительно, еслибы русло нигдѣ не подвергалось размытію, откуда взялись-бы насыщающіе рѣку продукты размытія. Когда размытіе прекращается на всемъ теченіи, то очевидно тѣмъ самымъ прекращается и отложеніе и русло не подвергается никакимъ измѣненіямъ. Подобное состояніе можетъ быть конечно названо «прочнымъ». Строго говоря, оно можетъ быть осуществлено только послѣ истеченія безконечно долгаго времени. Тѣмъ не менѣе очевидно, что чѣмъ размытіе болѣе ничтожно, тѣмъ состояніе рѣки болѣе сходно съ предѣльнымъ, прочнымъ неразмывающимъ состояніемъ. Уклонъ въ прочномъ состояніи очевидно тѣмъ больше, чѣмъ породы болѣе способны сопротивляться размытію, ибо, чѣмъ больше было сопротивленіе породы, тѣмъ больше были тѣ предѣльныя скорости у дна и береговъ, при которыхъ размытіе прекратилось. Съ другой стороны, такъ

---

[1]) Dutton. Tert. hist. Grand Canon district. II Mon. U. S. Geol. Surv. стр. 76. Вопросомъ предѣловъ размытія занимался тоже Пенкъ (Penck. Das Endziel der Erosion Verh. VIII deutsch. Geogr. tages.). Оригинальная статья Пенка была для меня недоступна, но изъ реферата Дрыгальскаго (Neues Jahrb. für Min. 1891 г. I, 2 стр. 52) вижу. что физическая сторона вопроса разработана неудовлетворительно. Пенкъ между прочимъ указываетъ на то, что нивелляціи суши вообще, а водораздѣловъ спеціально содѣйствуетъ размытіе дождемъ, котораго капли, падая съ высоты, обладаютъ сравнительно значительной кинетической энергіей.

какъ «ceteris paribus» у большей рѣки скорости вообще и подонныя спеціально больше чѣмъ у малой, то предѣльные уклоны должны быть тѣмъ меньше, чѣмъ рѣка больше. Такъ какъ рѣка увеличивается по мѣрѣ присоединенія притоковъ, то слѣдуетъ ожидать, что во всякомъ состояніи болѣе или менѣе близкомъ къ предѣльному уклонъ долженъ убывать отъ верховьевъ къ устью.

Малыя рѣки очень часто находятся всецѣло въ области распространенія одной породы и, если эта порода не особенно тверда, то не нужно было очень много времени для того, чтобы создать уклоны, правильно убывающіе отъ верховьевъ къ устью. Поэтому указанная черта теченія очень часто наблюдается у малыхъ рѣкъ и потоковъ. Такъ н. п. у Альпійскихъ потоковъ правильное убываніе уклона наблюдали Сюрелль [1]) и другіе, у потоковъ, стекающихъ по склонамъ вулканическихъ конусовъ, Дэна [2]). У большихъ рѣкъ нельзя ожидать столь правильныхъ отношеній, но убываніе средняго уклона наблюдается весьма часто. Такъ н. п. у Эльбы въ Богеміи средній уклонъ поверхности воды [3]) — 0,00035, а вблизи Гамбурга 0,0000315, у Рейна отъ Констанціи до Страсбурга 0,00114, отъ Страсбурга до Ротердама 0,00045, у Дуная отъ Донауэшингена до Вѣны 0,00049, отъ Вѣны до моря 0,00009. У Миссисипи уклонъ у Каиро 0,000094, у Колумбуса 0,000108, потомъ постепенно уменьшается до 0,000022 у самаго раздѣ-

---

[1]) Surell. Etudes sur les torrents des Hautes alpes. Къ сожалѣнію эта книга была для меня недоступной.

[2]) Dana. Manual of Geology стр. 638 и On the denudation in the Pacific. Rep. Exp. Wilkes 1863 г.

[3]) При гидрологическихъ измѣреніяхъ опредѣляется уклонъ поверхности воды. Мѣстный уклонъ въ руслахъ неправильной формы есть вещь неопредѣленная. Само собою понятно, что не смотря на измѣненія глубины, можно на длинныхъ участкахъ по уклону поверхности судить о среднемъ уклонѣ дна.

ленія на рукава. Въ рукавахъ, какъ и слѣдовало ожидать, уклоны опять нѣсколько больше—0,000031—0,000037 [1]).

Нѣкоторые, какъ н. п. Грэфъ [2]), Гринвудъ [3]), Тайлоръ [4]) полагаютъ, что вертикальные продольные профили рѣкъ должны имѣть видъ параболъ, другіе н. п. Оппикоферъ [5]) думаютъ, что эти профили должны имѣть видъ циклоидъ. Это заблужденіе основано на поверхностномъ сходствѣ всякой кривой, обращенной вогнутостью къ верху, а вмѣстѣ съ тѣмъ асимптотически приближающейся къ горизонтали съ кускомъ параболы или циклоиды. Видъ профиля зависитъ прежде всего отъ распредѣленія притоковъ, ихъ величины, насыщенія и т. д., не говоря уже объ измѣненіяхъ кривизны, обусловленныхъ разнообразіемъ породъ, составляющихъ стѣны русла.

Размытіе идетъ «ceteris paribus» тѣмъ медленнѣе, чѣмъ порода тверже, а потому выходы твердыхъ породъ обыкновенно сопровождаются нѣкоторымъ измѣненіемъ характера теченія и соотвѣтственнаго продольнаго профиля дна.

Всякое теченіе можетъ быть раздѣлено на участки [6]), гдѣ преобладаетъ размытіе и участки, гдѣ преобладаетъ отложеніе. Количество вторыхъ всегда равно количеству первыхъ, они всегда являются попарно, но послѣдній участокъ отложенія мо-

---

[1]) Rühlmann loc. cit. стр. 352 и 353. Въ иныхъ случаяхъ большіе уклоны верхняго теченія несомнѣнно происходятъ отъ того, что рѣка вытекаетъ изъ горъ, а не отъ того, что она уже успѣла придти въ приблизительно прочное состояніе.

[2]) Graëff. Memoire sur les Courbes des débits. Mem. Sav. Etr. 21 томъ стр. 634.

[3]) Greenwood см. Oldham. On the law etc. Quart. Journ. Geol. Soc. London 1888 стр. 734.

[4]) Tylor. On the action of denuding agencies. Особое приложеніе къ Geol. Magazine за 1873 г. Безсвязный бредъ разными теоріями.

[5]) Phillipson loc. cit. стр. 73 ср. Trautweiler. Natürliche Gefällsverhältnisse der Flüsse. Gaea. 1883 г. стр. 449.

[6]) Строго говоря, длина участковъ, гдѣ размытіе абсолютно равно отложенію, равна нулю.

жетъ находиться уже внѣ рѣки, въ морѣ, или озерѣ, или въ другой рѣкѣ.

Распаденіе рѣки на участки размытія и участки отложенія есть результатъ внѣшнихъ причинъ, ибо рѣки сами по себѣ не переходятъ въ преимущественно отлагающее состояніе. Нужно, чтобы какая нибудь внѣшняя причина дала поводъ къ уменьшенію скоростей ниже того предѣла, при которомъ рѣка еще можетъ переносить имѣющіеся продукты размитія, или чтобы количество ихъ чрезмѣрно увеличилось. Если насыщеніе увеличивается вслѣдствіе впаденія притока, несущаго много продуктовъ размытія, то причина перехода въ преимущественно отлагающее состояніе въ сущности сводится къ первому случаю, ибо разсматривая рѣку, образовавшуюся изъ соединенія обѣихъ рѣкъ, какъ продолженіе притока, всегда найдемъ, что скорости ея теченія недостаточны для перенесенія того количества или столь крупныхъ продуктовъ размытія, какіе приносятся притокомъ. Причина уменьшенія скоростей чаще всего заключается въ уменьшеніи уклона подъ вліяніемъ нѣкоторыхъ топографическихъ и тектоническихъ условій, н. п. можетъ случиться, что рѣка переходитъ съ болѣе крутой покатости на менѣе крутую, или пересѣкаетъ выходы твердыхъ породъ и т. п. Точно также причиной отложенія бываетъ подпираніе моремъ, озеромъ или другой рѣкою. Если главная рѣка течетъ быстро, если въ морѣ у берега существуетъ сильное теченіе, то вода впадающей рѣки и несомые ею продукты размытія увлекаются, въ противномъ случаѣ является пересыщеніе и наносы отлагаются вблизи устья. Область отложенія очень часто распространяется на впадающую рѣку. Такъ н. п., выходя изъ устья въ спокойное море, неимѣющее ни теченій, ни приливовъ и отливовъ, рѣка приводитъ въ движеніе воду моря, но тѣмъ самымъ теряетъ свою энергію и скорость ея уменьшается. Такъ какъ скорость теченія у рѣкъ регулируется снизу вверхъ, то замедленіе теченія при выходѣ изъ устья сообщается вверхъ по рѣ-

кѣ, что даетъ поводъ къ отложенію наносовъ на низовьяхъ. Когда существуютъ теченія, приливы и отливы, то условія, конечно, осложняются.

Наносы отлагаются слоями, одни на другихъ и, если есть достаточно мѣста, распространяются во всѣ стороны, образуя характеристичный, подобный вѣеру, конусъ отложенія, по которому вода стекаетъ во всѣ стороны и раздѣляется на рукава. Если дѣло не доходитъ до раздѣленія на рукава, то по крайней мѣрѣ наблюдается расширеніе и обмелѣніе русла.

Очень часто накопленія наносовъ возвышаются надъ окрестною мѣстностью. Это наблюдается тамъ, гдѣ рѣка переходитъ изъ большей покатости на меньшую, изъ одной террасы на другую. Такъ какъ нижній предѣлъ той скорости, при которой твердыя частицы выдѣляются и больше уже не сдвигаются, тѣмъ больше, чѣмъ частицы крупнѣе, то, смотря по характеру отлагаемаго матеріяла, уклонъ поверхности конуса отложенія бываетъ то больше, то меньше. Большая рѣка обладаетъ большей скоростью при меньшемъ уклонѣ, а потому уклоны поверхности ея конуса отложенія «ceteris paribus» меньше, чѣмъ у малой рѣки, но съ другой стороны тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе отлагающіяся частицы.

Накопленіе наносовъ увеличивается до тѣхъ поръ, пока продукты размытія приносятся въ изобиліи съ верхняго теченія. Но количество ихъ уменьшается то вслѣдствіе ослабленія размытія при уменьшеніи уклоновъ, обусловленномъ прогрессомъ размытія, то вслѣдствіе того, что рѣка на верхнемъ теченіи углубилась до пластовъ, хорошо сопротивляющихся размытію. Тогда отложеніе наносовъ можетъ не только прекратиться, но даже замѣниться размытіемъ. Именно, если передъ накопленіемъ наносовъ есть участокъ размытія, то этотъ послѣдній, удлинняясь своимъ верхнимъ концомъ, вторгается въ область накопленія наносовъ и вымываетъ посреди старыхъ наносовъ новый глубокій и узкій каналъ. Иной разъ накопленіе

наносовъ еще увеличивается во верхней, задней своей части а въ нижней уже размывается.

Происшедшій отъ размытія стараго конуса отложенія матеріялъ отлагаеття въ другомъ мѣстѣ и образуетъ вторичный конусъ [1]). Продукты размытія могутъ попасть на другое уже уменьшающееся наконленіе, пріостановить его размытіе, даже вновь увеличить до большихъ чѣмъ прежде размѣровъ. Тамъ, гдѣ много участковъ размытія и отложенія, гдѣ условія сложны или измѣнчивы, образованіе и уничтоженіе накопленій на одномъ и томъ-же или на разныхъ мѣстахъ можетъ повторяться много разъ [2]).

Конусы отложенія, находящіеся у устья притоковъ, очень часто размываются потому, что главная рѣка вновь углубляетъ свое русло и заставляетъ притоки слѣдовать за собою. Иногда углубленіе главной рѣки происходитъ настолько быстрѣе углубленія притока, что онъ соединяется съ главной рѣкой водопадомъ. Примѣры этого явленія и другихъ ему подобныхъ встрѣчаются у Лэвля [3]), Рютимейера [4]) и другихъ авторовъ.

Наоборотъ бываетъ тоже обратное явленіе. Главная рѣка отлагаетъ такъ много наносовъ и такъ быстро возвышаетъ свое русло и долину, что притоки, не будучи въ состояніи столь-же быстро возвышать свои русла, запружаются и образуютъ озера. Примѣромъ этого явленія могутъ служить лѣвые притоки Дуная отъ Галаца до устья [5]). Многіе изъ притоковъ Волги

---

[1]) Ср. Oldham. On the law etc.... Quart. Journ. Geol. Soc. London 1888 г. стр. 735. Ольдгэмъ называетъ такое вторичное накопленіе: secondary fan.

[2]) Rütimeyer. Ueber Thal und Seebildung Basel. 1874 г. стр. 32. Рютимейеръ кажется полагаетъ, что причина многократнаго образованія и уничтоженія накопленій состоитъ въ томъ, что поочередно размываются выходы твердыхъ породъ, пер:сѣкающіе русло рѣки. Во всякомъ случаѣ это только одна изъ причинъ. Впрочемъ Рютимейеръ имѣлъ, кажется, въ виду спеціально Рейссъ и ея притоки.

[3]) Löwl. Ueber Thalbildung. Prag. 1884 г.

[4]) Rütimeyer loc. cit.

[5]) Ср. Richthofen loc. cit. стр. 266.

подпираются ея водою во время весеннихъ разливовъ и образуютъ у своихъ устьевъ временныя озера.

Многократнымъ накопленіемъ и размытіемъ наносовъ объясняется происхожденіе многихъ продольныхъ террасъ. Мы только что показали, что однѣ уже реакціи между различными частями теченія даютъ поводъ то къ образованію накопленій, то къ размытію ихъ. Замѣтимъ, что положительныя измѣненія уровня моря или озера, въ которое впадаетъ рѣка, тоже даютъ поводъ къ образованію новыхъ накопленій повыше старыхъ и къ одновременному погруженію старыхъ, наоборотъ отрицательныя измѣненія уровня моря заставляютъ рѣку глубже врѣзаться въ старые наносы, нести дальше матеріялъ и отлагать его пониже старыхъ наносовъ. Потому-то увеличивающіяся дельты находятся по большей части на тѣхъ берегахъ, гдѣ уровень моря понижается [1]).

Само собою очевидно, что террасы могутъ тоже образоваться вслѣдствіе измѣненія климата [2]) или орографическихъ условій, ибо эти причины тоже заставляютъ рѣку переходить изъ размывающаго состоянія въ намывающее и обратно. Прежніе авторы слишкомъ охотно пользовались послѣдними причинами [3]). Между тѣмъ нельзя «à priori» разсматривать продольныя террасы какъ доказательства измѣненія климата или поднятія нѣкоторой части бассейна рѣки. Нужно прежде убѣдиться, насколько образованію террасъ могли способствовать реакціи между разными частями рѣчной системы и колебанія уровня моря.

---

[1]) Credner. Die Deltas. 56 Ergänzh. Pet. Mitth.

[2]) Такъ н. п. размытіе усиливается, когда весенніе разливы увеличиваются.

[3]) Penck. Ueber die Periodicität in der Thalbildung Verh. Gesell. der Erdkunde zu Berlin 1884 г. стр. 39. Работа Пенка, хотя приписываетъ образованіе террасъ климатическимъ причинамъ, не заслуживаетъ на этотъ упрекъ. Онъ указываетъ на то, что не одна рѣка и не въ одномъ мѣстѣ, а многія рѣки на значительныхъ участкахъ отлагали массу щебня. Онъ связываетъ это явленіе съ ледниковымъ періодомъ.

Къ внезапному увеличенію насыщенія даетъ поводъ впаденіе притока, несущаго больше продуктовъ размытія, чѣмъ главная рѣка въ состояніи переносить. Такъ н. п. въ руслѣ Миссисипи послѣ впаденія каждаго изъ болѣе крупныхъ притоковъ находятся накопленія наносовъ [1]). Тоже самое наблюдается у многихъ рѣкъ.

Когда накопленія наносовъ, приносимыхъ притокомъ, очень значительны, то дѣло можетъ дойти до запруженія главной рѣки и до образованія озера. Форель [2]) склоненъ думать, что нѣчто подобное способствовало образованію Женевскаго озера. Конечно, такое запруженіе возможно только въ узкихъ горныхъ долинахъ.

Точно также причиной образованія накопленій бываютъ обвалы стѣнъ долины. У равнинныхъ рѣкъ обвалъ можетъ нетолько довести до образованія переката, но даже заставить рѣку измѣнить свое теченіе, чтобы обойти запруду. Въ узкихъ горныхъ долинахъ случается, что обвалъ совершенно запружаетъ рѣку [3]). Повыше плотины образуется озеро, существующее до тѣхъ поръ, пока переливающаяся черезъ край плотины рѣка не размоетъ ее и не спуститъ озера. Но исчезновенію такихъ плотинныхъ озеръ еще больше способствуетъ возвышешеніе ихъ дна наносами, приносимыми впадающими въ него горными потоками. Въ результатѣ послѣ исчезновенія озера въ долинѣ остается поперечная терраса, иногда достигающая цѣлыя сотни метровъ высоты.

Верховья рѣкъ остаются въ преимущественно размывающемъ состояніи, ибо позади ихъ нѣтъ участка рѣки, посылающаго имъ свои продукты размытія. Даже въ томъ, впрочемъ неосуществимомъ случаѣ, когда рѣка питается исключительно

---

[1]) Ср. Warren. Valley of Minnesota and Missisipi Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 16 томъ стр. 420.

[2]) Forel. Le Leman Lausanne 1892 г. стр. 247 и слѣд.

[3]) Löwl. Ueber Thalbildung Prag. 1884 г. стр. 62, 81.

источниками, размытіе верховьевъ имѣетъ мѣсто съ той разницею, что размытіе на поверхности замѣняется подземнымъ [1]); образуются полости, своды которыхъ должны когда нибудь обрушиться. Иногда верховья вторгаются въ бассейны другихъ рѣкъ или наоборотъ сокращаются. Во многихъ случаяхъ рѣки замѣтно удлиняются своимъ верхнимъ концомъ и отбираютъ у сосѣднихъ рѣкъ ихъ притоки. Удлиняющаяся своимъ верхнимъ концомъ рѣка пересѣкаетъ другую и такимъ образомъ съ начала даетъ поводъ къ нѣкоторому раздвоенію [2]) [бифуркаціи] теченія. Чаще всего пересѣкающая рѣка сильнѣе углубляется, чѣмъ пересѣкаемая, а потому захватываетъ въ свою пользу весь ея верхній участокъ.

Условія, способствующія удлиненію рѣкъ верхнимъ концомъ суть слѣдующія: 1) Значительная разность уровня между русломъ рѣки и тѣми возвышенностями, въ которыхъ находится ея бассейнъ питанія. 2) Присутствіе легко размываемыхъ породъ на водораздѣлахъ. 3) Абсолютное и относительное обиліе осадковъ въ бассейнѣ питанія. При равенствѣ прочихъ условій удлиняются рѣки того склона, на которомъ выпадаетъ больше осадковъ.

Въ мѣстахъ удлиненія рѣкъ и вообще всюду, гдѣ образованіе русла и долины находятся еще въ первой фазѣ, всегда наблюдается сильное мѣстное увеличеніе уклона (torrent portion) въ схемѣ размытія Дэны [3]).

Это мѣстное увеличеніе уклона есть прямой результатъ самаго хода размытія. Мелкіе ручьи, маленькія дождевыя струй-

---

[1]) Иные говорятъ, что размытіе самаго водораздѣла равно нулю, но слѣдуетъ помнить, что онъ размывается дождевою водою, которая, падая съ высоты, обладаетъ нѣкоторой кинетической энергіей, во вторыхъ склоны, находящіеся по обѣимъ сторонамъ водораздѣла размываются; а потому водораздѣлъ долженъ въ концѣ концовъ обвалиться.

[2]) Ср. Haase. Ueber Bifurcationen. etc.... Pet. Mitth. 1886 г. стр. 195.

[3]) Dana Manual of Geology II изд. 1875 г. стр. 638 ср. тоже Richthofen loc. cit. стр. 139.

ки, стекающія по склону, отклоняются малыми неровностями почвы и т. п. причинами то вправо, то влѣво, а потому должны встрѣтиться. Но встрѣча двухъ струй проточной воды всегда равняется ихъ соединенію, ибо онѣ не отражаются другъ отъ друга, а пройти одна сквозь другую тоже не могутъ. Въ этомъ-то заключается главная причина соединенія рѣкъ во все большія и большія. И такъ, мелкія струйки дождевой воды соединяются въ нѣсколько большій ручей. Энергія такого ручья всегда больше энергіи составляющихъ струекъ, ибо масса воды больше, а на болѣе или менѣе однообразномъ покатомъ склонѣ скорость теченія скорѣе увеличивается, чѣмъ уменьшается. И такъ обыкновенно вымывается рытвына, болѣе глубокая внизу склона, чѣмъ вверху. Дальнѣйшее углубленіе идетъ снизу вверхъ. Вскорѣ углубленіе внизу склона доходитъ до того, что уклонъ уменьшается ниже того предѣла, при которомъ въ виду даннаго насыщенія ручеекъ переходитъ въ преимущественно отлагающее состояніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ мѣсто, гдѣ размывающая энергія доходитъ до максимума, оказывается дальше сзади. На нашей схемѣ см. F. 1, *a* — *a* обозначаетъ «torrent portion» Дэны. Участокъ *a*—*a* имѣетъ обыкновенно всѣ характеристическія черты потока, ямы на днѣ, водопады, рѣзкіе повороты и т. д. Быстрому отступленію участка *a*—*a* способствуетъ нетолько болѣе энергичное размытіе, обусловленное значительнымъ уклономъ, но также частые обвалы. Въ рыхлыхъ городахъ очень часто случается, что уклонъ въ какомъ нибудь мѣстѣ «torrent portion» дѣлается больше угла покоя.

Въ рыхлыхъ породахъ противуположность между быстрымъ размытіемъ участка *a*—*a* и медленнымъ повыше *a* усиливается еще тѣмъ, что повыше *a* склонъ обыкновенно покрытъ растительностью значительно увеличивающей сопротивленіе размытію. Мелкія дождевыя струйки не въ состояніи размывать верхній скрѣпленный растительностью слой почвы. Разумѣется, скрѣпленіе поверхностнаго слоя почвы не можетъ помѣшать ни под-

мыванію, ни образованію осыпей и обваловъ на впереди лежащей «torrent portion» и захватывающихъ почву повыше точки *a*.

И такъ, вліяніе растительности сводится преимущественно къ тому, что она мѣшаетъ образованію зачатковъ оврага.

Докучаевъ замѣчаетъ [1]), что развитію оврага, особенно-же образованію вертикальныхъ обваловъ способствуютъ выходы ключей на днѣ и въ стѣнахъ оврага. Этотъ факторъ оказываетъ свое вліяніе съ того момента, когда дно оврага дойдетъ до водоупорныхъ пластовъ.

Даже тогда, когда рытвина образовалась сверху внизъ, дальнѣйшее ея углубленіе идетъ снизу вверхъ. Вообще углубленіе русла идетъ всегда снизу вверхъ. Дѣйствительно, положимъ, что гдѣ нибудь на днѣ рѣки или на склонѣ образуется углубленіе (см. F. 2). Всегда уклонъ уменьшается на передней, а увеличивается на задней сторонѣ выемки. Слѣдовательно размытіе усиливается на задней сторонѣ выемки и увеличиваетъ ее заднимъ ходомъ; напротивъ того на передней сторонѣ выемки размытіе слабѣетъ. Быстро стекающей по заднемъ склонѣ выемки водою въ точкѣ *m* долбится болѣе или менѣе глубокая яма. Можно хорошо прослѣдить первыя фазы образонія и углубленія рытвинъ на правильныхъ склонахъ желѣзнодорожныхъ выемокъ. 1. *Фаза*: образованіе рытвины нѣсколько болѣе глубокой внизу склона. 2. *Фаза*: обвалы внизу склона и образованіе ломаннаго профиля дна; внизу меньшій уклонъ, нѣсколько выше крутой уклонъ, еще выше опять меньшій уклонъ. Дальнѣйшихъ фазъ не видно, такъ какъ администрація желѣзныхъ дорогъ старается прекратить дальнѣйшее образованіе овраговъ и спѣшитъ починить испорченные склоны.

Если какая нибудь причина даетъ поводъ къ возобновленію или къ усиленію размывающей дѣятельности, то всегда

---

[1]) Способы образованія долинъ. С.-Петерб. 1878 г. стр. 63.

оказывается, что вліяніе ея доходитъ до максимума въ одной или нѣсколькихъ точкахъ теченія. Начиная съ такой точки, размытіе отступаетъ вверхъ по теченію, т. е. всякая такая точка даетъ начало къ образованію своего участка размытія, удлиняющагося верхнимъ концомъ.

Новобразующіяся накопленія наносовъ запруживаютъ вышележащій участокъ теченія. Вслѣдствіе этого скорость на этомъ участкѣ уменьшается [1]) и новые наносы отлагаются нетолько поверхъ но и позади старыхъ. Такимъ образомъ участокъ отложенія тоже увеличивается своимъ верхнимъ концомъ.

---

[1]) Ср. выше то, что было сказано о подпираніи моремъ.

ГЛАВА VI.

Извилины.

Извилистость теченія есть общій характеристическій признакъ рѣкъ. Разсматривая очертанія какого угодно теченія, всегда найдемъ, что можно провести нѣкоторую идеальную линію, какъ-бы ось теченія. Настоящее теченіе уклоняется то въ ту, то въ другую сторону этой идеальной линіи. Изгибы теченія всегда болѣе или менѣе округлены. Сильно развитыя извилины принимаютъ форму петель. Участки теченія, совершенно лишенные изгибовъ, крайне рѣдки. У большихъ рѣкъ, гдѣ стрежень очень часто отчетливо выдѣляется среди остальнаго теченія, извилины стрежени бываютъ обыкновенно еще болѣе изогнуты, чѣмъ извилины главнаго теченія, а иногда короче. Само собою очевидно, что за исключеніемъ нѣкоторыхъ второстепенныхъ признаковъ, извилины стрежения представляютъ собою явленіе, совершенно сходное съ извилинами самаго теченія. Точно также очевидно, что всѣ извилины, начиная отъ слабо изогнутыхъ и и кончая петлеобразными, принадлежатъ къ одной категоріи явленій.

Уже одна общность явленія доказываетъ, что происхожденіе извилинъ не можетъ быть объяснено вліяніемъ тектоники и топографіи мѣстности. Это становится особенно яснымъ, если обратимъ вниманіе на то, что наиболѣе извилистыя теченія находятся именно среди наносныхъ равнинъ. Здѣсь почва создана самой рѣкою, слѣдовательно, утверждая, что извилины обра-

зовались въ зависимости отъ строенія почвы, мы бы попали въ нѣкотораго рода «circulus vitiosus». Извилины могутъ образоваться среди абсолютно однородной и всюду одинаковой породы, среди совершенно однообразной равнины.

Уже Лекрэ [1]) говоритъ, что настоящая причина образованія извилинъ, размытіе. Тоже самое говоритъ и Ляелль. Но Зонкляръ, Бэръ, Пэшель [2]) выражаются болѣе опредѣленно. Они указываютъ на то, что въ извилинѣ вода размываетъ вогнутый берегъ и отлагаетъ наносы на выпукломъ. Такимъ образомъ извилина должна сама по себѣ все дальше развиваться.

Извилины появляются не одиноко, а цѣлыми серіями. Обыкновенно говорятъ, что это результатъ попеременнаго отраженія воды то отъ одного, то отъ другого берега, причемъ уголъ отраженія равенъ углу паденія [3]). Хотя основная мисль этого взгляда справедлива, однако подведеніе отраженія воды подъ законы отраженія твердыхъ упругихъ тѣлъ не можетъ быть строго оправдано. Отраженіе воды отъ береговъ есть сложное явленіе. Не всѣ частицы воды стремятся съ одинаковой скоростью, движеніе отражаемой струи зависитъ отъ движенія всей окружающей воды. При большой скорости, н. п. у горныхъ потоковъ, отраженіе сопровождается бурнымъ движеніемъ, образованіемъ вихрей у того мѣста, гдѣ вода ударяется о берегъ [4]). Бываютъ случаи, когда уголъ отраженія вовсе не равенъ углу

---

[1]) Le Creulx. Recherches sur la formation des rivières Paris 1804 г. стр. 52.

[2]) Sonklar Allgem. Orogr. приведено по Schneider'у. Studien über Thalbildung etc. Zeitschr. Gesell. Erdkunde. Berlin 1883 г. стр. 44.

E. v. Baer. Studien aus dem Gebiete der Naturwiss. Pet. 1873 г. стр. 125

Peschel.—Leipoldt. Phys. Erdkunde II томъ стр. 389.

[3]) Reclus-Ule. Die Erde Leipzig 1874 г. I томъ стр. 269.

Докучаевъ. Матер. для оцѣнки земель Нижег. губ. вып. XIII. С.-Пет. 1886 г. глава I стр. 8.

Никитинъ. Общая Геол. карта Россіи листъ 56. Труды Геол. ком. I, 2. стр. 110.

[4]) Водовороты въ «колѣнахъ» т. е. въ мѣстахъ отраженія встрѣчаются очень часто и у тихихъ рѣкъ.

паденія. Такъ н. п. прямая струя, встрѣчая стѣну, стоящую перпендикулярно къ направленію ея движенія, раздѣляется на двѣ струи, текущія вдоль преграды въ противуположныхъ направленіяхъ. Здѣсь уголъ паденія 0°, а углы отраженія 90° и —90°. И такъ, уголъ отраженія можетъ быть то больше, то меньше угла паденія, смотря по условіямъ.

Извилины быстрыхъ рѣкъ менѣе изогнуты, чѣмъ извилины медленныхъ. По Жильберту [1]) быстрыя, сильно размывающія рѣки стремятся удержать прямолинейное теченіе и углубить свое русло, но, приближаясь къ своему базису размытія [ср. предыдущую главу] рѣки начинаютъ блуждать и размытіе дна смѣняется размытіемъ береговъ. Причину, по которой быстрыя рѣки стремятся удержать прежнее направленіе указываетъ Рихтгофенъ, говоря [2]), что прежде чѣмъ рѣка успѣетъ размыть берегъ, русло уже углубилось, а мѣсто, гдѣ вода наиболѣе сильно размываетъ берега, очень часто и скоро передвигается то назадъ то впередъ.

Разсмотримъ сначала движеніе воды въ извилинахъ. Вода, движущаяся по поверхности земли, подвержена сложному центробѣжному ускоренію, происходящему отъ вращенія земли, о которомъ будетъ рѣчь впереди. Кромѣ того, коль скоро пути, проходимые частицами, изогнуты, то постоянно дѣйствуетъ обыкновенное центробѣжное ускореніе, всегда напирающее воду къ вогнутому берегу русла, вслѣдствіе чего поверхность воды нѣсколько приподнимается у вогнутаго берега. Въ извилинахъ большихъ рѣкъ, н. п. Дуная [3]), это возвышеніе поверхности доходитъ до нѣсколькихъ сантиметровъ [въ случаѣ Дуная до 8-ми].

---

[1]) G. K. Gilbert. Geology of Henry Mountains. Такъ какъ книга Жильберта была для меня недоступна, то привожу его мнѣніе по выноскѣ у Макъ-Джи. Mac.-Gee. Geology of the head of the Chesapeake bay. VII Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. стр. 617.

[2]) Richthofen. Führer etc.... стр. 146.

[3]) Wagner. Hydrologische Untersuchungen Braunschweig. 1881 г. стр. 42.

Центробѣжное ускореніе пропорціонально квадрату скорости и кривизнѣ пути, притомъ всегда устремлено по направленію радіуса кривизны пути частицы изъ внутри извилины наружу. Такъ какъ всѣ частицы воды текутъ приблизительно въ одномъ направленіи, то кривизны путей различныхъ частицъ, проходящихъ въ данный моментъ сквозь извѣстное поперечное сѣченіе русла, не могутъ значительно различаться другъ отъ друга. Между тѣмъ поступательная скорость частицъ, проходящихъ сквозь разсматриваемое сѣченіе, измѣняется въ широкихъ предѣлахъ отъ нуля [въ нѣкоторыхъ мѣстахъ у береговъ] до нѣсколькихъ метровъ въ секунду [1]) [на динамической оси].

Поэтому центробѣжная сила дѣйствуетъ наиболѣе сильно на тѣ частицы, которыя въ данный моментъ обладаютъ наибольшей скоростью. Чѣмъ скорость частицы больше, тѣмъ сильнѣе она стремится къ вогнутому берегу и динамическая ось теченія, т. е. совокупность наиболѣе быстро текущихъ частицъ, перемѣщается къ вогнутому берегу и такимъ образомъ тамъ вызываетъ сосредоточеніе размывающей дѣятельности. Буссинекъ, кажется, первый [2]) замѣтилъ, что, коль скоро вода движется по каналу съ кривой осью, то поступательное движеніе непремѣнно сопровождается нѣкоторой поперечной циркуляціей. Онъ даже пытался теоретически опредѣлить скорости поперечной циркуляціи въ томъ простѣйшемъ случаѣ, когда каналъ имѣетъ видъ замкнутаго кольца. Независимо отъ Буссинека, Джемсъ Томсонъ и Мэллеръ [3]) пришли къ тому-же заключенію. Впрочемъ

---

[1]) Н. п. у того же Дуная вблизи Вѣны 3 метра въ секунду ср. Harlacher. Die Messungen an der Elbe und Donau. Leipzig 1887 г.

[2]) Boussinesq. Influence des frottements. etc. Journ. Liouv. II сер. XIII томъ §§ XI и XII.

[3]) J. Thomson. Experimental Illustrations etc. Rep. Br. Ass. 1876 г. Его болѣе обширная статья въ Proceedings Roy. Soc. была для меня недоступна.

Möller см. Günther. Geophysik II томъ Stuttgart 1885 г. стр. 601. Оригинальная статья Мэллера была тоже для меня недоступна.

уже одинъ подробный аналитическій разборъ условій теченія по кривому руслу показываетъ необходимость поперечной циркуляціи. Но и безъ анализа можно себѣ уяснить ея причину.

Центробѣжная сила гонитъ каждую частицу къ вогнутому берегу тѣмъ сильнѣе, чѣмъ ея поступательная скорость больше. Но при этомъ общемъ напорѣ воды къ вогнутому берегу, дѣйствительно передвигаются въ его сторону только частицы, обладающія наибольшей скоростью или скорѣе скоростью большей, чѣмъ нѣкоторая критическая [1]) скорость; остальныя оттѣсняются назадъ потому, что, несмотря на нѣкоторое поднятіе воды со стороны вогнутаго берега, для нихъ нѣтъ достаточнаго мѣста. Въ то время, когда частицы, бывшія на динамической оси, подходятъ къ вогнутому берегу, находившіяся тамъ болѣе медленно текущія частицы, оттѣсняются внизъ. Но первыя частицы, подходя къ берегу, испытываютъ его сопротивленіе, теряютъ свою скорость и оттѣсняются внизъ новыми частицами, подходящими съ динамической оси. Такимъ образомъ все новыя и новыя частицы опускаются ко дну, потомъ оттѣсняются вдоль его на противуположную сторону русла, тамъ опять вытѣсняются на верхъ, чтобы въ послѣдствіи опять попасть на динамическую ось. Поступательная скорость частицъ доходитъ до минимума у выпуклаго берега вслѣдствіе отдаленности сего послѣдняго отъ динамической оси.

Поперечная циркуляція зависитъ отъ разностей между скоростями, а потому ея собственныя скорости всегда незначительны. Ея значеніе состоитъ въ томъ, что, слагаясь съ поступательнымъ движеніемъ вдоль русла, она заставляетъ частицы воды не только спускаться вдоль теченія, но тоже переходить отъ одного берега къ другому. Вслѣдствіе перемѣщенія динамической оси къ вогнутому берегу, скорости теченія значительно

---

[1]) Критическая скорость вѣроятно довольно близка къ той, которой квадратъ равняется средней изъ квадратовъ всѣхъ скоростей, встрѣчающихся въ данномъ сѣченіи.

больше у этого берега, чѣмъ у выпуклаго, а потому размывающая дѣятельность сосредоточивается у вогнутаго берега. Размытыя вещества переносятся внизъ по теченію, но благодаря поперечной циркуляціи, попадаютъ къ противуположному берегу, а такъ какъ скорости теченія у выпуклаго берега именно меньше, то тамъ происходитъ отложеніе.

У тѣхъ рѣкъ, у которыхъ динамическая ось находится на значительной глубинѣ, (ср. гл. II) движенія въ верхнихъ слояхъ воды т. е. въ тѣхъ, которые находятся выше динамической оси, слагаются нѣсколько иначе и не вся вода участвуетъ въ нижнемъ круговоротѣ. Впрочемъ, движенія верхнихъ слоевъ никогда не пріобрѣтаютъ особенно большого значенія.

И такъ, при движеніи по кривому руслу дѣятельность рѣки раздѣляется на преимущественно размывающую у вогнутаго и преимущественно намывающую у выпуклаго берега [2]). Вслѣдствіе этого вогнутый берегъ отступаетъ, а выпуклый наростаетъ и, если гдѣ нибудь на теченіи рѣки образовалась самая незначительная извилина, то, благодаря самому механизму движенія рѣки, она должна увеличиваться. Благодаря обра-

---

[1]) Здѣсь невольно является вопросъ, не оказываетъ ли движеніе въ извилинахъ нѣкотораго вліянія на глубину динамической оси. Къ сожалѣнію мнѣ не довелось найти наблюденій или опытовъ, позволяющихъ судить объ этомъ вопросѣ. Только изъ нѣкоторыхъ теоретическихъ соображеній вывожу заключеніе, что въ извилинахъ динамическая ось теченія должна находиться сравнительно выше.

[2]) Если вогнутый берегъ вмѣстѣ съ тѣмъ правый, то размыванію кромѣ того способствуетъ сложное центробѣжное ускореніе, (ускореніе Коріолиса) происходящее отъ вращенія земли; если вогнутый берегъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ лѣвый, то ускореніе Коріолиса противудѣйствуетъ размыванію. Но почти всегда ускореніе, происходящее отъ кривизны русла значительно больше чѣмъ то, которое происходитъ отъ вращенія земли. Такъ н. п. Жильбертъ (Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 27 томъ стр. 430) вычисляетъ, что въ сильно изогнутыхъ извилинахъ Миссисипи (радіусъ кривизны 8 килом.) центробѣжное ускореніе въ слишкомъ 20 разъ больше ускоренія Коріолиса. Хотя нельзя полагаться на точность подобныхъ вычисленій, тѣмъ не менѣе они даютъ понятіе объ отношеніяхъ между извѣстными величинами. Для *точной* оцѣнки вліянія этихъ факторовъ нужно рѣшить задачу, чуть-ли не превосходящую средства современнаго анализа.

зованію извилины, участокъ теченія удлиняется, а разность уровней начала и конца извилины въ среднемъ не увеличивается. Такимъ образомъ уклонъ уменьшается, что въ свою очередь влечетъ за собою уменьшеніе скорости. Съ другой стороны, средняя кривизна теченія увеличивается по мѣрѣ развитія извилины но только до нѣкотораго предѣла. Съ того момента, какъ извилина станетъ принимать форму петли, дальнѣйшій ростъ ея уже не увеличиваетъ средней кривизны, а напротивъ того уменьшаетъ ее.

Но развитіе извилины зависитъ отъ центробѣжной силы, пропорціональной квадрату скорости и кривизнѣ. При развитіи извилины первый факторъ постоянно убываетъ, второй сначала растетъ, а потомъ тоже начинаетъ убывать. И такъ, всегда долженъ наступить моментъ, когда произведеніе обоихъ факторовъ доходитъ до максимума и ростъ извилины идетъ особенно интензивно, послѣ чего скорость ея развитія «ceteris paribus» уменьшается и наконецъ дѣлается совершенно ничтожной.

Существованіе извилинъ очень часто прекращается слѣдующимъ образомъ. Сильно развитыя извилины имѣютъ форму петель. Очень часто случается, что двѣ слѣдующія другъ за другомъ петли настолько сближаются, что раздѣляющій ихъ перешеекъ размывается въ самомъ узкомъ мѣстѣ и извилины соединяются. Рѣка съ большей силой устремляется по сокращенному а потому болѣе наклонному пути и вновь углубляетъ русло. Между тѣмъ входъ и выходъ изъ покинутаго русла засориваются и бывшая извилина превращается въ дугообразное озеро, въ старицу. Размытіе перешейковъ между извилинами чаще всего случается во время разливовъ. Нельзя сказать, чтобы въ этомъ явленіи обнаруживалось стремленіе рѣки къ сокращенію [1]) своего теченія. Это только результатъ гипертрофіи въ развитіи

[1]) Споръ на счетъ того, стремятся ли рѣки выпрямить свое русло или нѣтъ, довольно старый. Такъ н. п. Лекрэ (1804) споритъ съ современнымъ гидротехникомъ Фабромъ (1797) по поводу этого вопроса. Фабръ стоялъ за самоспрямленіе, Лекрэ доказываетъ противное.

извилинъ. Собственно говоря, при совершенно правильномъ и безпрепятственномъ развитіи извилинъ подобный конецъ ихъ существованія является неизбѣжнымъ, такъ какъ петлеобразныя извилины, разростаясь все дальше и дальше, должны непремѣнно [1]) прійти въ соприкосновеніе. Точно также существованіе извилины можетъ прекратиться вслѣдствіе засоренія, когда количество приносимыхъ съ верхняго теченія наносовъ увеличивается.

Извилины появляются не въ одиночку, а цѣлыми серіями. Коль скоро гдѣ нибудь на теченіи образовалась самая незначительная извилина, то выходящая изъ нея вода пересѣкаетъ русло подъ угломъ, вслѣдствіе чего динамическая ось теченія повыше и пониже извилины отклоняется къ противуположному берегу. Слѣдовательно всегда повыше и пониже извилины найдутся два такія мѣста, гдѣ вода станетъ подмывать берега, образовать выемку а за тѣмъ извилину. Это и есть отраженіе воды, о которомъ говорятъ многіе авторы (см. выше).

Новообразовавшіяся извилины даютъ поводъ къ образованію другихъ извилинъ, тѣ въ свою очередь влекутъ за собою образованіе новыхъ и т. д. Подъ вліяніемъ множества внѣшнихъ факторовъ и благодаря реакціямъ одной извилины на другую, исторія каждой изъ нихъ слагается различно. Извилины образуются, разростаются, замираютъ и опять возникаютъ, передвигаются вдоль теченія и т. д.

Въ извилинѣ вогнутый берегъ отступаетъ, а выпуклый наростаетъ. Такимъ обратомъ извилина увеличивается. Захваченныя у вогнутаго берега вещества отлагаются преимуществен-

---

[1]) Размытіе перешейковъ совершается обыкновенно во время половодья, когда вода бѣжитъ черезъ верхъ перешейка. Днѣпровскіе старожилы увѣряли проф. Докучаева, что, если перешеекъ не распаханъ, то весеннія воды Днѣпра, перекатываясь черезъ него, не въ состояніи разорвать толстый слой лугового дерна, но стоитъ только появиться небольшой бороздкѣ параллельно весеннему теченію, и новое русло въ какіе нибудь 3 — 4 года, а иногда и скорѣе будетъ готово. См. Докучаевъ. Способы образованія долинъ, С.-Пет. 1878 г. стр. 137.

но у выпуклаго, но всегда ниже того мѣста, откуда были захвачены. Распредѣленіе этихъ отложеній зависитъ отъ мѣстныхъ условій. Если н. п. наростаніе одного берега и отступленіе другого захватываетъ и то мѣсто, гдѣ дуга, изогнутая въ одну сторону соединяется съ дугою, изогнутой въ другую и это явленіе повторяется на нѣсколькихъ извилинахъ подъ рядъ, то послѣ нѣкотораго времени извилины нетолько увеличатся, но и передвинутся внизъ по теченію. Точно также извилины могутъ передвигаться и вверхъ по теченію.

Поперечное сѣченіе русла имѣетъ болѣе симметричную форму въ томъ мѣстѣ, гдѣ дуги, обращенныя въ различныя стороны, соединяются другъ съ другомъ, но чѣмъ дальше отъ этого мѣста и ближе къ колѣну, т. е. къ тому мѣсту, гдѣ размываніе вогнутаго берега наиболѣе сильно, тѣмъ динамическая ось и стрежень ближе подступаютъ къ вогнутому берегу. Сѣченіе русла принимаетъ несимметричный видъ, оно гораздо глубже со стороны вогнутаго берега.

Буссинекъ [1]) находитъ, что глубина стрежени приблизительно равна величинѣ:

$$h\left(1+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$$

гдѣ a обозначаетъ ширину

» k » радіусъ кривизны теченія въ разматриваемомъ мѣстѣ

» h » глубину, которую стрежень имѣла бы при тѣхъ-же условіяхъ но на прямомъ теченіи. По словамъ Бусси-

[1]) Boussinesq. Essai etc. стр. 606. Очень часто на мѣстахъ соединенія изогнутыхъ въ разные стороны дугъ образуются малые перекаты. Плёсы находятся въ колѣнахъ извилинъ. Отличный примѣръ этого явленія имѣется на Рейнѣ отъ Гермерсгейма до границы Эльзаса. Глубина стрежени при среднемъ состояніи рѣки на перекатахъ иногда уменьшается до 2 метровъ—на плёсахъ увеличивается до 7 м. см. Wagner Hydrologische Untersuchungen. Braunschweig. 1881 г. стр. 23.

нека измѣренія глубины въ Гароннѣ, произведенныя Фаргомъ, (Fargue) довольно хорошо согласуются съ этой формулой.

Извилины большихъ рѣкъ имѣютъ вообще большіе размѣры, чѣмъ извилины малыхъ рѣкъ. Нетрудно указать причину этого явленія. Направленіе движенія воды въ извилинѣ измѣняется благодаря сопротивленію вогнутаго берега. Но сопротивленіе берега дѣйствуетъ непосредственно только на ту воду, которая прикасается къ нему. Значитъ, чѣмъ рѣка больше, тѣмъ меньше, сравнительно съ массой воды, площадь, въ которой сопротивленіе непосредственно дѣйствуетъ на теченіе, а потому нужно больше времени, чтобы вліяніе этого сопротивленія сообщилось всей массѣ воды. Слѣдовательно, чѣмъ больше рѣка, тѣмъ при равенствѣ прочихъ условій медленнѣе измѣняется направленіе теченія, тѣмъ больше размѣры извилинъ.

У меньшихъ рѣкъ извилины стрежени обыкновенно совпадаютъ съ извилинами теченія, съ тою только разницею, что стрежень переходитъ отъ одного берега къ другому, а потому ея извилины еще болѣе изогнуты, чѣмъ извилины самаго теченія. У большихъ же рѣкъ н. п. у Волги, случается, что само теченіе мало извилисто, а стрежень сильно извивается, причемъ его очертанія повидимому до нѣкоторой степени независимы отъ очертаній главнаго теченія.

Несмотря на наклонность рѣкъ къ образованію извилинъ, эти послѣднія бываютъ слабо развиты или крайне неправильны, если внѣшнія условія слагаются неблагопріятно. Неблагопріятныя условія встрѣчаются у слишкомъ широкихъ и сравнительно неглубокихъ рѣкъ какъ н. п. Волга. Въ широкомъ и мелкомъ руслѣ поперечная циркуляція ничтожна, кромѣ главной динамической оси появляются второстепенныя, посреди теченія оказываются мѣста, гдѣ скорость совсѣмъ незначительна. Вещества, размытыя у одного берега по большей части не попадаютъ на другой, а отлагаются посреди рѣки на отмеляхъ. Понятно, что при подобныхъ условіяхъ образованіе такихъ сильно изогнутыхъ извилинъ, какія наблюдаются у глубокихъ рѣкъ

н. п. у Миссисипи невозможно. Правильныя сильно изогнутыя извилины образуются только на стрежени, имѣющей болѣе глубокое русло и болѣе правильную поперечную циркуляцію.

Тарръ [1]) полагаетъ, что при уклонѣ въ 0,0005 извилины уже не могутъ образоваться. Не знаю на какихъ наблюденіяхъ или соображеніяхъ основано это мнѣніе. Вопервыхъ, «à priori» очевидно, что здѣсь не можетъ быть никакой рѣзкой границы даже для уклоновъ въ 0,0036—0,0039, отдѣляющихъ потоки отъ рѣкъ, такъ какъ процессъ образованія извилинъ не стоитъ въ связи съ распространеніемъ волнъ и возмущеній, совершающимися (см. гл. III) иначе у рѣкъ, а иначе у потоковъ. Значительная скорость, какъ видно изъ механизма явленія даже способствуетъ образованію извилинъ и если быстрыя рѣки мало извилисты, такъ это совершается по другой причинѣ, именно по той, на которую намекаетъ Рихтгофенъ (см. выше). Во вторыхъ нетрудно найти факты, опровергающіе мнѣніе Тарра. Притоки Бѣлой и Уфы [2]), Ай, Юрезань, Симъ, Катавъ и др. рѣки, вытекающія изъ Урала въ равнинномъ своемъ теченіи обладаютъ уклонами отъ 0,0005 — 0,0008, а между тѣмъ весьма извилисты. Впрочемъ каждый можетъ наблюдать небольшія извилины въ любомъ изъ овраговъ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ уклоны далеко больше 0,0005.

Разсматривая движеніе воды въ извилинахъ, мы отмѣтили, что всякой извилинѣ свойственно стремленіе къ дальнѣйшему развитію, что это стремленіе сначала увеличивается, затѣмъ уменьшается. Оно дѣлается равнымъ нулю только при безконечно малой скорости. Такимъ образомъ извилины должны-бы увеличиваться до безконечности. Единственной преградой въ этомъ безконечномъ развитіи было-бы пересѣченіе однихъ извилинъ другими, о чемъ была выше рѣчь. Но, не говоря о томъ, что измѣненіе внѣшнихъ условій и реакціи между разными ча-

[1]) Tarr. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 40 томъ стр. 360.
[2]) Карпинскій и Чернышевъ. Труды Геол. Ком. III, 2 стр. 40.

стями теченія прекращаютъ дальнѣйшее развитіе извилинъ,— [н. п. путемъ засоренія] ростъ извилинъ прекращается въ тотъ моментъ, когда скорости у вогнутаго подмываемаго берега сдѣлаются меньше тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ дальнѣйшее размытіе данной породы дѣлается невозможнымъ (ср. предъидущую главу). Если рядомъ съ этимъ отложеніе приносимыхъ съ верхняго теченія продуктовъ размытія на выпукломъ берегу не прекращается, то извилина подвергается засоренію, но если отложенія нѣтъ, а другія условія неизмѣняются, то извилина остается въ прочномъ состояніи.

Но до тѣхъ поръ, пока размытіе береговъ возможно, извилина должна развиваться и если имѣется гдѣ нибудь самая незначительная извилина, самый легкій изгибъ теченія, то этотъ изгибъ долженъ увеличиваться. Даже совершенно прямой каналъ съ симметричнымъ сѣченіемъ, съ совершенно однородными берегами сдѣлается извилистымъ, если только эти берега подвергаются размытію. Самое незначительное временное возмущеніе, въ одномъ мѣстѣ заставившее динамическую ось подойти ближе къ одному берегу чѣмъ къ другому, дастъ поводъ къ образованію цѣлой серіи извилинъ. Сначала образуется малая выемка въ одномъ берегу и небольшое скопленіе наносовъ у другого, потомъ малая, потомъ все большая и большая извилина. Но одна извилина дастъ поводъ къ возникновенію цѣлой серіи. Лучшее опытное подтвержденіе этого положенія имѣемъ въ каналахъ Пинскаго Полѣсья, которые уже успѣли по большей части подѣлаться извилистыми [1]).

Если даже берега не подвергаются размытію, но вода несетъ твердый матеріялъ, то возмущенія, временно отклоняющія динамическую ось, вызовутъ образованіе малаго скопленія наносовъ у того берега, отъ котораго удалилась динамическая ось. За этимъ скопленіемъ образуются другія отмели, распре-

---

[1]) Воейковъ. Пинское Полѣсье. Изв. Русск. Геогр. Общ. томъ 29. вып. II 1893 г. стр. 68.

дѣленныя попеременно то у одного, то у другого берега, а стрежень извивается между ними. Какъ примѣръ приведемъ регулированный участокъ Рейна [1]) отъ Гермерсгейма до границы Эльзаса, гдѣ наблюдаются подобныя правильно распредѣленныя отмели и извилистая стрежень. Эти отмели передвигаются внизъ по теченію, переходя приблизительно въ $2^3/_4$ года пространство, равное разстоянію двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ извилинъ.

И такъ, образованіе и развитіе извилинъ прекращается только тогда, когда русло всюду достигло прочнаго состоянія т. е. когда во всякомъ мѣстѣ любого сѣченія скорости ниже тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ размытіе прекращается и когда по руслу несется вода или совсѣмъ чистая, или содержащая только тончайшую полухимически растворенную (см. гл. IV) почти неосѣдающую муть. Поэтому спрямленіе теченія не можетъ повести къ ничему, какъ только къ напрасной растратѣ капиталовъ и труда, если берега не будутъ одновременно достаточно укрѣплены на всемъ теченіи, причемъ, разумѣется, нужно, чтобы облицовка береговъ могла устоять даже во время самыхъ сильныхъ половодій.

Рѣки сами по себѣ не имѣютъ никакой наклонности спрямлять свое русло, напротивъ того онѣ склонны образовать извилины, поскольку не мѣшаетъ сопротивленіе береговъ.

Есть только одинъ случай, въ которомъ условія слагаются неблагопріятно для образованія извилинъ. Этотъ случай имѣетъ мѣсто у потоковъ и весьма быстро текущихъ рѣкъ. Центробѣжныя силы на криволинейныхъ участкахъ у быстраго теченія больше, чѣмъ у медленнаго, но за то мѣста, гдѣ въ данный моментъ извѣстная часть берега подмывается, очень часто мѣняются. Если породы мягки, то эти измѣненія совершаются почти ежедневно. Поэтому, какъ это можно видѣть во верхней части любого изъ нашихъ овраговъ (послѣ дождя), извилины

---

[1]) См. Wagner loc. cit.

хотя и появляются, но чаще всего уничтожаются прежде чѣмъ успѣваютъ развиться. Если-же потокъ или быстрая рѣка течетъ среди твердыхъ породъ, то конфигурація русла не мѣняется столь быстро, но за то болѣе сильное вліяніе оказываетъ другой факторъ, тоже мѣшающій развитію извилинъ. Въ то время, когда размытіе береговъ производится водою, содержащей развѣ одну муть и маленькія песчинки, дно истирается галькою и пескомъ. Поэтому у быстрой рѣки, текущей среди весьма твердыхъ породъ размытіе берега въ сравненіи съ углубленіемъ дна совсѣмъ ничтожно. Оно тѣмъ болѣе ничтожно, что вслѣдствіе опусканія русла внизъ, вода долбитъ берегъ все ниже и ниже. Рѣка врѣзывается все глубже и глубже и если вмѣстѣ съ тѣмъ нѣсколько перемѣщается въ горизонтальномъ направленіи, такъ это совершается скорѣе благодаря вліянію какихъ-нибудь особенностей въ тектоническомъ строеніи н. п. благодаря наклонному залеганію пластовъ, чѣмъ благодаря тѣмъ процессамъ, которые ведутъ къ образованію извилинъ.

И такъ у быстрыхъ рѣкъ извилины возможны только въ такомъ случаѣ, когда въ прежнемъ историческомъ развитіи рѣки была фаза, благопріятная для образованія извилинъ и когда эти извилины сохранились. Замѣчательный примѣръ подобнаго явленія наблюдается у Колорадо. Эта чрезвычайно быстрая рѣка тѣмъ не менѣе обладаетъ большими извилинами. Въ далекомъ прошломъ рѣка [1]) текла въ гораздо болѣе высокомъ (относительно) уровнѣ, имѣла малый уклонъ, медленное и извилистое теченіе. Затѣмъ, вслѣдствіе нѣкоторыхъ геологическихъ происшествій, о которыхъ здѣсь нечего говорить, уклонъ сильно увеличился, рѣка стала быстро углублять свое русло, но сохранила очертанія стараго теченія. Слѣды сего послѣдняго еще видны въ такъ называемой эсплападѣ. Форма долины, знаменитый каньонъ Колорадо лучше всего доказываетъ, что эти

[1]) Dutton. Tert. history. of the Grand Canon district. II Monograph U. S. Geol. Survey. стр. 219

извилины унаслѣдованы, сохранены отъ прежняго теченія: въ каньонѣ не видно слѣдовъ размытія одного берега и нарастанія другого, не видно, чтобы извилины развивались, расширялись и т. д. Есть только слѣды самаго интензивнаго вертикальнаго углубленія. Послѣднему въ высокой степени способствовало однообразіе геологическаго строенія страны и замѣчательная горизонтальность пластовъ, а потому можно сказать, что горизонтальное напластованіе и однообразіе строенія способствовали сохраненію древнихъ извилинъ. Кстати замѣтимъ, что тѣ же условія въ высокой степени способствуютъ правильному развитію извилинъ. Въ мѣстности съ пестрымъ и сложнымъ строеніемъ и рельефомъ извилины всегда будутъ болѣе или менѣе неправильны.

Образованію знаменитаго каньона Колорадо способствовали тоже твердость породъ и сухость климата. Иначе вертикальныя стѣны въ тысячи метровъ высоты не могли бы сохраниться.

Благопріятныя условія для образованія извилинъ очень часто встрѣчаются у медленныхъ рѣкъ, текущихъ среди мягкихъ породъ. Эти рѣки обыкновенно находятся въ томъ состояніи, при которомъ размытіе дна или почти, или съ избыткомъ уравновѣшивается отложеніемъ. Въ тоже самое время въ болѣе быстро текущихъ струяхъ, окружающихъ динамическую ось, скрывается энергія, достаточная для замѣтнаго размытія берега, особенно если тотъ состоитъ изъ мягкихъ породъ. Единственной помѣхой для образованія извилинъ бываетъ иногда чрезмѣрная ширина русла, но въ такомъ случаѣ извилины образуются по крайней мѣрѣ на стрежени.

И такъ неудивительно, что равнинныя рѣки по большей части весьма извилисты. Въ наносныхъ равнинахъ въ мѣстахъ, гдѣ намывающая дѣятельность сильно преобладаетъ надъ размытіемъ, образованіе извилинъ идетъ рядомъ съ другими явленіями: съ раздѣленіемъ на рукава, съ проложеніемъ новыхъ руслъ.

Въ весьма рыхлыхъ породахъ извилины не прочны, онѣ скоро разростаются, но быстро исчезаютъ. Если къ тому рѣка страдаетъ сильными половодьями, то конфигурація русла вообще и извилинъ спеціально мѣняется почти ежегодно.

Наиболѣе благопріятныя условія для образованія правильныхъ и прочныхъ извилинъ бываютъ у рѣкъ, обладающихъ небольшой скоростью среди твердыхъ породъ. Подобныхъ рѣкъ мало, время нужное для образованія извилинъ велико, а потому этотъ типъ наблюдается сравнительно рѣже.

У рѣкъ, текущихъ среди твердыхъ породъ, даже самыя сильныя половодья мало измѣняютъ конфигурацію русла. Они только способствуютъ болѣе сильному размытію существующихъ уже формъ. Конечно, это размытіе сопровождается измѣненіемъ формы русла, но далеко не въ тѣхъ предѣлахъ, какъ у рѣкъ, текущихъ среди рыхлыхъ породъ.

Случается, что и другія обстоятельства слагаются благопріятно: геологическое строеніе мѣстности на большихъ пространствахъ бываетъ однообразно, породы горизонтальны (случай Днѣстра въ Подольскомъ Силурѣ), рѣка одновременно размываетъ берега и углубляетъ русло, причемъ размытіе берега есть величина конечная въ сравненіи съ размытіемъ дна, а не ничтожная, какъ это бываетъ у быстрыхъ рѣкъ, текущихъ среди твердыхъ породъ.

Вслѣдствіе одновременнаго углубленія русла и размытія береговъ въ извилинахъ, долины рѣкъ этого типа принимаютъ совершенно своеобразную форму. Выпуклые берега извилинъ сопровождаются высокими, крутыми, даже отвѣсными (въ горизонтально наслоенныхъ породахъ) скатами, вогнутые сопровождаются пологими склонами, на которыхъ во многихъ мѣстахъ разсѣяны рѣчныя отложенія. Только тамъ, гдѣ двѣ въ разныя стороны изогнутыя дуги соединяются другъ съ другомъ, долина принимаетъ симметричную форму, въ иныхъ случаяхъ (н. п. на Днѣстрѣ) она даже имѣетъ видъ каньона. Чертежъ (F. 3)

изображаетъ схэму разрѣза долины Днѣстра въ колѣнахъ т. е. въ вершинахъ извилинъ, разумѣется съ преувеличенными вертикальными размѣрами. Пунктиромъ обозначены очертанія сѣченія долины въ разное время, причемъ 5 обозначаетъ современныя очертанія, *A* вогнутый, *B* выпуклый берегъ. Заштрыхованныя мѣста обозначаютъ отложенія наносовъ на выпукломъ берегу, причемъ самые древніе залегаютъ выше прочихъ. Кромѣ извилинъ Днѣстра въ области Подольскаго Силурійскаго плато можно привести много подобныхъ случаевъ н. п. рѣки Арденновъ, особенно Сэмуа (Semois) [1]), рѣки, текущія въ области Прирейнскихъ горъ [2]) и т. д.

Иногда, обходя какое нибудь препятствіе, или по другой причинѣ рѣка дѣлаетъ повороты, сходные съ извилинами. При условіяхъ благопріятныхъ для образовая извилинъ, за такой «вынужденной» извилиной иногда слѣдуетъ нѣсколько «свободныхъ», но, если условія неблагопріятны, то «вынужденная» извилина обыкновенно остается одинокой.

Въ странахъ гористыхъ, гдѣ натуральныя покатости обладаютъ значительной крутизной, молодыя рѣки обыкновенно текутъ быстро по направленіямъ, опредѣляемымъ рельефомъ и тектоникой мѣстности, — ихъ извилины находятся въ зачаточномъ состояніи. По мѣрѣ уменьшенія скорости и уклоновъ углубленіе дна слабѣетъ, размытіе береговъ сравнительно усиливается, теченіе дѣлается болѣе извилистымъ. Въ странахъ равнинныхъ рѣки по большей части и были и остаются извилистыми.

Припомнимъ еще разъ, что горизонтальное напластованіе, однообразный рельефъ и однородность породъ способствуютъ правильному развитію извилинъ; сложный рельефъ и сложная тектоника мѣшаютъ ему.

---

[1]) Penck. Belgien. Länderkunde von Europa. Leipzig 1889 г. стр. 518.

[2]) Ср. Schneider. Studien Ueber Thalbildungen aus der Vordereifel. Zeitschr. Gesell. für Erdkunde Berlin 1883 г. стр. 43 и слѣд.

И здѣсь и въ прежней главѣ мы говорили о породахъ твердыхъ и мягкихъ, хотя въ твердости есть безчисленныя градаціи и различія. Этотъ способъ выраженія былъ для насъ удобенъ, всякій пойметъ, что признакъ, свойственный твердымъ породамъ долженъ выражаться тѣмъ рѣзче, чѣмъ порода тверже, тѣмъ слабѣе, чѣмъ порода мягче.

ГЛАВА VII.

Форма русла.

Для отдѣльныхъ участковъ рѣки, находящихся въ установившемся состояніи (ср. гл. II) мыслимы такія формы русла, при которыхъ во всякомъ мѣстѣ всякаго сѣченія количество сверху приносимаго и отлагаемаго матеріала равно количеству размываемаго и уносимаго внизъ. Подобное состояніе мыслимо только въ прямолинейномъ каналѣ, ибо въ криволинейномъ каналѣ (ср. гл. VI) дѣятельность рѣки раздѣляется на преимущественно размывающую у одного и преимущественно намывающую у другого берега. Но въ свою очередь (ср. гл. VI) движеніе въ прямомъ каналѣ неустойчиво. Самое небольшое возмущеніе даетъ поводъ къ размыванію одного берега и намыванію другого и къ преобразованію прямого канала въ извилистый. Поэтому состояніе полнаго равновѣсія неосуществимо. Возможны только состоянія приблизительнаго равновѣсія, въ которыхъ за извѣстный промежутокъ времени н. п. за годъ въ извѣстный участокъ теченія вносится столько-же продуктовъ размытія, сколько изъ него было вынесено. Но это состояніе само по себѣ не связано еще съ какой-нибудь спеціальной конфигураціей русла. Съ другой стороны, не смотря

на приблизительное равновѣсіе между размытіемъ и отложеніемъ, въ руслѣ могутъ произойти тѣ и другія измѣненія.

Уже въ V гл. мы указали на прочныя состоянія русла т. е. такія, въ которыхъ нѣтъ нигдѣ ни размытія ни отложенія. Когда рѣка и ея притоки, малые и большіе нигдѣ не размываютъ, то тѣмъ самымъ и отложеніе всюду отсутствуетъ, но до такого состоянія рѣчная система можетъ дойти, строго говоря, только послѣ безконечнаго времени. Наблюдаются только такія состоянія, при которыхъ на извѣстномъ болѣе или менѣе длинномъ участкѣ берега и дно даже во время самыхъ сильныхъ половодій почти не подвергаются размытію, а съ другой стороны накопленія отложеній или вовсе не образуются или образуются временно и скоро опять размываются и уносятся [1]).

Подобное состояніе русла можно назвать прочнымъ, ибо оно почти неизмѣняется дѣятельностью самой рѣки и можетъ существовать до тѣхъ поръ, пока внѣшнія условія, н. п. климатъ, орографія страны и т. д. не подвергаются измѣненіямъ.

Можно разсматривать различныя состоянія рѣкъ, какъ состоянія переходныя, болѣе или менѣе близкія къ прочнымъ состояніямъ. Многія рѣки находятся въ состояніи близкомъ къ прочному, а потому свойственныя этому состоянію формы русла представляютъ большой интересъ.

Эти формы зависятъ отъ многихъ условій. Такъ н. п. въ извилинѣ измѣненія конфигураціи русла прекращаются только тогда, когда въ одно и тоже время скорость у подмываемаго берега окажется недостаточной для преодолѣнія сопротивленія породы, составляющей этотъ берегъ, а у намываемаго берега, гдѣ вода и безъ того давно не размываетъ, скорости окажутся какъ разъ достаточными для перенесенія тѣхъ продуктовъ размытія, которые приносятся съ верхняго теченія. Если количество этихъ продуктовъ и величина ихъ не увеличивается, (хотя можетъ уменьшаться) то форма русла можетъ сохраниться.

---

[1]) Сюрелль называетъ такой участокъ: Canal d'écoulement.

Значитъ, упроченіе формы русла въ данномъ случаѣ зависитъ заразъ отъ нѣсколькихъ факторовъ.

Обыкновенная форма русла несимметрична, съ наибольшей глубиной со стороны вогнутаго берега. Образованные намываніемъ подводные склоны и берега пологи, берега, созданные размытіемъ, круче. Большинство рыхлыхъ породъ не могутъ образовать крупныхъ подводныхъ склоновъ. Такъ н. п. сыпучія породы по Тулэ [1]) даже при самыхъ благопріятныхъ условіяхъ, въ совершенно тихой водѣ не могутъ образовать склоновъ, которыхъ уклонъ превышаетъ 41°. Въ подвижной водѣ уголъ покоя еще меньше, особенно, если скорость протекающей вдоль нихъ воды мало-мальски значительна. Наконецъ, чѣмъ выше подводный склонъ, тѣмъ вообще крутизна его должна быть меньше, ибо нижняя часть высокаго склона легче подвергается обвалу вслѣдствіе давленія сверху лежащихъ пластовъ.

Для русла, проложеннаго среди однородной породы, минимальное мыслимое отношеніе наибольшей ширины къ наибольшей глубинѣ равно приблизительно [2]) 2:1.

Это отношеніе возможно только тогда, когда динамическая ось находится на серединѣ теченія, когда породы, составляющія стѣны русла, не обсыпываются и не обваливаются. Но, если даже послѣднее условіе исполняется, то уже благодаря одной несимметричности сѣченія отношеніе наибольшей ширины къ глубинѣ всегда должно быть больше, чѣмъ 2:1, Динамическая ось всегда находится ближе къ одному чѣмъ къ другому берегу и русло можетъ сдѣлаться прочнымъ или приблизительно прочнымъ то-

---

[1]) Thoulet см. Forel. Le Léman Lausanne 1892 г. стр. 47. У подножія самаго крутого подводнаго склона точно какъ у подножія всякаго склона на поверхности суши находится осыпь, состоящая изъ упавшихъ съ него-же кусковъ породы.

[2]) Еслибы динамическая ось находилась въ самой поверхности, то соотвѣтственная форма сѣченія должнабы быть полукруглая. Динамическая ось почти всегда находится нѣсколько ниже. Какая форма соотвѣтствуетъ этому положенію динамической оси, неизвѣстно съ точностью.

гда, когда берегъ, находящійся близко къ динамической оси не размывается даже во время половодій. Само собою очевидно, что подобное состояніе возможно только тогда, когда ширина русла значительно превышаетъ глубину.

Въ искусственномъ каналѣ можно создать какія угодно отношенія между шириной и глубиной, если сдѣлать стѣны изъ прочнаго матеріяла и вмѣстѣ съ тѣмъ установить такой уклонъ, что протекающая вода не будетъ въ состояніи размывать берега, однако и въ искусственныхъ каналахъ, не облицеванныхъ твердымъ матеріяломъ, которыхъ стѣны могутъ подвергаться размытію, отношеніе ширины къ глубинѣ должно быть всегда больше, чѣмъ 2:1.

Нѣкоторые практики, какъ н. п. Редтенбахеръ [1]) утверждаютъ, что отношеніе средней ширины къ глубинѣ не должно быть меньше 2,7:1. Онъ предлагаетъ слѣдующую эмпирическую формулу:

$$\frac{b}{e} = 2{,}7 + 0{,}9a$$

гдѣ b обозначаетъ среднюю ширину

» e » » глубину

» a » площадь сѣченія, причемъ предполагается, что всѣ эти величины выражены въ метрахъ. Русла рѣкъ образуются подъ вліяніемъ ихъ собственной дѣятельности—отчасти путемъ размытія, отчасти путемъ отложенія, но всегда и всюду при какомъ угодно состояніи рѣки динамическая ось находится не на срединѣ теченія а ближе то къ одному, то къ другому берегу, всегда во время образованія русла рядомъ съ вертикальнымъ возвышеніемъ или углубленіемъ происходятъ перемѣщенія въ горизонтальномъ направленіи и русло всегда пріобрѣтаетъ размѣры, въ которыхъ отношеніе ширины къ глубинѣ больше минимальнаго.

---

[1]) Redtenbacher. см. Rühlmann Hydromech. стр. 432.

Исключенія, впрочемъ совершенно мѣстныя, возможны только тамъ, гдѣ на днѣ находятся большія ямы. Онѣ обыкновенно попадаются въ такъ наз. колѣнахъ т. е. въ мѣстахъ перегиба извилинъ. Въ такихъ мѣстахъ вода, отталкиваемая отъ береговъ, очень часто попадаетъ во вращательное движеніе. Если дно не состоитъ изъ твердаго вещества, то водоворотъ долбитъ яму, иногда весьма глубокую. На Днѣстрѣ вблизи устья, гдѣ глубина на стрежени въ среднемъ не больше 4 саж., иныя ямы имѣютъ вдвое и втрое большую глубину.

Почти столь-же характеристичнымъ явленіемъ какъ извилины, является чередованіе участковъ, гдѣ рѣка расширяется, съ такими участками, гдѣ она съуживается, или чередованіе такъ называемыхъ *перекатовъ* съ такъ называемыми *плёсами*. Если для извѣстной рѣки на достаточно длинномъ участкѣ опредѣлимъ средній уклонъ, среднюю ширину и глубину, то на перекатахъ рѣка обладаетъ большимъ уклономъ, большей шириной и меньшей глубиной, чѣмъ средніе, на плёсахъ она обладаетъ меньшимъ уклономъ, меньшей чѣмъ средняя шириной, но за то большей глубиной.

«За исключеніемъ небольшихъ участковъ, всякое теченіе» говоритъ Доссъ [1]) «состоитъ изъ нѣсколько съуженныхъ кусковъ, обладающихъ меньшимъ уклономъ, перемежающихся съ съ участками, расширяющимися на болѣе или менѣе срѣзанныхъ (tronqués) конусахъ отложенія и обладающими большимъ уклономъ». Ольдгэмъ [2]) говоритъ, что можно раздѣлить всякое теченіе на рядъ перемежающихся участковъ, гдѣ рѣка то расширяется, то съуживается, причемъ на первыхъ участкахъ глубина меньше, а уклонъ больше, чѣмъ на вторыхъ. Участки перваго рода т. е. перекаты Ольдгэмъ называетъ вѣерами (*fans*), участки второго рода онъ называетъ *reaches*. Слово: *reach* обо-

---

[1]) Dausse. Etudes d'hydr. pratique. Mem. Sav. Etr. томъ 20 стр. 311.

[2]) Oldham. On the law, that governs the action of flowing streams. Quart. Journ. Geol. Soc. London. 1888 г. стр. 835.

значаетъ прямой участокъ теченія, а потому оно пожалуй не совсѣмъ удачно выбрано. Такъ н. п. рѣки на нижнемъ теченіи по большей части обладаютъ всѣми характеристическими чертами плёса: большой глубиной, узкимъ русломъ, малымъ паденіемъ—а рядомъ съ этимъ онѣ обыкновенно бываютъ извилисты.

Уже въ предъидущей главѣ мы указывали на то, что теорія и опытъ согласны въ томъ, что въ колѣнахъ, т. е мѣстахъ перегиба извилинъ глубина доходитъ до максимума. Это тоже характеристическая черта плёса. Напротивъ того въ мѣстахъ перехода отъ одной дуги къ слѣдующей часто попадаются отмели, несмотря на то, что въ этихъ мѣстахъ русло имѣетъ видъ болѣе или менѣе прямолинейнаго канала.

Ольдгэмъ указываетъ на то, что на перекатѣ въ широкомъ и мелкомъ руслѣ поверхность, въ которой происходитъ треніе о стѣны русла значительно больше, чѣмъ на плёсѣ, обладающемъ большой глубиной и узкимъ русломъ, а потому не смотря на большій уклонъ, средняя скорость на перекатѣ можетъ быть почти равна средней скорости на плёсѣ. «И въ томъ, и въ другомъ случаѣ» говоритъ онъ [1]) «скорость остается такой, какая нужна для того, чтобы рѣка могла переносить свой грузъ». Другими словами онъ разсматриваетъ плёсы и перекаты какъ двѣ различныя прочныя формы теченія, причемъ подъ прочнымъ состояніемъ онъ такъ-же какъ Дуттонъ и Поуэлль понимаетъ состояніе полнаго насыщенія. Съ этимъ послѣднимъ взглядомъ мы не согласны, такъ какъ прочное состояніе прежде всего зависитъ отъ отношенія периферическихъ скоростей къ сопротивленію породъ; что касается насыщенія, то единственное условіе состоитъ въ томъ, чтобы оно не превышало того предѣла, при которомъ начинается выдѣленіе твердыхъ веществъ, но оно можетъ быть сколько угодно меньше этого предѣла.

---

[1]) loc. cit. стр. 735 «the velocity in each case being such, as will just enable the stream to transport its burden of débris».

Ольдгэмъ полагаетъ, что перекаты образуются на накопленіяхъ наносовъ. Если н. п. рѣка выходитъ изъ горъ на равнину, гдѣ уклонъ ея внезапно уменьшается, то у выхода отлагаются наносы и образуютъ конусъ отложенія. Рѣка расширяется на конусѣ —даже иногда раздѣляется на рукава и стекаетъ тонкой но широкой струей по поверхности конуса. Наносы отлагаются одни на другихъ и одни позади другихъ до тѣхъ поръ, пока уклонъ поверхности конуса отложенія не сдѣлается настолько значительнымъ, что рѣка уже оказывается въ состояніи переносить продукты размытія не отлагая ихъ по пути. Предѣльный уклонъ, при которомъ рѣка перестаетъ отлагать осадки на перекатѣ очевидно тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе переносимый матеріялъ —а потому уклонъ поверхности конуса отложенія «ceteris paribus» [1]) тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе тѣ вещества, изъ которыхъ онъ состоитъ.

Мнѣніе Ольдгэма подтверждается такъ его собственными наблюденіями надъ нѣкоторыми индѣйскими потоками, какъ наблюденіями другихъ авторовъ. Такъ н. п. Уорренъ [2]) замѣчаетъ, что въ руслѣ Миссисипи послѣ впаденія каждаго изъ болѣе крупныхъ притоковъ находится накопленіе его наносовъ, на которомъ главная рѣка расширяется и пріобрѣтаетъ больщій уклонъ, но за то дѣлается болѣе мелкой. Повыше устья притока находится участокъ, обладающій малымъ уклономъ, глубокимъ и узкимъ русломъ т. е. участокъ, имѣющій всѣ характеристическія черты плёса.

Само собою очевидно, что на всякомъ накопленіи наносовъ, образовавшемся на днѣ рѣки, долженъ находиться перекатъ, все равно произошло ли накопленіе отъ того, что рѣка должна была отлагать наносы вслѣдствіе уменьшенія уклона

---

[1]) Съ другой стороны у большихъ рѣкъ уклонъ поверхности конуса отложенія «ceteris paribus» меньше, чѣмъ у малыхъ, ибо при томъ самомъ уклонѣ скорость большой рѣки больше.

[2]) Warren. Valley of Missisipi and Minnesota. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 16 томъ стр. 420.

—или отъ того, что тѣмъ или другимъ притокомъ приносились продукты размытія настолько крупные, что главная рѣка не была въ состояніи переносить ихъ.

Но кромѣ того перекаты должны непремѣнно образоваться тамъ, гдѣ дно оказываетъ большее сопротивленіе размытію, чѣмъ берега. Потому-то выходы твердыхъ породъ на днѣ сопровождаются перекатами.

На перекатахъ дно всегда каменисто или потому, что здѣсь обнажаются твердыя породы, или потому, что здѣсь залегаетъ крупная галька, принесенная самой рѣкой или какимъ нибудь притокомъ. Поэтому ключъ къ объясненію характеристическихъ свойствъ перекатовъ находится не въ происхожденіи ихъ изъ бывшихъ участковъ отложенія наносовъ, какъ думаетъ Ольдгэмъ, а въ различіи между свойствами породъ, составляющихъ дно и берега. Они не пріурочены ко всякимъ участкамъ накопленія наносовъ, но только къ такимъ, гдѣ на днѣ залегаетъ болѣе крупный матеріялъ чѣмъ тотъ, который отлагается на берегахъ.

Можно различать перекаты, образовавшіеся преимущественно путемъ размытія. Они появляются тамъ, гдѣ берега состоятъ изъ породы, легко подвергающейся размытію, а дно изъ породы, оказывающей большое сопротивленіе. Скорости, при которыхъ прекращается размытіе дна, значительно больше тѣхъ, при которыхъ прекращается размытіе береговъ. Прочная форма русла, соотвѣтствующая этимъ условіямъ, должна отличаться большимъ уклономъ, большой глубиной и малой шириной, ибо въ руслѣ, обладающемъ подобными чертами, возможно сочетаніе большой скорости у дна съ малой скоростью у береговъ.

Съ другой стороны можно различать перекаты, образовавшіеся путемъ отложенія, причемъ нужно, чтобы это отложеніе происходило извѣстнымъ образомъ, именно нужно, чтобы матеріялы отлагались на днѣ, а не на берегу. Тогда возвышеніе дна непремѣнно ведетъ къ расширенію, ибо рѣка должна раз-

ливаться въ сторону. Потому-то перекаты пріурочены къ накопленіямъ гальки и крупнаго песку, которые и передвигаются по дну и отлагаются на днѣ.

Напротивъ того устьевые участки рѣкъ очень часто имѣютъ характеръ плёсовъ несмотря на то, что тѣже участки очень часто характеризуются рѣшительнымъ преобладаніемъ отложенія. Возьмемъ н. п. Днѣстръ. На всемъ теченіи въ предѣлахъ Австрійской и Русской Подоліи онъ обиленъ перекатами: на одномъ участкѣ отъ Могилева до Выхватинецъ (около 200 верстъ) насчитываютъ не меньше 34 большихъ и меньшихъ перекатовъ [1]). На многихъ перекатахъ во время низкаго состоянія воды глубина не доходитъ до аршина—ширина рѣки значительна. Даже на плёсахъ глубина Днѣстра не особенно велика. Но вблизи устья отъ Бендеръ до лимана, уклонъ уменьшается, рѣка съуживается и значительно углубляется (глубина не меньше 3 — 4 сажень), дно и низкіе берега (плавни) состоятъ изъ ила, принесеннаго самой рѣкой. Дѣло въ томъ, что Днѣстръ здѣсь несетъ преимущественно муть, которая выдѣляется и осѣдаетъ весьма медленно. Вслѣдствіе этого на днѣ здѣсь осѣдаетъ мало мути—отложеніе ея происходитъ главнымъ образомъ на берегахъ, когда во время паводковъ рѣка выходитъ изъ русла, заливаетъ плавни и застаивается на нихъ. Послѣ всякаго разлива можно видѣть новые слои ила, отложенные на берегахъ. Такимъ образомъ устьевой участокъ Днѣстра пріобрѣлъ характеръ плёса. Съуженіе и углубленіе русла вблизи устья среди наносныхъ равнинъ наблюдается тоже у Миссисипи, у Желтой рѣки и у многихъ другихъ рѣкъ.

Мы здѣсь указали на плёсы, образовавшіеся на участкахъ, характеризуемыхъ преобладаніемъ отложенія. Точно также участки размытія пріобрѣтаютъ характеръ плёсовъ, коль скоро условія слагались такъ, что размытіе дна могло происходить

---

[1]) Большинство изъ нихъ обусловлены выходами болѣе твердыхъ слоевъ на днѣ.

болѣе или по крайней мѣрѣ столь-же энергично, какъ размытіе береговъ. Особенно глубокіе плёсы образуются передъ отступающими водопадами. Ниспадающая въ водопадѣ вода долбитъ внизу яму, удлиняющуюся вверхъ по теченію по мѣрѣ того какъ водопадъ отступаетъ.

Тоже самое, но въ болѣе слабой степени, имѣетъ мѣсто передъ отступающими порогами и перекатами.

Ольдгэмъ полагаетъ, что бывшіе участки размытія, гдѣ рѣка углублялась вертикально и вслѣдствіе этого образовала узкій каналъ, даютъ начало плёсамъ. Дѣйствительно можно себѣ представить, что углубленіе русла на участкѣ размытія продолжается даже при меньшемъ уклонѣ чѣмъ тотъ, который установился на нижележащемъ участкѣ отложенія. Крупная галька, накопившаяся внизу и давшая поводъ къ образованію переката, была вынесена съ вышележащаго участка размытія еще въ то время, когда онъ отличался большимъ уклономъ. Съ теченіемъ времени размытіе ослабѣло, съ участка размытія выносились все болѣе и болѣе мелкіе матеріялы, наконецъ настолько мелкіе, что ничто изъ нихъ не отлагалось на нижеслѣдующемъ перекатѣ. Размытіе прекратилось при уклонѣ далеко меньшемъ, чѣмъ уклонъ на перекатѣ, сложившійся во время отложенія крупнозернистыхъ наносовъ.

Нѣтъ сомнѣнія что плёсы, находящіеся повыше перекатовъ, образовавшихся на накопленіяхъ наносовъ, произошли изъ бывшихъ участковъ размытія, если, разумѣется, здѣсь не было условій, способствующихъ образованію того вида переката, который попадается на участкахъ размытія. [Мы имѣемъ въ виду тотъ случай, когда дно въ данномъ мѣстѣ оказываетъ большее сопротивленіе размытію, чѣмъ берега].

Такимъ образомъ можно разсматривать подобные плёсы какъ нормальные участки теченія. Они болѣе глубоки, менѣе широки чѣмъ перекаты не потому, что здѣсь были или есть условія, способствующія образованію особенно глубокаго и уз-

каго русла но потому, что перекаты суть исключительно широкіе и мелководные участки теченія а плёсы сравнительно съ ними оказываются глубокими и узкими.

Если перекатъ находится на накопленіи наносовъ, принесенныхъ притокомъ или происшедшемъ отъ какого нибудь обвала стѣнъ долины, то вышележащій участокъ теченія подвергается запруженію. Запруженіе влечетъ непремѣнно за собою возвышеніе уровня воды и уменьшеніе уклона. Само собою понятно, что возвышеніе уровня воды выражается увеличеніемъ глубины вышележащаго участка. Такимъ образомъ вышележащій участокъ пріобрѣтаетъ одну изъ характеристическихъ чертъ плёса.

Перекаты отличаются большимъ уклономъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ широкимъ и мелкимъ русломъ. Гораздо рѣже встрѣчаются *стремнины*, обладающія большимъ уклономъ а вмѣстѣ съ тѣмъ узкимъ и глубокимъ русломъ. Само собою понятно, что скорость теченія на стремнинахъ бываетъ особенно велика. Онѣ образуются только въ весьма твердыхъ породахъ, гдѣ даже при самомъ большомъ приближеніи динамической оси къ берегу размытіе послѣдняго было всегда незначительно, гдѣ въ тоже самое время, благодаря присутствію гальки и песку и большой скорости дно размывалось энергично и рѣка углублялась почти вертикально. Примѣромъ могутъ послужить знаменитыя стремнины Дуная въ Желѣзныхъ Воротахъ.

Рихтгофенъ [1]) говоритъ, что форма русла зависитъ отъ распредѣленія силъ во время половодья. Дѣйствительно въ это время рѣка обладаетъ большей энергіей, больше размываетъ, больше переноситъ и больше отлагаетъ, чѣмъ въ остальное время года. Можно сказать, что встрѣчаются рѣки, которыя во время низкаго состоянія воды только пользуются русломъ, созданнымъ половодьями. Къ сожалѣнію вопросъ о зависимости формы русла отъ годичныхъ измѣненій расхода непосредственно связанъ съ теоріей перемѣннаго состоянія рѣкъ, которая, какъ

---

[1]) Führer стр. 153.

это было замѣчено во вступленіи и во второй главѣ, находится въ весьма неудовлетворительномъ состояніи.

Поэтому мы ограничимся только нѣкоторыми замѣчаніями. Вольтманъ [1]) указываетъ на то, что существуетъ нѣкоторая форма русла (см. F. 4), при которой средняя скорость и отношеніе глубины къ ширинѣ всегда (т. е. для какого угодно расхода) остается постоянной. Въ виду сохраненія постоянной скорости можно бы подумать, что форма (4) есть прочная.

Но не говоря о томъ, что для прочнаго состоянія нужны не столько постоянныя среднія, сколько непревышающія извѣстнаго предѣла подонныя и прибрежныя скорости, не говоря о томъ, что предположенія, сдѣланныя при теоретическомъ выводѣ этой формулы произвольны, замѣтимъ, что форма (4) невозможна уже потому, что размытіе создаетъ не выпуклые (вверхъ) а вогнутые подводные склоны. Только склоны, образуемые намываніемъ, могутъ быть выпуклыми.

Еслибы у извѣстной рѣки русло образовалось и измѣнялось только во время половодья, а въ остальное время года рѣка только пользовалась имъ, то оно имѣло-бы размѣры, соотвѣтствующіе количеству воды, протекающему во время половодья, — а въ остальное время рѣка занимала-бы только самую нижнюю часть русла, покрывая дно болѣе или менѣе толстымъ слоемъ воды.

Но обыкновенно русло соотвѣтствуетъ нѣкоторому среднему состоянію рѣки, излишекъ воды во время половодья выступаетъ изъ русла. У рѣкъ, возвышающихъ свое русло, излишекъ просто распространяется по заливной долинѣ. У размывающихъ рѣкъ, текущихъ въ глубокихъ ущельяхъ, разливъ заполняетъ ущелье до нѣкотораго уровня; но многимъ размывающимъ или размывавшимъ рѣкамъ свойственно двухъярусное

---

[1]) См. Rühlmann Hydromechanik стр 436. Связь между абсциссой x и ординатой y (см. F. I) выражается слѣдующей формулой

$$x = c \log nat.(y + \sqrt{y^2 - c^2}) + A.$$

(см. F. V) русло, состоящее изъ нижняго болѣе узкаго русла, соотвѣтствующаго среднему состоянію рѣки (lit mineur) и верхняго яруса, широкой поймы, служащей вмѣстилищемъ для воды во время половодья (lit majeur). Замѣчательный примѣръ двухъярусназо русла на Ян-тсе-кіангѣ въ горномъ ущельи приводится у Рихтгофена [1]).

И русло и пойма [2]) имѣютъ опредѣленные берега (въ заливной долинѣ нѣтъ опредѣленныхъ вторыхъ береговъ). Очевидно двухъярусная форма соотвѣтствуетъ двумъ состояніямъ водъ—среднему и самому высокому.—Кажется, что стреженью, рѣзко выдѣляющейся среди русла, выражается зависимость формы русла отъ третьяго, самаго низкаго состоянія рѣки [3]).

Отношеніе между глубиною и шириною у поймы меньше, чѣмъ у русла. Уклонъ рѣки одинъ и тотъ-же во всякое время года, породы, среди которыхъ она протекаетъ, однѣ и тѣ-же. Сравнимъ теперь двѣ рѣки, протекающія среди однѣхъ и тѣхъ-же породъ, всюду находящіяся въ однихъ и тѣхъ-же условіяхъ и обладающія однимъ и тѣмъ-же уклономъ, но различающіяся расходомъ. Если введемъ условіе, чтобы обѣ рѣки находились въ приблизительно прочномъ состояніи (т. е. въ томъ, въ которомъ размытіе дѣлается ничтожнымъ), то окажется, что у большей рѣки отношеніе между шириною и глубиною должно быть значительно больше, чѣмъ у малой. Именно, въ широкомъ и мелкомъ руслѣ треніе о берега и дно значительно больше, чѣмъ у узкой и глубокой, а потому скорости въ большей рѣки точно также какъ въ малой могутъ остаться меньше тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ вода можетъ размывать данную породу. И такъ, различіе между относительными размѣрами поймы и русла объясняется стремленіемъ къ тому, чтобы создать приблизительно прочную форму русла, приноровленную къ двумъ различнымъ состояніямъ рѣки.

---

[1]) Führer. etc. стр. 206.

[2]) Позволяю себѣ придать словамъ «пойма» и «заливная долина» нѣкоторыя спеціальныя значенія.

[3]) Въ такомъ случаѣ можно-бы различать даже трехъярусныя русла.

ГЛАВА VIII.

Перемѣщеніе русла подъ вліяніемъ внѣшнихъ причинъ и вслѣдствіе реакцій между рѣкою и притоками.

Словцовъ [1]) первый объяснялъ передвиженіе русла сибирскихъ рѣкъ съ запада на востокъ вліяніемъ вращенія земли. Независимо отъ него Бэръ высказалъ подобное мнѣніе относительно рѣкъ Россіи и другихъ странъ. Но и Бэръ и Словцевъ, а за ними многіе даже современные геологи и географы полали и полагаютъ, что вращеніе земли не оказываетъ никакого вліянія на рѣки, текущія вдоль параллелей. Это мнѣніе ложно. Въ механикѣ доказывается, что поступательное движеніе земли не оказываетъ вліянія на характеръ движенія тѣлъ, движущихся по поверхности земли, но вращательное движеніе даетъ поводъ къ нѣкоторому ускоренію, называемому ускореніемъ Коріолиса или сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ. Ускореніе Коріолиса дается формулой:

$$2\,\omega\,.\,\upsilon\,.\,sin\,\alpha \qquad (1)$$

гдѣ ω есть угловая скорость вращенія земли

» υ » поступательная скорость разсматриваемаго тѣла относительно земли.

» α » уголъ между сѣверной частью полярной оси земли и моментальнымъ направленіемъ скорости: υ.

---

[1]) Middendorff. Sibir. Reise Mem. Acad. St. Pet. IV томъ, I часть, 2 вып., стр. 244.

Если разсматриваемое тѣло находится подъ широтою λ и направленіе его движенія составляетъ съ меридіаномъ даннаго мѣста, считаемый по часовой стрѣлкѣ уголъ β (азимутъ), если обозначимъ вертикальную слагающую скорости тѣла посредствомъ u, а горизонтальную посредствомъ: w, то вертикальная слагающая сложнаго центробѣжнаго ускоренія будетъ:

$$-2\omega . w . \sin\beta . \cos\lambda$$

а горизонтальная:

$$-2\omega[w . \sin\lambda + u . \cos\beta . \cos\lambda] \qquad (2)$$

Изъ этого видно, что обѣ слагающія сложнаго центробѣжнаго ускоренія зависятъ отъ азимута. Но, если движеніе совершенно горизонтально [2]), то u равно нулю и ускореніе независитъ отъ азимута. Вертикальная его слагающая равна нулю, а горизонтальная будетъ:

$$-2\omega . w . \sin\lambda \qquad (3)$$

Эта формула употребляется въ метеорологіи и въ физической географіи, такъ какъ, разсматривая движенія воды и воздуха, можно чаще всего пренебречь вліяніемъ вертикальной слагающей скорости. Ускореніе Коріолиса всегда перпендикулярно къ направленію движенія. Оно дѣйствуетъ въ сѣверномъ полушаріи вправо, въ южномъ въ влѣво отъ направленія движенія.

Разсужденія о вліяніи вращенія земли переполнены заблужденіями. Такъ н. п. говорятъ о разности давленій на лѣвый и правый берегъ, когда здѣсь дѣло въ движеніи а не въ давленіи, сравниваютъ сложное центробѣжное ускореніе съ ускоре-

---

[1]) Baer. Ueber ein allgemeines Gesetz in der Gestaltung von Flussbetten. Bullet. Acad. St. Petersburg 1860 г. тоже Studien aus dem Gebiete der Naturwiss. стр. 120.

[2]) т. е. совершается по поверхности шара. Для эллипсоида наши формулы вѣрны только приблизительно.

ніемъ силою тяжести [1]) и, разумѣется, находятъ, что это послѣднее несравненно больше и т. п.

Кажется, что только американскіе ученые Жильбертъ и Бэнъ понимаютъ вопросъ, какъ слѣдуетъ. Жильбертъ [2]) сравниваетъ ускореніе вслѣдствіе вращенія земли съ центробѣжнымъ ускореніемъ въ извилинахъ Миссисипи и находитъ, что эти величины одинаковаго порядка. Бэнъ [3]) замѣчаетъ, что ускореніе вслѣдствіе вращенія земли совершенно сравнимо съ ускореніемъ вдоль теченія. Дѣйствительно, съ этимъ ускореніемъ, а не съ величиною: g (9,8 метра въ секунду) слѣдуетъ сравнивать ускореніе Коріолиса, ибо вода въ рѣкахъ не падаетъ вертикально, а стекаетъ по наклоннымъ поверхностямъ. Чтобы дать понятіе объ отношеніи между ускореніемъ вдоль теченія и ускореніемъ Коріолиса, возьмемъ слѣдующій примѣръ. Средняя скорость теченія Волги равна 1,4 метрамъ въ секунду, уклонъ: 0,00004, слѣдовательно, ускореніе вдоль теченія, если вмѣсто $\sin i$ подставимъ i [4]) будетъ:

$$g.i = 9{,}81 \times 0{,}00004 = 0{,}00039 \text{ метр. въ сек.}$$

Съ другой стороны, подставляя въ формулу: (3), $w = 1{,}4$ $\sin\lambda = \sin 50^0 = 0{,}776$, $\omega = \frac{2\pi}{86164}$, гдѣ $\pi = 3{,}141\ldots$ найдемъ, что ускореніе Коріолиса въ данномъ случаѣ составляетъ 0,000156 метр. въ сек. т. е. больше двухъ пятыхъ ускоренія

[1]) Насколько вижу изъ Гюнтера (Günther. Lehrbuch der Geophysik II томъ, Stuttgart 1885 г. стр. 602. (оригинальная статья Цэпприца была для меня недоступна), даже Пэпприцъ плохо понималъ это явленіе. Онъ доказываетъ, что возвышеніе уровня воды у праваго берега незначительно. Это правда, но дѣло не въ возвышеніи уровня воды, которое зависитъ отъ отношенія ускоренія Коріолиса къ ускоренію силой тяжести т. е. къ g а въ сравнительно болѣе сильномъ подмываніи праваго берега, которое зависитъ отъ отношенія ускоренія Коріолиса къ ускоренію вдоль теченія т. е. къ $g \times \sin i$. Гюнтеръ, очевидно. тоже не понимаетъ вопроса.

[2]) G. K. Gilbert. The sufficiency of the terrestrial rotation for the deflection of streams. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 27 томъ, стр. 430.

[3]) Baines. On the sufficiency... Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 28 томъ стр. 434.

[4]) Это позволительно, такъ какъ i есть весьма малая величина.

вдоль теченія. Замѣтимъ, что ускореніе вдоль теченія пропорціонально уклону, а ускореніе Коріолиса пропорціонально скорости т. е. (ср. гл. II) возрастаетъ не только по мѣрѣ увеличенія уклона, но тоже по мѣрѣ увеличенія размѣровъ русла. Слѣдовательно, при томъ-же уклонѣ ускореніе Коріолиса тѣмъ больше, чѣмъ больше разсматриваемая рѣка.

Не слѣдуетъ полагать, что н. п. у Волги, гдѣ ускореніе, происходящее отъ вращенія земли равно двумъ пятымъ ускоренія вдоль теченія, скорость, съ которой вода подвигается къ правому берегу, равна двумъ пятымъ скорости вдоль теченія. Напротивъ того, скорость и ускореніе двѣ различныя вещи [1]). Но если ускореніе Коріолиса равно двумъ пятымъ ускоренія вдоль теченія, то можно навѣрно сказать, что значительная доля энергіи рѣки идетъ именно на разрушеніе праваго берега.

Такъ какъ частицы воды движутся съ различными скоростями, а ускореніе, происходящее отъ вращенія земли, пропорціонально скорости, то къ правому берегу дѣйствительно направляются только тѣ частицы воды, которыя обладаютъ скоростью большей, чѣмъ извѣстная критическая скорость; остальныя оттѣсняются назадъ къ лѣвому берегу. Благодаря отклоненію наиболѣе быстро текущихъ струй вправо, динамическая ось теченія перемѣщается къ правому берегу. Здѣсь происходитъ нѣчто подобное, какъ при движеніи воды въ извилинахъ (ср. гл. V), здѣсь тоже возникаетъ медленная поперечная циркуляція, точно также способствующая перенесенію размытыхъ у праваго берега веществъ на лѣвый. Такъ какъ въ извилинахъ вода подмываетъ то правый, то лѣвый берегъ, а ускореніе вслѣдствіе вращенія земли способствуетъ подмыванію праваго берега но мѣшаетъ подмыванію лѣваго, то, хотя центробѣжное ускореніе въ извилинахъ почти всегда больше ускоренія вслѣд-

---

[1]) Чтобы теоретически вычислитъ скорость, съ которой вода въ каналѣ данной величины съ даннымъ уклономъ устремляется къ правому берегу нужно рѣшить задачу, превосходящую средства современнаго анализа.

ствіе вращенія земли [1]), въ концѣ концовъ, если тому не мѣшаютъ постоянныя причины, сообщающія ускореніе влѣво причины, рѣка въ общемъ должна передвигаться вправо.

Кромѣ вращенія земли есть еще другіе факторы, дающіе поводъ къ перемѣщеніямъ русла. Стефановичъ [2]) и Клингэ [3]) придаютъ особенное значеніе дѣйствію вѣтра. Русло Дуная въ Венгріи ежегодно передвигается на западъ на 0,47, а русло Тиссы на 0,31 метровъ. Стефановичъ объясняетъ это передвиженіе дѣйствіемъ Кошавы, сильнаго юго-восточнаго вѣтра. Онъ указываетъ на удары волнъ, возбуждаемыхъ преобладающимъ вѣтромъ и размывающихъ преимущественно западный берегъ, на занесеніе русла пескомъ, навѣваемымъ вѣтромъ [4]). Клингэ утверждаетъ, что сибирскія рѣки передвигаются на востокъ потому, что лѣтомъ, когда онѣ вскрыты отъ льда въ Сибири дуютъ западные вѣтры, Волга-же потому отступаетъ на западъ, что въ Поволжьи лѣтомъ господствуютъ восточные вѣтры.

---

[1]) Ускореніе вслѣдствіе вращенія земли пропорціонально скорости и факторъ пропорціональности, какъ это видно изъ формулы (3), всегда малый. Центробѣжное ускореніе въ извилинахъ пропорціонально квадрату отъ скорости и факторъ пропорціональности: кривизна въ иныхъ случаяхъ бываетъ довольно большой. У Миссисипи въ иныхъ мѣстахъ центробѣжное ускореніе слишкомъ въ двадцать разъ больше, чѣмъ ускореніе вслѣдствіе вращенія земли.

[2]) См. Die Seitenverschiebung der Flüsse. Gaea. 1881 стр. 705.

[3]) Klinge. Ueber den Einfluss der Windrichtung etc. Englers Botan. Jahrb. XI стр. 264.

[4]) Является вопросъ, не возбуждаетъ-ли вѣтеръ нѣкоторыхъ теченій, способствующихъ перенесенію веществъ съ одного берега на другой.

Не вся энергія передаваемая вѣтромъ водѣ (ср. гл. II), идетъ на возбужденіе волнъ. Часть ея идетъ на возбужденіе поступательныхъ движеній. Такъ какъ берегъ мѣшаетъ движенію поперекъ русла, то оно должно непремѣнно перейти въ поперечную циркуляцію въ родѣ той, которая поддерживается центробѣжнымъ ускореніемъ и вращеніемъ земли. Разница состоитъ въ томъ, что вѣтеръ дѣйствуетъ непосредственно только на верхній слой воды, кромѣ того дѣйствіе вѣтра не зависитъ отъ поступательной скорости частицъ вдоль русла. Эта циркуляція всегда слаба и измѣняется вслѣдствіе измѣненія вѣтра. Весьма сомнительно, чтобы она могла имѣть существенное значеніе для перемѣщенія русла.

Хотя принципъ, защищаемый Стефановичемъ и Клингэ совершенно справедливъ, но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы, какъ это дѣлаютъ указаные авторы, отрицать вліяніе вращенія земли. Оба фактора то слагаются, то противудѣйствуютъ другъ другу. Точно также воздѣйствіе притоковъ и направленіе паденія пластовъ имѣютъ вліяніе на перемѣщеніе русла.

Доказательства приводимыя Стефановичемъ и Клингэ вовсе не убѣдительны. Такъ н. п. Дунай и Тисса передвигаются вправо. Слѣдовательно можно сказать, что ихъ передвиженіе вызвано одновременно дѣйствіемъ Коцавы и вращеніемъ земли. Съ другой стороны замѣтимъ, что вѣтры предполагаемые г. Клингэ всегда почему то дуютъ въ ту-же сторону, въ которую дѣйствуетъ вращеніе земли, а истинные вѣтры дуютъ пожалуй не совсѣмъ такъ. На счетъ распредѣленія вѣтровъ въ Сибири у меня нѣтъ достаточныхъ данныхъ, но и г. Клингэ ихъ тоже не имѣлъ, если основалъ свое мнѣніе на наблюденіяхъ Финша [1]); который, кажется, былъ не особенно долго на Оби. Что касается Поволжья, то данныя есть, но онѣ не говорятъ въ пользу мнѣнія г. Клингэ. Вопервыхъ у Воейкова [2]) находимъ слѣдующее:

Вѣтры лѣтомъ	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Пенза	14	10	5	10	6	19	15	22
Самара	18	20	9	2	5	11	32	3
Оренбургъ	20	16	13	4	7	11	17	12
Астрахань	6	16	15	19	6	12	12	14

Изъ этого видно, что на станціяхъ сѣвернаго Поволжья лѣтомъ, когда на Волгѣ нѣтъ льда, преобладаютъ западные вѣтры, за то въ Астрахани балансъ слагается въ пользу восточныхъ вѣтровъ. Кромѣ того изъ разсмотрѣнія лѣтописей главной Метеорологической Обсерваторіи за 1886—1890 годы для станцій: Нижній, Казань, Тетюши, Буинскъ, Симбирскъ, Сама-

---

[1]) loc. cit. стр. 302.

[2]) Воейковъ. Климаты земного шара. С.-Пет. 1884 г. стр. 444.

ра, Сызрань, Вольскъ, Саратовъ, Дубовка, Николаевскъ и Камышинъ оказалось, что на станціяхъ сѣверной части Поволжья до Сызрани и годичный и лѣтній балансъ слагаются въ пользу вѣтровъ, дующихъ съ западныхъ румбовъ. Перевѣсъ оказался и количественный и качественный, т. е. западные вѣтры сильнѣе. На южномъ Поволжьи отношенія изъ году въ годъ болѣе измѣнчивы, на нѣкоторыхъ станціяхъ наблюденія недостаточно полны, но въ общемъ, кажется, лѣтомъ восточные вѣтры преобладаютъ надъ западными. Слѣдовательно по г. Клингэ Волга около Казани, Симбирска, Самары должнабы передвигаться влѣво, а дальше на югъ вправо, между тѣмъ она всюду передвигается вправо т. е. рѣшающее вліяніе въ данномъ случаѣ принадлежитъ вращенію земли.

Вліяніе вращенія земли и вѣтровъ должно особенно сильно сказываться у рѣкъ, текущихъ въ мягкихъ породахъ и мало углубляющихъ русло, притомъ тамъ, гдѣ пласты залегаютъ горизонтально. Само собою очевидно, что вліяніе внѣшнихъ причинъ отходитъ на второй планъ тамъ, гдѣ рельефъ разнообразный и тектоническое строеніе сложно, тамъ, гдѣ быстрая рѣка врѣзается вертикально въ твердыя породы, но мало размываетъ берега.

Точно также перемѣщеніе широкой но мелководной рѣки не можетъ достигать тѣхъ размѣровъ, что перемѣщеніе равной по расходу глубокой и узкой рѣки. Вообще здѣсь можно повторить тѣ-же замѣчанія относительно благопріятныхъ и неблагопріятныхъ условій, которыя уже были высказаны по поводу перемѣщенія русла при образованіи извилинъ.

Съ другой стороны, какъ это было выше отмѣчено, вращеніе земли оказываетъ большее вліяніе на большія рѣки, чѣмъ на малыя, поэтому неудивительно, что подмываніе правыхъ береговъ особенно замѣтно на нижнемъ равнинномъ теченіи большихъ рѣкъ, а въ равнинной Россіи, въ ея мягкихъ почвахъ, замѣчается и на малыхъ рѣкахъ, какъ это за немногими ис-

ключеніями наблюдается н. п. на рѣкахъ Нижегородской губерніи [1]).

Одна изъ причинъ передвиженія русла состоитъ въ наклонности пластовъ, разумѣется, за исключеніемъ того случая, когда рѣка течетъ перпендикулярно къ ихъ простиранію. Сопротивленіе, оказываемое размытію, больше въ направленіи перпендикулярномъ къ напластованію, чѣмъ въ продольномъ [обратное бываетъ только тамъ, гдѣ есть цѣлая сѣть перпендикулярныхъ трещинъ]. Поэтому рѣка какъ-бы соскользаетъ по пластамъ. Разумѣется, значеніе наклонности пластовъ усиливается твердыми прослойками. Этотъ способъ передвиженія особенно важенъ для тѣхъ участковъ рѣкъ, которые находятся въ размывающемъ состояніи.

Вѣрными признаками передвиженія русла служатъ слѣды старыхъ руслъ, обрывистые берега, состоящіе изъ породъ, несомнѣнно неотложенныхъ рѣкою въ связи съ несомнѣнно рѣчными наносами на противуположномъ низкомъ берегу.

Въ конфигураціи долины встрѣчаются очень часто черты, на первый взглядъ указывающія на перемѣщеніе рѣки, но обусловленныя неравномѣрнымъ развитіемъ склоновъ долины. Такъ н. п. склонъ, выставленный на дѣйствіе обильныхъ дождемъ вѣтровъ, бываетъ иногда болѣе крутой чѣмъ противуположный [2]), водораздѣлы, находящіеся между параллельными притоками большой рѣки [3]), удаляются отъ одного притока, и приближаются къ другому, благодаря неравномѣрному размытію склоновъ долинъ вторичными притоками (т. е. притоками притоковъ) и т. д.

Когда притокъ приноситъ больше продуктовъ размытія, чѣмъ рѣка можетъ переносить, то у устья его накопляются наносы. Очень часто накопленія достигаютъ такихъ размѣровъ, что главная рѣка принуждена обходить ихъ. Разумѣется,

---

[1]) Докучаевъ. Матеріалы и т. д. вып. XIII гл. I стр. 64.
[2]) Rucktäschel. Ungleichseitigkeit etc. Pet. Mitth. 1889 г. стр. 224.
[3]) Hilber. Asymmetrische Thäler. Pet. Mitth. 1886 г. стр. 171.

это возможно только тогда, когда рѣка успѣваетъ соотвѣтственно подмывать противуположный берегъ. Въ противномъ случаѣ дѣло можетъ дойти до запруженія и до образованія озера. Форель [1]) склоненъ думать, что нѣчто подобное способствовало образованію Женевскаго озера.

Рядъ притоковъ, впадающихъ съ одной стороны и приносящихъ много наносовъ можетъ отодвигать теченіе главной рѣки. Такъ какъ обильные продуктами размытія притоки выходятъ изъ высокихъ горъ, то Пэшель [2]) говоритъ, что рѣки, текущія параллельно къ высокимъ горамъ, стремятся удалиться отъ нихъ.

Миссисипи вмѣсто того, чтобы перемѣщаться вправо, отодвигается влѣво. Давно [3]) уже было высказано мнѣніе, что это результатъ воздѣйствія правыхъ притоковъ, болѣе многоводныхъ и приносящихъ болѣе наносовъ. Реклю [4]) сомнѣвается въ многоводности правыхъ притоковъ и склоненъ думать, что это результатъ общей покатости страны и пластовъ къ востоку.

Полагаютъ тоже, что кромѣ односторонняго запруженія русла и долины передвиженію Миссисипи содѣйствуетъ само толканье водою притоковъ, въ подтвержденіе чего приводятъ. что послѣ впаденія Красной Рѣки (Red-River) [5]) Миссисипи принимаетъ направленіе своего притока.

Нѣтъ сомнѣнія, что подобное толканье всегда имѣетъ мѣсто, но выражается-ли оно въ перемѣщеніи русла, это дру-

---

[1]) Forel. Le Léman. Lausanne 1892 г. стр. 247 и слѣд.

[2]) Peschel. Neue Probleme 1870 г. стр. 134. Cp. Seitenverschiebung etc.... Gaea 1881 стр. 712.

[3]) Lyell. Principles (во фр. пер. II томъ Paris 1842 стр. 352).

[4]) Reclus. Geographie Universelle томъ XVI Paris 1892 г. стр. 352

[5]) Shaler. Fresh water Morasses. 10 Ann Rep. U. S. Geol. Surv. стр. 279.

Вопросъ о перемѣщенія Миссисипи влѣво повидимому не исчерпанъ. Кажется, что точныхъ данныхъ о количествѣ твердыхъ веществъ, приносимыхъ каждымъ притокомъ отдѣльно, вовсе нѣтъ, а потому нельзя высказаться въ пользу того или другого мнѣнія.

гой вопросъ. Состояніе рѣки всегда одновременно зависитъ отъ множества различныхъ условій, а потому тѣ-же причины въ различныхъ случаяхъ производятъ различные результаты. Такъ н. п. «à priori» можно сказать, что толканье оказываетъ самое незначительное дѣйствіе на рѣки сильно углубляющія свое русло. Тѣ же рѣки обыкновенно въ состояніи подобрать наносы, приносимые притоками, а потому не подвержены одностороннему запруженію русла. Съ другой стороны, заставляя свои притоки тоже врѣзываться все глубже и глубже, онѣ вмѣстѣ съ тѣмъ способствуютъ упроченію устья послѣднихъ на одномъ мѣстѣ. Напротивъ того, рѣки, мало углубляющіяся, несущія много продуктовъ размытія, отлагаютъ свои наносы у устьевъ притоковъ. Струя воды, выходящей изъ притока дѣйствуетъ какъ запоръ и даетъ поводъ къ мгновенному уменьшенію скорости и выдѣленію наносовъ. На любой картѣ можно замѣтить, что притоки, подходящіе къ главной рѣкѣ среди наносныхъ равнинъ, поворачиваютъ какъ бы отталкиваемые главной рѣкою и наконецъ соединяются съ нею подъ острымъ угломъ. Примѣромъ могутъ послужить притоки Рейна между Базелемъ и Майнцомъ [1]). Однако не всегда можно сказать, что соединеніе подъ острымъ угломъ произошло отъ передвиженія устья притока. Генкель [2]) приводитъ случай подобной конфигураціи, происшедшей отъ того, что притокъ воспользовался старымъ русломъ главной рѣки. Когда рѣка возвышаетъ свое русло болѣе быстро чѣмъ притоки, то въ результатѣ оказывается запруженіе устьевъ послѣднихъ и образованіе озеръ.

Наконецъ, какъ замѣчаетъ Стефановичъ [3]), передвиженіе русла въ тропическихъ странахъ можетъ быть иногда обусловлено заростаніемъ.

---

[1]) Ср. Lapparent. loc. cit. стр. 212. Онъ ошибается, говоря, что скопленія наносовъ не образуются пониже соединенія двухъ рѣкъ.

[2]) Henkel. Das Umbiegen der Nebenflüsse. Peterm. Mitth. 1889 г. стр. 176

[3]) Ср. Seitenverschiebung etc.. стр. 718.

ГЛАВА IX.

Нѣкоторыя замѣчанія объ образованіи долинъ.

На разныхъ участкахъ, даже въ разныхъ мѣстахъ тогоже сѣченія рѣки приходятъ въ соприкосновеніе съ различными породами. Результаты ихъ дѣятельности въ высокой степени зависятъ отъ свойствъ породъ. При томъ же расходѣ, формѣ и величинѣ русла, при тѣхъ-же скоростяхъ, размытіе береговъ и дна, состоящаго изъ гранита можетъ быть въ сотни и тысячи разъ меньше, чѣмъ размытіе береговъ и дна, состоящаго изъ глины. Уже въ главѣ объ извилинахъ мы указывали на то, что размытіе твердыхъ породъ совершается путемъ истиранія пескомъ и галькою, а потому идетъ успѣшно только при большой скорости, что оно сосредоточивается на днѣ рѣки, а потому ведетъ къ образованію узкихъ и глубокихъ долинъ. Равнымъ образомъ мы указывали на то, что въ рыхлыхъ породахъ даже при малой скорости размытіе береговъ значительно. Потому то въ рыхлыхъ породахъ рѣка перемѣщается и подъ вліяніемъ внѣшнихъ причинъ, какъ н. п. вращенія земли и подъ вліяніемъ свойственной рѣкамъ наклонности къ образованію извилинъ. Если ея дѣятельность характеризуется преобладаніемъ размытія, то въ результатѣ оказывается образованіе широкой [сравнительно съ глубиною] долины, если же ея дѣятельность характеризуется преобладаніемъ отложенія, то въ результатѣ оказывается образованіе широкой наносной равнины.

Если рѣка попеременно протекаетъ то среди лучше сопротивляющихся, то среди хуже сопротивляющихся размытію породъ, то это очень часто сказывается на горизонтальныхъ очертаніяхъ ея теченія.

Зюссъ [1]) сравниваетъ Дунай съ веревкой, висящей на нѣсколькихъ гвоздяхъ. Подобно тому, какъ веревка свисаетъ дугами [2]) отъ одной точки повѣса до другой, точно также Дунай зацѣпляется за горы [3]), а между горами изгибается огромными дугами вправо. Веревка свисаетъ подъ вліяніемъ силы тяжести, Дунай изгибается вправо вслѣдствіе вращенія земли.

На теченіи Волги есть тоже одно мѣсто, гдѣ она зацѣпляется за твердыя породы, именно за твердый горный [4]) известнякъ каменноугольной формаціи. Это мѣсто находится на Самарской Лукѣ у Жегулевскихъ высотъ. Уже баронъ Розенъ [5]) высказалъ мысль, что Самарская Лука вѣроятно образовалась вслѣдствіе того, что Волга повыше и пониже Жегулевскихъ высотъ въ продолженіе многихъ вѣковъ передвигались вправо, а на этомъ мѣстѣ или очень мало или вовсе не передвинулась.

Въ самомъ фактѣ передвиженія Волги вправо нельзя сомнѣваться. Высокій правый берегъ сопровождаетъ рѣку отъ Нижняго-Новгорода до раздѣленія на рукава. Лѣвый берегъ низкій и страна постепенно поднимается къ востоку. Однимъ словомъ поперечное сѣченіе долины именно такое, какое должно образоваться у рѣки, отступающей на западъ да притомъ

---

[1]) См. Peters. Die Donau Leipzig 1876 г. стр. 351.

[2]) Собственно говоря это особыя кривыя, такъ наз. цѣпочки.

[3]) Дунай врѣзывается въ твердыя породы около Кремса (Богемскій массивъ) около Вѣны (въ отроги Альпъ), дальше около Вайцена, потомъ около Орсовы (Желѣзныя ворота) наконецъ въ Мачинскія горы въ сѣверо западномъ углу Добручи. Ср. Peters loc. cit. стр. 368 тоже Suess Antlitz der Erde I томъ Prag 1885 г. стр. 612.

[4]) Павловъ. Самарская Лука и Жегули. Труды Геол. Ком. томъ II, № 5 стр. 62.

[5]) Статья Розена помѣщена въ Трудахъ IV Съѣзда. Къ сожалѣнію она осталась для меня недоступной.

весьма медленно углубляющей русло. Современныя [1]) наблюденія свидѣтельствуютъ о томъ, что по большей части подмывается правый берегъ, историческія [2]) данныя доказываютъ тоже самое.

По самой величинѣ Самарской Луки можно судить, что Волга передвинулась вправо въ общемъ на болѣе чѣмъ восемдесятъ верстъ. Для такого перемѣщенія нуженъ весьма большой промежутокъ времени. Въ сравнительно недавнее геологическое время въ исторіи Волги случилось событіе, вслѣдствіе котораго ея отступленіе къ западу было временно прекращено, ибо сама рѣка [3]) временно перестала существовать. Мы говоримъ о каспійской трансгрессіи, во время которой море въ видѣ длиннаго залива простиралось до низовьевъ Камы. Очевидно, трансгрессія воспользовалась готовой низменностью т. е. старой долиной Волги. Ея западная граница была обозначена старымъ нагорнымъ правымъ берегомъ Волги. Въ настоящее время этотъ старый берегъ уже не существуетъ. Послѣ отступленія трансгрессіи Волга потекла по старой долинѣ, опять стала передвигаться вправо, подступила къ своему старому нагорному берегу, игравшему нѣкоторое время роль морского берега, подмыла его и унесла. Только тамъ, гдѣ вслѣдствіе зацѣпленія за Жегулевскіе твердые известняки рѣка не передвигается вправо, тамъ на правомъ нагорномъ берегу Волги, на южномъ склонѣ Самарской Луки, на высотѣ 104 м. надъ уровнемъ Каспія находятся каспійскіе осадки, какъ это было обнаружено Павловымъ [4]).

---

[1]) Ср. Докучаевъ Матеріалы для оцѣнки земель Нижегородской губ. вып. XIII С.-Пет. 1886 г. гл. I, стр. 7 и слѣд.

[2]) Ср. Baer. Studien aus dem Gebiete der Naturwissenschaften S.-Petersburg 1873 г. стр. 127.

Тоже Мушкетовъ Физ. Геол. II часть С.-Пет. 1888 г. стр. 247.

[3]) По крайней мѣрѣ на участкѣ отъ устья Камы до впаденія въ море.

[4]) См. Никитинъ. Изв Геол. Ком. V стр. 252.

Въ настоящее время [1]) на лѣвомъ берегу за полосой современнаго аллювія, ширина которой достигаетъ 3—15 верстъ, т. е. за поймой Волги слѣдуютъ постпліоценовыя прѣсноводныя отложенія Волги и ея притоковъ; за ними находятся осадки отчасти неопредѣленнаго характера, отчасти несомнѣнно оставленные каспійской трансгрессіей. Все это совершенно натурально и не даетъ повода къ какимъ-бы то ни было сомнѣніямъ или затрудненіямъ. Но слѣдуетъ отмѣтить важный фактъ, что подъ каспійскими осадками на востокъ отъ Волги и на югъ отъ Камы, находятся песчано-глинистые или песчано-галечниковые слои прѣсноводнаго происхожденія [2]). По всей вѣроятности это наносы древней Волги и ея притоковъ, отложившіеся раньше вторженія Каспія въ долину Волги. Конечно та древняя Волга, которая существовала до каспійской трансгрессіи, во многомъ различалась отъ современной, но она тоже текла съ сѣвера на югъ, тоже зацѣплялась за Жегулевскія высоты и образовала уже, хотя меньшую чѣмъ теперь, Самарскую Луку.

О причинахъ каспійской трансгрессіи здѣсь говорить не мѣсто. Замѣтимъ только мимоходомъ, что слѣдуетъ à priori исключить поднятія и опусканія въ области самой Волжской долины, такъ какъ здѣсь нѣтъ слѣдовъ какихъ-нибудь геотектоническихъ измѣненій, относящихся къ этому времени. Во вторыхъ, слѣдуетъ исключить вліяніе притяженія скандиново-русскимъ ледникомъ. Послѣ работъ Гергезеля, Дрыгальскаго, особенно же Удварда [3]) не остается никакихъ сомнѣній, что измѣненія геоида, обусловленныя притяженіемъ ледяныхъ покрововъ, въ большинствѣ случаевъ незначительны.

---

[1]) Ср. Кротовъ Казанское Закамье. Труды Казанскаго Общ. Естеств. XXII стр. 67 и слѣд.

Розенъ. Отчетъ о геол. экскурсіяхъ. Казань 1879 г.

Никитинъ статьи въ Извѣстіяхъ Геол. Ком. томъ V и VII.

Чернышевъ статьи въ Извѣстіяхъ Геол. Ком. томъ VII.

[2]) Кротовъ. loc. cit. стр. 298 и 299.

[3]) Woodward. U. S. Geol. Survey Bulletin № 48.

Когда вдоль теченія твердыя породы перемежаются съ мягкими, то на участкахъ съ твердыми [1]) породами должна образоваться узкая, на участкахъ съ мягкими широкая долина. «Долина Миннесоты» говоритъ Уорренъ [2]) расширяется всюду, гдѣ стѣны ея состоятъ изъ мягкихъ породъ, съуживается, гдѣ породы тверже». Долина въ родѣ долины Миннесоты на первый взглядъ наводитъ на мысль, что здѣсь былъ рядъ озеръ, впослѣдствіи соединившихся въ рѣку. Такъ какъ озеровидныя расширенія очень часто попадаются у рѣкъ южной и средней Россіи, то Докучаевъ [3]) высказываетъ мысль, что и эти рѣки по большей части образовались изъ рядовъ озеръ, хотя первоначально эта теорія была создана для рѣкъ той части Россіи, которая нѣкогда находилась подъ ледниковымъ покровомъ. Противъ этого взгляда были высказаны [4]) многія вѣскія возраженія. Указывалось на то, что озеровидныя расширенія долинъ всегда продолговаты, что онѣ наблюдаются у степныхъ рѣкъ т. е. въ мѣстахъ, гдѣ пожалуй никогда не было климатическихъ условій, благопріятныхъ для образованія озеръ. Кромѣ того имѣемъ нѣкоторое право предполагать, что въ данномъ случаѣ истинная прячина заключается во вліяніи различнаго сопротивленія породъ. По крайней мѣрѣ Докучаевъ замѣчаетъ [5]), что въ Нижегородской губерніи съуженія долинъ чаще всего совпадаютъ съ возвышеніями нагорнаго берега. Это совпаденіе объясняется весьма просто, если допустимъ, что тѣ-же самыя породы, которыя лучше сопротивлялись размытію атмосферной водою, малыми рѣчками и т. д. и вслѣдствіе этого остались въ видѣ возвышенностей, вмѣстѣ съ тѣмъ лучше сопротивлялись и сопротивляются размытію рѣкою. Это тѣмъ болѣе вѣ-

---

[1]) Cp. Richthofen Führer стр. 168.

[2]) Warren. Valley of Minnesota and Missisipi. Amer. Journ. of Science 3 сер. 16 томъ стр. 424.

[3]) Докучаевъ. Способы образованія долинъ. Стр. 215—218 и др.

[4]) См. Никитинъ. Общая Геол. карта Россіи листъ 56. Труды Геол. Ком. томъ I № 2, стр. 118 и слѣд.

[5]) Докучаевъ. Матеріялы и т. д. I гл. стр. 23.

роятно, что вовсе неособенно значительныя различія въ твердости породъ достаточны для того, чтобы дать поводъ къ образованію замѣтныхъ расширеній и съуженій. Что-же касается озерныхъ отложеній въ долинахъ рѣкъ, то съ употребленіемъ ихъ какъ доказательства озернаго происхожденія рѣкъ слѣдуетъ быть весьма осторожнымъ, такъ какъ они весьма легко могутъ происходить отъ древнихъ старицъ рѣки.

Долина Рейна отъ Базеля до Бингена имѣетъ видъ большого продолговатаго озернаго бассейна. Она слѣва ограждена Вогезами, справа Шварцвальдомъ, спереди прирейнскими горами [1]). (Таунусъ, Гундсрюкъ). Узкая и глубокая долина отъ Бингена до Боннъ служитъ истокомъ для этого бассейна. Мнѣніе, что здѣсь дѣйствительно было нѣкогда озеро, попало даже въ Бэдекеръ, однако Рамзей [2]) думаетъ, что предполагаемый озерный бассейнъ вымытъ самимъ Рейномъ. Есть слѣды того, что вся эта долина была прежде заполнена міоценовыми отложеніями до высоты 300 — 500 футомъ надъ современнымъ дномъ долины. По Рамзею эти міоценовыя отложенія вмѣстѣ съ девонскими пластами прирейнскихъ [3]) горъ нѣкогда образовали одну покатость, по которой Рейнъ стекалъ въ томъ-же направленіи, что и теперь. Но русло его постоянно углублялось, въ одно и тоже время въ твердомъ Девонѣ Рейнъ вымылъ узкую, а въ мягкомъ Міоценѣ, перемѣщаясь то вправо, то влѣво, широкую долину. Вся толща міоценовыхъ отложеній, заполнявшихъ теперешнюю долину, была вынесена сквозь узкое ущелье въ Девонѣ. Слѣдуетъ однако замѣтить, что многіе, между прочими Гонселль [4]), защищаютъ теорію озернаго происхожденія этой долины.

---

[1]) Rheinisches Gebirge у нѣмецкихъ авторовъ.

[2]) Ramsay. On the physical history of the valley of the Rhine. Quart. Journ. Geol. Soc. London XXX. 1874 г. стр. 81. Остальныя гипотезы Рамзюя и. п. о томъ, что нѣкогда рѣки этой мѣстности текли съ сѣвера на югъ, не съ юга на сѣверъ не представляютъ для насъ интереса.

[3]) Ramsay loc. cit. стр. 92.

[4]) Honsell Der Rheinstrom. Berlin 1889 ср. Jahrb. für Astron. und Geoph. за 1890 г. стр. 206.

Точно также вліяніе разнообразія породъ сказывается и въ очертаніяхъ вертикальнаго профиля рѣкъ. Углубленіе дна на участкахъ съ болѣе мягкими породами обыкновенно [1]) опережаетъ углубленіе на участкахъ съ болѣе твердыми. Вслѣдствіе этого на теченіи образуются какъ бы ступени. Скорость теченія достигаетъ минимума сейчасъ повыше выходовъ твердыхъ породъ или въ самомъ ихъ началѣ, максимума сейчасъ пониже выходовъ. Чѣмъ разности въ твердости больше, чѣмъ средній уклонъ больше, тѣмъ покатость при переходѣ отъ твердыхъ породъ къ мягкимъ больше. Рихтгофенъ [2]) замѣчаетъ, что переходы бываютъ болѣе рѣзки, когда пласты падаютъ противъ направленія теченія, чѣмъ когда они падаютъ по его направленію. Причина очевидна само собою: во второмъ случаѣ на дѣйствіе размытія выставлены поперечные разрѣзы пластовъ, оказывающіе меньшее сопротивленіе. За то въ этомъ случаѣ на выходахъ твердыхъ пластовъ очень часто происходитъ раздѣленіе на рукава, теченіе усѣяно скалами и порогами. На мѣстѣ перехода отъ твердыхъ породъ къ мягкимъ образуются водопады особенно, если пласты залегаютъ горизонтально. Благодаря выхревому движенію на днѣ водопада случается, что задняя его стѣна подмывается, водопадъ отступаетъ, а отступая, роетъ въ твердыхъ породахъ ущелье.

Образованіе долины Рейна по теоріи Рамзея, о которомъ была выше рѣчь, относится уже къ разряду такъ называемыхъ эпигенетическихъ образованій т. е. такихъ, когда современная форма долины объясняется бывшими, теперь уже не существующими чертами рельефа или тектоники. Въ данномъ случаѣ

---

[1]) Обыкновенно, но не всегда. Иногда дѣятельность рѣки вслѣдствіе разныхъ обстоятельствъ сильнѣе въ твердыхъ, чѣмъ въ мягкихъ породахъ и вполнѣ преодолѣваетъ большее сопротивленіе. Съ другой стороны, какъ это было отмѣчено выше, ступени образуются тоже по причинамъ, неимѣющимъ ничего общаго съ различіями въ твердости породъ. Поэтому по присутствію ступеней нельзя еще судить о различіяхъ въ твердости. У Лэвля. (Löwl. Ueber Thalbildung стр. 73 и слѣд.) находятся многочисленные примѣры, доказывающіе ошибочность подобныхъ заключеній.

исчезнувшая черта рельефа это однообразный склонъ, образованный отчасти изъ міоценовыхъ, отчасти изъ девонскихъ пластовъ.

Классическимъ примѣромъ эпигенетическаго образованія долины считается каньонъ рѣки Ямпа въ Соединенныхъ Штатахъ. Онъ проложенъ въ одинокой твердой известковой горѣ, торчащей среди слегка холмистой страны, состоящей изъ мягкихъ породъ. Очевидно холмъ былъ нѣкогда скрытъ подъ однообразной толщей мягкихъ породъ, рѣка углубляясь, попала на твердый известнякъ и врѣзалась въ него. Въ послѣдствіи размытіе атмосферной водою и мелкими рѣчками снесло мягкія породы, но оставило одинокій твердый холмъ.

Согласно Рихтгофену эпигенетическія образованія распространены въ странахъ, какъ юго-восточный Китай, весьма долго подвергавшихся дѣятельности размытія, не прерываемой вмѣшательствомъ другихъ геологическихъ факторовъ и кромѣ того обладающихъ нѣкоторымъ спеціальнымъ геологическимъ строеніемъ. Особенность строенія состоитъ съ томъ, что существуютъ двѣ системы пластовъ, верхняя и нижняя. Верхняя въ юго-восточномъ Китаѣ уничтожена размытіемъ, за исключеніемъ небольшихъ клочковъ. Глазамъ наблюдателя обыкновенно представляется нижняя система, въ настоящее время уже тоже сильно разрушенная размытіемъ. Главныя рѣки очевидно образовались еще въ то время, когда верхняя система опредѣляла орографію страны, поэтому теченіе главныхъ рѣки по большей части обнаруживаетъ странныя несогласія съ современнымъ рельефомъ. Малыя рѣки верхней системы очевидно не могли сохраниться и были замѣнены новыми, сформировавшимися въ зависимости отъ новаго рельефа.

Въ юго-восточномъ Китаѣ верхняя система соститъ изъ красныхъ, горизонтально залегающихъ песчаниковъ, нижняя изъ изогнутыхъ и потресканныхъ пластовъ, нѣкогда принадлежав-

шихъ складчатымъ горамъ и въ послѣдствіи срѣзанныхъ дѣятельностью волнъ при морской трансгрессіи.

Когда рѣка при углубленіи попала на пласты нижней системы перпендикулярно къ ихъ простиранію, то въ конфигураціи теченія не замѣчается ничего особеннаго, кромѣ расширеній и съуженій, стремнинъ и т. п.

Интересныя формы теченія попадаются тамъ, гдѣ прежнее теченіе было въ среднемъ параллельно простиранію породъ и гдѣ рѣка при углубленіи врѣзалась въ нѣкоторыхъ мѣстахъ въ твердыя, а въ другихъ въ мягкія породы. Если притомъ пласты залегаютъ наклонно и падаютъ отъ рѣки наружу, то тѣ участки, которые сначала врѣзались въ мягкія породы, дойдя до поверхности твердыхъ пластовъ соскользаютъ по нимъ и удаляются отъ тѣхъ участковъ, которые, врѣзавшись сразу въ твердыя породы, углубляются почти вертикально.

«Въ то время, какъ» говоритъ Рихтгофенъ [1]) твердыя породы торчатъ въ видѣ горъ, мягкія снесены и округлены размытіемъ. Наблюдатель замѣчаетъ съ удивленіемъ, что рѣка вмѣсто того, чтобы продолжать повидимому легкій путь въ мягкихъ породахъ, избираетъ менѣе удобный и врѣзается въ твердыя горы.

Для поясненія присоединяемъ схематическій чертежъ (см. F. 6), составленный нѣсколько иначе, чѣмъ у Рихтгофена; подъ *A* помѣщены горизонтальныя проэкціи теченія въ разныхъ фазахъ, подъ *B* помѣщенъ вертикальный разрѣзъ пластовъ. Стрѣлка показываетъ направленіе паденія и вмѣстѣ съ тѣмъ положеніе вертикальнаго разрѣза относительно горизонтальныхъ проэкцій. Когда направленіе прежняго теченія оказывается діагональнымъ къ простиранію пластовъ нижней системы, то при углубленіи вслѣдствіе такого-же скольженія по твердымъ пластамъ, совершается разложеніе теченія на рядъ продольныхъ участковъ въ мягкихъ породахъ и поперечныхъ въ твердыхъ.

---

[1]) loc. cit. стр. 167.

Для поясненія присоединяемъ здѣсь схэму Рихтгофена[1]) (см. F. 7). Стрѣлка опять обозначаетъ направленіе паденія. Направленіе теченія безразлично.

На первый взглядъ видно, что для того, чтобы діагональное теченіе сдѣлалось ломаннымъ, нужно, чтобы нѣкоторые его участки повернулись вокругъ (см. F. 8) нѣкоторыхъ точекъ. При этомъ вращеніи, соединенномъ съ углубленіемъ, необходимо образуется долина формы нѣсколько сходной съ той, которая наблюдается у рѣкъ, углубляющихся и въ то-же время образующихъ извилины, какъ Днѣстръ, Семуа и др. (см. стр. 71) формы характеризуемой неравномѣрнымъ развитіемъ склоновъ, изъ которыхъ одинъ долженъ быть крутой а другой пологій, причемъ долина должна въ одниxъ мѣстахъ расширяться а въ другихъ съуживаться. Рихтгофенъ[2]) отмѣчаетъ несимметричность склоновъ долины въ продольныхъ участкахъ, но слѣдуетъ замѣтить, что слѣды вращенія должны точно также быть замѣтны на поперечныхъ участкахъ, проложенныхъ въ твердыхъ породахъ, особенно, когда эти послѣднія составляютъ широкую полосу. Если нѣтъ слѣдовъ вращенія на поперечномъ участкѣ, это значитъ, что здѣсь сохранилось прежнее направленіе рѣки. Тогда поперечная долина должна имѣть оба склона одинаково крутые и можетъ составлять какой угодно уголъ съ простираніемъ пластовъ.

Когда вращеніе завершено, то дальнѣйшее углубленіе можетъ происходить совершенно вертикально, но слѣды вращенія могутъ сохраниться въ высшей части долины.

Слѣды вращенія могутъ послужить какъ критеріумъ для опредѣленія происхожденія горной долины. Ломанныя теченія, образовавшіяся изъ продольныхъ и поперечныхъ рѣкъ вслѣдствіе удлиненія послѣднихъ верхнимъ концомъ и захвата продольныхъ рѣкъ (теорія регрессіи), могутъ оказывать нѣкоторые

[1]) loc. cit. стр. 169.

[2]) loc. cit. стр. 170.

[3]) Разумѣется, не говоримъ о томъ случаѣ, когда всякіе слѣды уничтожены.

слѣды перемѣщенія особенно въ продольныхъ участкахъ, но, очевидно, не должны оказывать слѣдовъ вращенія.

Рихтгофенъ [1]) указываетъ на то, что при образованіи долины по способу антецеденціи [теорія Поуэлля [2]), Тице [3]) и Медликотта [4])] дожно точно также произойти разложеніе на продольные и поперечные участки.

Дѣйствительно, все равно опускается-ли рѣка на систему горъ, скрытую подъ сверху налегающими пластами, или-же кряжи сами возвышаются на встрѣчу рѣкѣ. Противъ теоріи Тице возражалъ Лэвль [5]), доказывая, что при поднятіи кряжа, рѣка всегда должна подвергнуться запруженію, ибо уже съ самаго начала образованія складки, уклонъ на задней ея сторонѣ уменьшается, скорость теченія и размытіе слабѣютъ, а потому рѣка должна въ этомъ мѣстѣ сначала перейти въ отлагающее состояніе, а потомъ запрудиться.

Все это правда, тѣмъ не менѣе изъ десяти рѣкъ, девять могутъ подвергнуться запруженію, а десятая можетъ удержаться, ибо, какъ это много разъ повторялось другими (между прочими Тице и Рихтгофеномъ) все зависитъ отъ условій т. е. отъ скорости образованія горъ, отъ силы рѣки, отъ ея насыщенія и т. д.

Гораздо болѣе вѣское возраженіе [6]) состоитъ въ томъ, что поперечныя долины по большей части почти перпендикулярны къ простиранію пластовъ. Дѣйствительно, былобы странно, чтобы складки образовались перпендикулярно къ направленію су-

---

[1]) loc. cit. стр. 192.

[2]) Powell. Exploration of the Colorado River etc. Washington 1875 г. Къ сожалѣнію это сочиненіе осталось для меня недоступнымъ.

[3]) Tietze. Einige Bemerkungen Ueber die Bildung von Querthälern. Jahrb. Geol. Reichsanst. 1878 и 1882 г.

[4]) Medlicott. См. Hilber Die Bildung der Durchgangsthäler Peterm. Mitth. 1889 г. стр. 11.

[5]) Löwl. Über Thalbildung Prag. 1884 г. стр. 98.

[6]) Ср. Hilber. loc. cit. стр. 16.

ществующихъ рѣкъ. Отчего поперечныя долины не пересѣкаютъ горъ подъ какимъ угодно угломъ.

Но, если при поднятіи горъ существующія уже рѣки измѣняютъ свое направленіе, если теченіе ихъ становится поперекъ кряжей и выходовъ твердыхъ породъ, то, очевидно, важнѣйшее возраженіе противъ теоріи Тице (и теоріи суперформаціи или эпигенезиса) само собою падаетъ.

Интересные примѣры поперечныхъ долинъ имѣются на западномъ склонѣ Урала [1]). Рѣки: Ай, Юрезань, Симъ, Инзеръ и притоки послѣднихъ протекаютъ сначала въ видѣ потоковъ (уклоны доходятъ до 0,006) по продольнымъ долинамъ, затѣмъ поворачиваютъ на западъ, пересѣкая въ узкихъ ущельяхъ западные кряжи Урала. На этомъ участкѣ теченіе ихъ еще очень стремительно, но характеръ потока уже теряется (уклоны 0,001—0,002). Наконецъ послѣ выхода изъ горъ, онѣ текутъ уже плавно и тихо среди пермокарбоновыхъ мягкихъ породъ, (уклоны 0,0005—0,0008) отлагаютъ наносы, имѣютъ широкія въ нѣсколько верстъ долины съ рѣзко выраженными продольными террасами. Такимъ образомъ, за исключеніемъ нѣкоторыхъ участковъ на равнинномъ теченіи Юрезани и Ая, гдѣ эти рѣки, врѣзаясь въ твердый каменноугольный известнякъ, опять съуживаютъ свою долину, рѣки западнаго склона Урала подходятъ подъ избитый типъ рѣкъ, вытекающихъ изъ горъ: стремительное верхнее теченіе, тихое нижнее, на среднемъ постепенный переходъ отъ одного характера къ другому.

Изъ рѣкъ западнаго склона Урала ни одна не пересѣкаетъ хребта Уралъ-Тау, состоящаго изъ архейскихъ породъ, изъ рѣкъ восточнаго склона только небольшая рѣка Кіолимъ, притокъ Міаса имѣетъ свои истоки на западной сторонѣ Уралъ-Тау и переходитъ на восточную. Слѣдующая затѣмъ къ западу болѣе высокая цѣпь, носящая въ различныхъ мѣстахъ названія: Тагльная, Уреньги и т. д. пересѣкается только одной

[1]) Карпинскій и Чернышевъ. Труды Геол. Ком. III, 2 стр. 39 и слѣд.

рѣкою Ай въ живописномъ ущельи между горами Косотуръ и Уреньга. Эта цѣпь тоже состоитъ изъ архейскихъ породъ, но пэтрографически различныхъ отъ тѣхъ породъ [1]), изъ которыхъ состоитъ Уралъ-Тау. Дальше къ западу слѣдуютъ кряжи, состоящіе изъ девонскихъ и каменноугольныхъ породъ. Эти то кряжи пересѣкаются узкими поперечными долинами рѣкъ.

Цѣпи Урала перерѣзаны многочисленными дислокаціями, направленными нетолько вдоль хребтовъ, но и поперекъ ихъ. Даже такія крупныя рѣки, какъ н. п. Симъ [2]) иногда пропадаютъ въ трещинахъ береговыхъ утесовъ или въ воронкообразныхъ провалахъ. Пропаданіе бываетъ или совершенное, или мѣстное или неполное. Совершенное исчезновеніе выражается въ томъ, что рѣка, уйдя въ разсѣлину, больше уже не появляется. Мѣстное исчезновеніе выражается въ томъ, что рѣка уходитъ въ разсѣлину горы, а затѣмъ нѣсколько ниже опять вытекаетъ однимъ или нѣсколькими родниками въ прежнее русло. Неполное исчезновеніе заключается въ томъ, что въ разсѣлину уходитъ только часть рѣки, остальная-же продолжаетъ струиться по старому руслу. Иногда одна и та-же рѣка въ меженную воду представляетъ мѣстное, но полное исчезновеніе, въ половодье-же раздѣляется на часть исчезающую и неисчезающую.

Еслибы долины образовались изъ бывшихъ разсѣлинъ, то мы-бы имѣли въ этой мѣстности цѣлый рядъ переходныхъ формъ отъ подземнаго теченія въ разсѣлинѣ до открытаго въ узкой горной долинѣ. Но на дѣлѣ никакихъ промежуточныхъ формъ, никакихъ на половину преобразованныхъ въ долины подземныхъ каналовъ нѣтъ. Есть только крайнія формы. Такимъ образомъ здѣсь имѣемъ еще однимъ доказательствомъ больше, что поперечныя долины не происходятъ изъ разсѣлинъ.

---

[1]) loc. cit. стр. 10.
[2]) loc. cit. стр. 41.

По Большой и Малой Саткѣ въ продольныхъ долинахъ въ однихъ мѣстахъ есть небольшія озера, въ другихъ клочки озернаго аллювія. Подобные клочки существуютъ и по верхнему теченію Ая тоже въ продольной долинѣ. Однако, судя по малому пространству, занимаемому этими отложеніями, кажется, что озера нетолько въ настоящее, но и въ прежнее время составляли второстепенную черту въ гидрографіи западнаго склона Урала. Поэтому они скорѣе составляютъ результаты временнаго и частнаго, чѣмъ совершеннаго запруженія рѣкъ.

Рѣки западнаго склона Урала состоятъ изъ поперечныхъ и продольныхъ участковъ. Большинство изъ нихъ имѣютъ только одинъ продольный и одинъ поперечный участокъ, иныя н. п. Ай состоятъ изъ двухъ поперечныхъ и двухъ продольныхъ. Продольные участки собираютъ справа и слѣва притоки почти перпендикулярные къ главной рѣкѣ и къ направленію кряжей. Можно-бы сказать, что присоединеніе продольныхъ участковъ произошло путемъ регрессіи нѣкоторыхъ изъ поперечныхъ рѣкъ. Но здѣсь есть нѣкоторая черта, несогласная съ теоріей регрессіи. Очень часто случается, что въ продольной долинѣ двѣ рѣки текутъ на встрѣчу другъ другу и, разумѣется, соединяются. Послѣ соединенія начинается поперечный участокъ, пересѣкающій горный кряжъ. Особенно типично соединеніе рѣки Калагазы съ Юрезанью въ долинѣ между хребтами Бакты Нургашъ и Зигальга. Эта черта характеристична для эпигенетическихъ рѣкъ [1]) или для рѣкъ, удержавшихся во время образованія горъ.

Наоборотъ, очень часто случается, что въ одной и тойже продольной долинѣ истоки двухъ продольныхъ теченій находятся близко другъ отъ друга, но рѣки текутъ въ прямо противуположныхъ направленіяхъ. Это т. н. «развилки». Слѣдовательно въ самомъ характерѣ теченія здѣшнихъ рѣкъ есть

---

¹) Ср. Richthofen loc. cit. стр. 170.

признаки, указывающіе на то, что ломанное теченіе по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ изъ нихъ не есть результатъ соединенія продольныхъ и поперечныхъ рѣкъ вслѣдствіе регрессіи послѣднихъ и что пожалуй нѣкоторыя изъ нихъ образовались путемъ, указаннымъ теоріей Тице или теоріей эпигенезиса [1]).

Однако нельзя сказать ничего опредѣленнаго. Факты, приводимые Карпинскимъ и Чернышевымъ, недостаточны для рѣшенія этого вопроса. Слѣдовало-бы прежде установить, что есть несомнѣнные слѣды вращенія нѣкоторыхъ участковъ и что здѣсь не было никогда системы самостоятельныхъ продольныхъ рѣкъ. Нельзя даже à priori сказать, которая изъ теорій является въ данномъ случаѣ болѣе вѣроятной, теорія-ли эпигенезиса или Тице. Притомъ повторяю еще разъ, что детальное изслѣдованіе, быть можетъ, покажетъ, что, не смотря на сходную конфигурацію, различныя рѣки западнаго склона Урала образовались и развивались различными способами.

По поводу разсѣлинъ въ Уралѣ мы упомянули о предполагаемой связи разсѣлинъ и трещинъ съ направленіемъ теченія рѣкъ. Теорію, по которой рѣки пользуются готовыми разсѣлинами или-же, слѣдуя по трещинамъ, размываютъ ихъ, можно считать окончательно погребенной. Послѣдними ея защитниками были Пэшель [2]), Черульфъ [3]) и Добрэ [4]). Пэшель старался защитить ее для поперечныхъ, Черульфъ и Добрэ для всякихъ долинъ. Но разсужденіе Черульфа [5]) (тоже самое мож-

---

[1]) Мы уже выше отмѣтили, что рѣки западнаго склона Урала вытекаютъ изъ архэйскихъ кряжей и пересѣкаютъ болѣе юные. Это на первый взглядъ говоритъ въ пользу теоріи Тице, но 1) слѣдовало бы установить, что архейскіе кряжи поднялись раньше. 2) нужно доказать, что это не есть результатъ просто большей твердости архэйскихъ породъ, вслѣдствіе чего регрессія въ ихъ области незначительна.

[2]) Peschel. Neue Probleme. Leipzig 1870 г. стр. 143.

[3]) Kjerulf. Ein Stück Geographie in Norwegen. Zeitschr. Ges. für Erdkunde zu Berlin XIV 1879 г.

[4]) Daubrée. Geologie Exper. Paris 1879 г. стр. 358 и слѣд.

[5]) Ср. Löwl. loc. cit. стр. 21.

но сказать о Добрэ) сводится къ тому, чтобы, гдѣ окажется рѣчная долина, тамъ предполагать существованіе трещинъ, не спрашивая существуютъ-ли онѣ на дѣлѣ.

Факты показываютъ, что мелкія рытвины и ручьи часто слѣдуютъ по трещинамъ, что сопротивленіе, оказываемое размытію зависитъ отъ распредѣленія трещинъ. Но съ другой стороны постоянно наблюдаемъ, что даже тѣ рѣки, въ конфигураціи которыхъ ясно сказывается вліяніе рельефа и тектоники, вовсе не слѣдуютъ по трещинамъ. Ничего удивительнаго въ томъ нѣтъ. Трещины почти всегда весьма узки. Если онѣ заполнены какимъ-нибудь непроницаемымъ для воды веществомъ, то тонкая прослойка различнаго отъ окружающей породы вещества не можетъ оказать серьезнаго вліянія на размытіе; если онѣ не заполнены, или заполнены водопроницаемымъ веществомъ, то ихъ вліяніе сводится къ тому, чтобы способствовать передачѣ воды изъ рѣки въ окружающія породы и обратно.

Въ большихъ зіяющихъ трещинахъ рѣки просто пропадаютъ или совсѣмъ или отчасти. Пропаданіе особенно часто наблюдаются въ известковыхъ горахъ н. п. въ Карстѣ, гдѣ узкія скважины расширяются вслѣдствіе химическаго размытія просачивающеюся водою.

Трещины способствуютъ передачѣ воды, но главной причиной передачи воды въ породы и изъ породъ въ рѣку являются ихъ собственныя физическія свойства. Различаютъ водоупорныя породы, какъ глины, глинистые сланцы и водопроницаемыя, какъ пески, лёссъ и т. д. Отъ распредѣленія тѣхъ и другихъ породъ въ связи съ метеорологическими условіями и распредѣленіемъ притоковъ зависитъ количество воды въ рѣкѣ. Утверждаютъ н. п. что маловодность нѣкоторыхъ австралійскихъ рѣкъ происходитъ нестолько отъ сухости климата, сколько отъ особенной водопроницаемости породъ въ ихъ бассейнахъ. Такъ н. п. Дарлингъ несетъ у устья только немногимъ больше 1% всей воды, выпадающей въ его бассейнѣ. Полагаютъ, что ра-

страта атмосферной воды въ данномъ случаѣ происходитъ нетолько отъ испаренія, но тоже отъ просяканія въ глубокіе пласты. Конечно слѣдуетъ предположить, что въ такихъ мѣстахъ подземныя воды имѣютъ гдѣ нибудь (подземный) истокъ къ морю. Напротивъ того, при нѣкоторомъ распредѣленіи водоупорныхъ и водопроницаемыхъ пластовъ рѣки получаютъ обильные подземные притоки. Такъ н. п. по Фишеру (Theobald Fischer) По отъ Валенціи до Олонетты на пространствѣ 80 кил. получаетъ отъ подземныхъ притоковъ столько-же воды, сколько несетъ Тичино при выходѣ изъ Лаго-Маджіоре. Онъ здѣсь течетъ посреди продольной котловины, состоящей изъ водоупорныхъ пластовъ, выполненной водопроницаемыми породами. Русло его проложено въ водопроницаемыхъ пластахъ, но дно достигаетъ до водоупорныхъ. Такимъ образомъ рѣка собираетъ всю воду, циркулирующую по водопроницаемымъ пластамъ.

Китайскій лёссъ есть порода въ высшей степени водопроницаемая. Онъ поглощаетъ дождевую воду какъ губка. Эта вода собирается на поверхности породъ, подстилающихъ лёссъ, или на поверхности прослоекъ рѣчного и озернаго лёсса, потерявшаго губчатую структуру, и образуетъ подземныя теченія, своды которыхъ въ послѣдствіи проваливаются. Сначала образуются провалы въ видѣ отдѣльныхъ колодцевъ, затѣмъ разростаются и образуютъ сплошной каньонъ. Каньоновидная форма подобнаго ущелья объясняется способностью лёсса къ вертикальной отдѣльности и къ тому, чтобы удерживать вертикальные склоны. Эта послѣдняя способность у такой рыхлой породы, какъ лёссъ опять таки объясняется его водопроницаемостью. Атмосферная вода всякаетъ въ лёссъ, но не образуетъ поверхностныхъ размывающихъ ручьевъ.

Вообще въ тѣхъ мѣстностяхъ [1]), гдѣ на поверхности залегаютъ водопроницаемые пласты, атмосферная вода прося-

---

[1]) Ср. Lapparent loc. cit. стр. 180.

каетъ въ почву, не застаивается на поверхности въ разныхъ мѣстахъ, не стекаетъ многочисленными ручьями по склонамъ, но собирается въ крупныя и постоянныя, изрѣдка разсѣянныя рѣки, питаемыя родниками и источниками, выходящими обыкновенно на границѣ между водопроницаемыми и водоупорными пластами.

Напротивъ того, въ мѣстностяхъ, гдѣ на поверхности залегаютъ водоупорныя породы, атмосферная вода на равнинахъ застаивается въ болотахъ, по склонамъ стекаетъ многочисленными ручьями. Рѣки и рѣчки многочисленны, подвержены значительнымъ измѣненіямъ расхода, сильно разливаютъ послѣ дождей, пересыхаютъ во время засухи; ключи встрѣчаются рѣдко.

Мѣстности съ водоупорной почвой могутъ быть, какъ это показалъ Бельгранъ [1]), различены на хорошей топографической картѣ, онѣ отличаются отъ сосѣднихъ мѣстностей, обладающихъ водопроницаемой почвой, многочисленностью малыхъ рѣчекъ и ручьевъ.

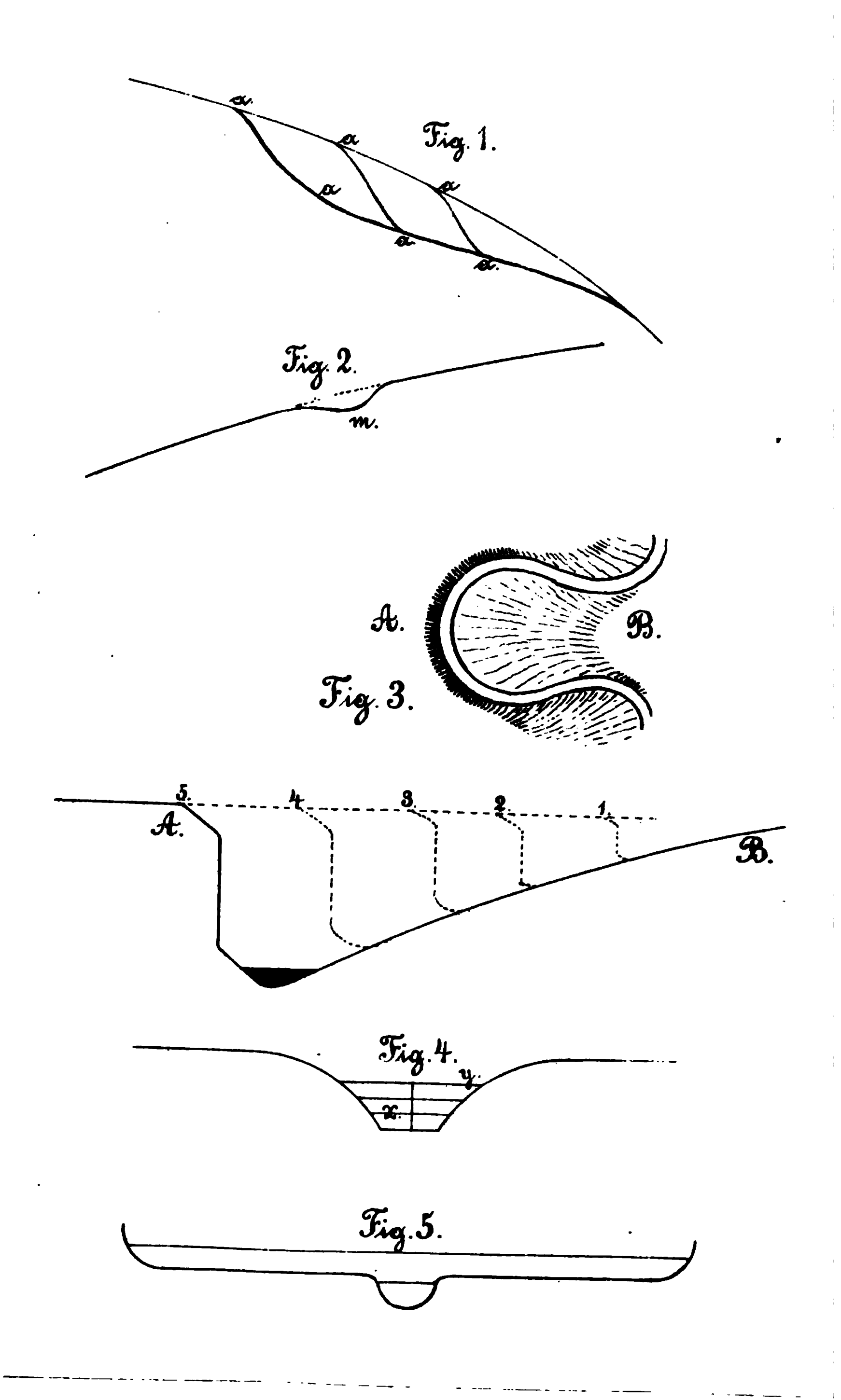
Точно также Бельгранъ [2]) показалъ, что водопроницаемость имѣетъ немалое вліяніе на конфигурацію долины. Если рѣка, протекая по узкой долинѣ, возвышаетъ дно, а склоны долины состоятъ изъ водоупорныхъ пластовъ, то дождевая вода, стекая по поверхности склоновъ увлекаетъ много матеріяла на дно долины, если-же склоны состоятъ изъ водопроницаемыхъ породъ, то дождевая вода проникаетъ въ почву, количество стекающей по поверхности склоновъ воды и увлекаемыхъ ею на дно долины матеріяловъ «ceteris paribus» меньше. Вслѣдствіе этого въ первомъ случаѣ имѣется больше шансовъ для того, чтобы отложеніе наносовъ у подножія склоновъ преобладало надъ возвышеніемъ русла, во второмъ возвышеніе русла будетъ скорѣе преобладать надъ накопленіемъ наносовъ у

---

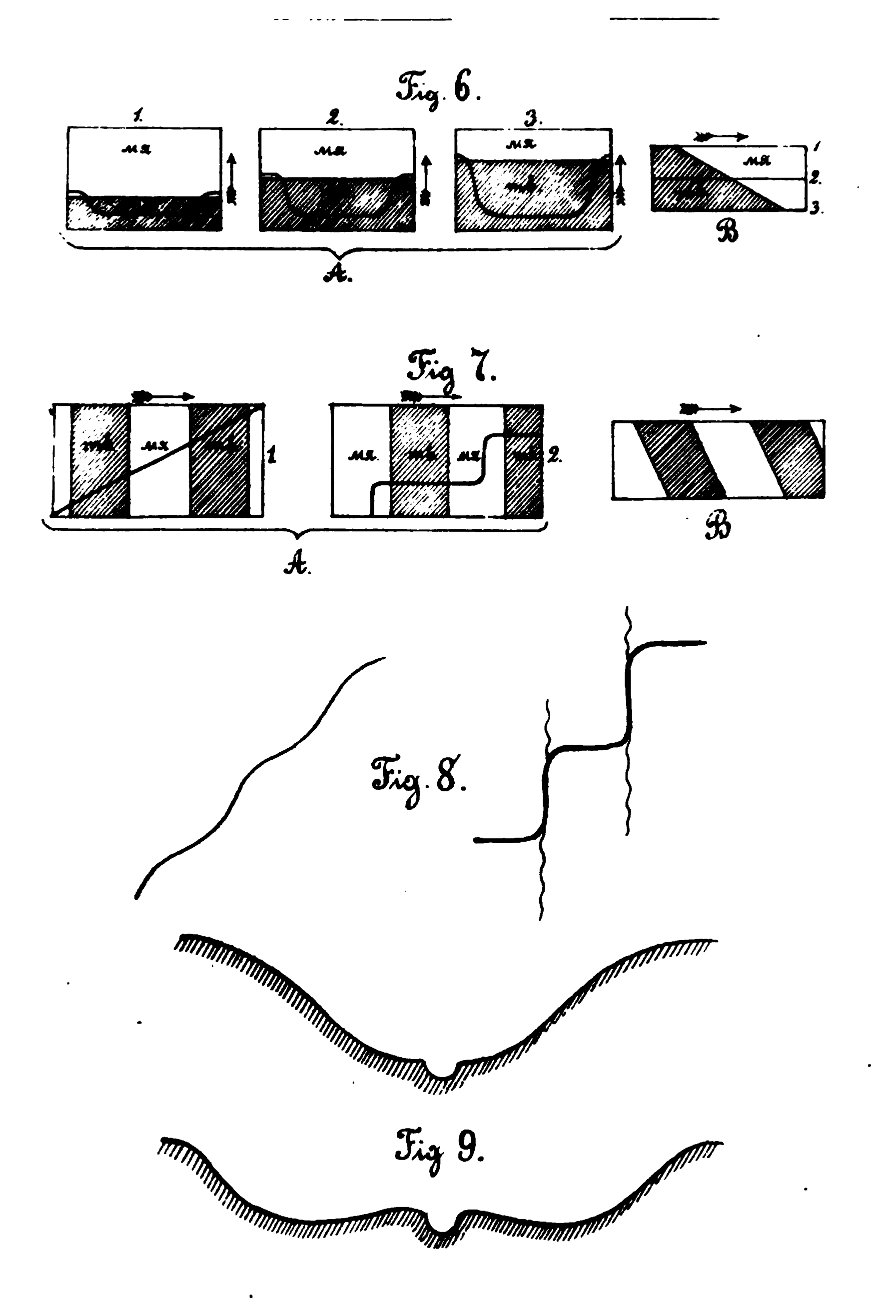
[1]) Lapparent. loc. cit. стр. 181.
[2]) Lapparent. loc. cit. стр. 210.

подножія склоновъ. И такъ, въ первомъ случаѣ имѣется больше шансовъ для образованія вогнутаго внизъ дна долины, во второмъ имѣется больше шансовъ для образованія долины съ выпуклостью на серединѣ, соотвѣтствующей области отложенія собственно рѣчныхъ наносовъ (см. F. 9).

Кромѣ того слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующія обстоятельства. Вопервыхъ, всякая мерзлая почва является въ тоже самое время водоупорной. Первыя весеннія воды стекаютъ по поверхности даже въ мѣстахъ съ сильно водопроницаемой почвой, если только климатическія условія слагаются такъ, что почва замерзаетъ зимою. Такимъ образомъ правило Бельграна въ Россіи примѣнимо въ болѣе тѣсныхъ предѣлахъ, чѣмъ во Франціи. Во вторыхъ, если водопроницаемая почва обладаетъ малой толщиной, а подъ ней залегаютъ менѣе водопроницаемые пласты, то продолжительные дожди могутъ совершенно напитать верхній слой водою и вода, происходящая отъ новыхъ осадковъ, уже не проникаетъ въ почву, а стекаетъ по поверхности и размываетъ рытвины точно такъ, какъ въ случаѣ водоупорной почвы. Наконецъ вліяніе водоупорности или водопроницаемости сказывается тѣмъ слабѣе, чѣмъ данный склонъ круче, по очень крутымъ склонамъ вода мчится по поверхности и мало проникаетъ въ почву, хотя-бы обладающую большой водопроницаемостью.



a
a
Fig. 1.
a
a
a
a
Fig. 2.
m.
A.
B.
Fig. 3.
5.
4
3
2
1.
A.
B.
Fig. 4.
y.
x.
Fig. 5.


Fig. 6.
1.
2.
3.
мя
мя
мя
1
2.
3.
A.
B
Fig 7.
мя
мя
мя
1
2.
A.
B
Fig. 8.
Fig 9.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XVI.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1899.

Записки математическаго отдѣленія:

Томъ I, II. III, IV, V.

Томъ VI. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *А. Старковъ.* Объ одномъ линейномъ диференціальномъ уравненіи 3-го порядка. *Его-же.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *Его-же.* О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. *Н. Умовъ.* Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля. *А. Старковъ.* Интегрированіе раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія (статья вторая). *В. Лигинъ.* Новое построеніе Мориса д'Оканъ для опредѣленія отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье и Гарта. *Приложеніе:* Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1884 годъ. 1885. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Томъ VII. *A. Klossovsky.* Les orages en Russie. *И. Слешинскій.* Къ вопросу о разложеніи аналитическихъ функцій въ непрерывныя дроби. *A. Klossovsky.* Les orages au Sud de la Russie. Avec 4 cartes. *С. Зейлигеръ.* Страничка анализа. *Приложенія:* 1) Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1885 годъ. 2) Къ исторіи алгебраическаго обозначенія въ связи съ развитіемъ азбучной и музыкальной письменности. 1886 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Томъ VIII. *Б. Станкевичъ.* Этюды по кинетической теоріи строенія тѣлъ. *А. Геричъ.* Объ общемъ законѣ сжатія водныхъ растворовъ солей. *И. Слешинскій.* О сходимости непрерывныхъ дробей. *И. Слешинскій.* Доказательство существованія нѣкоторыхъ предѣловъ. *В. Ермаковъ.* Задача для молодыхъ ученыхъ. 1888 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Томъ IX. *И. Занчевскій.* Теорія винтовъ. *И. Руссьянъ.* Къ вопросу о вѣроятности случайныхъ ошибокъ. *Г. Де-Метцъ.* О механическихъ свойствахъ маселъ и коллоидовъ. Цѣна 2 руб.

Томъ X. *В. Циммерманъ.* О разложеніи въ непрерывную дробь функціи, опредѣляемой диференціальнымъ уравненіемъ вида

$M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0$, гдѣ M, N, P Q — цѣлыя раціональныя функціи.

A. Starkoff. Théorie des équations générales. *И. Слешинскій.* О сходимости непрерывныхъ дробей. Цѣна 2 руб

Томъ XI. *Д. Зейлигеръ.* Механика подобно измѣняемой системы. *М. Рудскій.* Двѣ задачи изъ теоріи теплоты. *А. Гуковскій.* Объ одномъ свойствѣ однородныхъ функцій. *Д. Зейлигеръ.* Механика подобно-измѣняемой системы. Цѣна 2 руб.

Т. XII. *И. Тимченко.* Основанія теоріи аналитическихъ функцій. Цѣна 1 р. 50 к.

Томъ XIII. *М. Рудскій.* Къ теоріи линейныхъ диференціальныхъ уравненій. *Д. Зейлигеръ.* Механика подобно-измѣняемой системы. Выпускъ третій. Статика подобно-измѣняемой системы. *Г. Де-Метцъ.* О сжимаемости ртути и стекла. Цѣна 2 руб.

Томъ XIV. *И. Занчевскій.* Геометрическія мѣста въ теоріи осей вращенія. *М. П. Рудскій.* Къ теоріи вѣковаго охлажденія земли. *Д. Н. Зейлигеръ.* Изъ области геометріи и механики. *А. Старковъ.* Къ теоріи линейныхъ диференціальныхъ уравненій. *И. В. Слешинскій.* Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ. Цѣна 2 руб.

Томъ XV. *М. П. Рудскій.* Къ теоріи вѣковаго охлажденія земли. *Его-же.* О предѣлахъ атмосферы. *Н. Умовъ.* Антитермы изопіестическихъ и изометрическихъ процессовъ совершенныхъ газовъ. *Н. Любимовъ.* Къ физикѣ системы, имѣющей перемѣнное движеніе. *М. П. Рудскій.* Опыты изслѣдованія главнѣйшихъ явленій, наблюдаемыхъ у рѣкъ.

Томъ XVII. *М. Панченко.* Солнечное лучеиспусканіе. Цѣна 1 р. 50 к.

Томъ XVIII *М. Панченко.* Солнечное лучеиспусканіе. Цѣна 1 р. 50 к.

Въ «Запискахъ математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей» помѣщаются статьи по высшей и низшей математикѣ, физикѣ и прикладнымъ наукамъ. Статьи присылаются въ совѣтъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей и могутъ представлять: а) самостоятельныя изслѣдованія, б) рефераты, в) элементарную разработку научныхъ вопросовъ и теорій съ цѣлью ихъ большаго распространенія.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XVI.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1899.

Печатано по определенію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій*.

MÉMOIRES

de la section mathématique

de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie

(Odessa).

T. XVI.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

Основанія теоріи аналитическихъ функцій.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ИСТОРИЧЕСКІЯ СВѢДѢНІЯ

о развитіи понятій и методовъ лежащихъ въ основаніи теоріи аналитическихъ функцій.

(Продолженіе; см. XII т. Зап. Мат. От.).

Ивана Тимченко.

Fondements de la théorie des fonctions analytiques.

Par J. Timtchenco.

Восьмой періодъ.

Въ эпоху Лейбница и Ньютона были накоплены огромные матеріалы—глубокія идеи, остроумные и плодотворные методы, удивительные факты. Уже въ самомъ началѣ послѣдующаго періода, геометры, опираясь на работы своихъ предшественниковъ, прибавили къ ихъ трудамъ много своихъ собственныхъ открытій. Собрать всѣ эти многочисленные матеріалы въ одно связное цѣлое, дополнить и развить его части и распредѣлить ихъ въ стройномъ порядкѣ, изъ котораго потомъ легко и естественно должно было возникнуть великое зданіе математическаго анализа—такова была одна изъ главныхъ задачъ. которую предстояло рѣшить математикамъ XVIII-го вѣка [1]). Исполнить это

[1]) Наиболѣе распространенными и уважаемыми изъ сочиненій посвященныхъ систематическому изложенію анализа и написанныхъ въ духѣ до Эйлеровской эпохи были въ первой половинѣ прошлаго столѣтія: 1)

въ совершенствѣ, сообразно съ идеями и знаніями времени, удалось только одному изъ величайшихъ геометровъ прошлаго вѣка—*Леонарду Эйлеру* [1]).

Analyse démontrée etc. par le *R. P. Reyneau*, Prêtre de l'Oratoire. 1-e éd. Paris 1707. 2-e éd. augmentée des Remarques de *M. de Varignon*. Ibid. 1736. 2 vls in 4°. Объ этомъ сочиненіи см. отзывъ Даламберта въ *Encyclopédie méthodique* art. *Analyse*. 2) *Institusioni analitiche* etc. di *D-na Maria Gaetana Agnesi* Milanese 2 v. 4° Milano 1748. О М. Г. Аньези (1718—1799) и ея сочиненіи см. *Montucla* Hist. d. M. t. III, p. 135. О другихъ сочиненіяхъ по анализу конечн. и б. малыхъ см тамъ-же Part. V, Livre I, XIV, *Encycl. Méth.* art. *Algèbre*. Въ 1749 году *Pezenas* перевелъ на французскій языкъ «трактатъ о флюксіяхъ» Маклорена (см. 7-ой періодъ стр. 244 прим. 1), въ 1753 г. *Le-Cozic*—«алгебру» того же автора (посмертное сочиненіе 1748). О руководствахъ принятыхъ въ англійскихъ университетахъ см. *W. W. Rouse Ball*. A hist. of the st. of m. at Cambridge pp. 99 sqq.

[1]) О жизни и дѣятельности *Леонарда Эйлера* (род. въ Базелѣ 4/15 Апр. 1707 г., ум. въ С.-Петербургѣ 27 Авг. (7 Сент.) 1783 г.) см. *N. Fuss*. Lobrede auf Herrn Leonhard Euler in der Versamml. d. Kays. Ak. d. W. zu St.-Pet. den 23 Oct. 1783 vorgelesen. Basel 1786.—'Eloge de M. Euler prononcé à la rentrée de l'Ac. r. d. s. le 6 Févr. 1785 par *M. le Marq. de Condorcet*. (см. Inst. c. diff. a. L. Eulero Tic. 1787 pp. IX—LIII t. I).—*M. Marie*. Hist. t. VIII, pp. 94—114. Къ біографіи Фусса приложенъ полный списокъ сочиненій Эйлера (pp. 123—181); см. также Inst. c. d. Tic. 1787, pp. 815—844, t. II; Correspondance mathém. et physique de quelques célèbres géom. du XVIII-éme siècle précédée d'une notice sur les travaux de *Léonard Euler* tant imprimés qu'inédits et publ. s. l. ausp. de l'Ac. I. d. S. de S.-Pét. par *P. H. Fuss*. S.-Pét. 1843 t. I, pp. XXXIX—CXXI: это изданіе заключаетъ въ себѣ переписку Э. съ *Гольдбахомъ* 1729—1764. (t. I), и письма къ Эйлеру—*Ивана Бернулли* 1728—1746, *Даніила Бернулли* 1726—1755 и *Николая Бернулли* (плем. И. и Я.) 1742, 1743. Въ XIV томѣ полн. собр. сочиненій Лагранжа (Paris 1892) помѣщена переписка его съ Эйлеромъ 1754?—1775; см. также *Leonardi Euleri* opera posthuma math. et physica nuper detecta; edd. *P. H.* et *N. Fuss*. tt. I, II Petr. 1862 (этого сочиненія мнѣ, къ сожалѣнію, не удалось видѣть). 6 писемъ Эйлера къ Даламберту (1747—1749) опубл. *Ch. Henry* въ XIX томѣ (Mars 1886) *Bull. Bonc.* Переписка Эйлера можетъ служить лучшимъ матеріаломъ для сужденія о немъ какъ о математикѣ; для сужденія объ немъ какъ философѣ см. его *Lettres à une princesse d'Allemagne* (принц. Ангальтъ-Десс. племян. прусск. короля) sur div. sujets de physique et de philosophie, 1-oe издан. S.-Pét. 1768 3 voll., изд. Condorcet. 1787—89, Labey 1812, 2 voll. A. Cournot 1842 2 voll. E. Saisset 1859. 2 voll. (съ интереснымъ введеніемъ):... au total, говоритъ *Saisett*, «Euler a été peut-être un esprit plus ferme qu'étendu, plus ingénieux que profond, et il semble que la nature, qui le doua si richement comme géomètre, lui avait refusé le génie du métaphysicien».

До Эйлера математическій анализъ былъ лишь системой методовъ служившихъ для рѣшенія различныхъ конкретныхъ вопросовъ, системой слабой, безъ прочной внутренней связи— самостоятельнаго абстрактнаго объекта [1]). Эйлеръ нашелъ такой объектъ въ понятіи о функціи—великой идеѣ Лейбница и Бернулли—и тѣмъ положилъ основаніе математическаго анализа какъ отдѣльной науки [2]). Уже въ первыхъ своихъ работахъ— объ уравненіяхъ съ частными дифференціалами—Эйлеръ столкнулся съ понятіемъ о функціи во всей его общности [3]); послѣдующія изысканія, безчисленныя работы по анализу въ его соприкосновеніи со всѣми отдѣлами математическихъ наукъ, и споры съ другими геометрами дали ему поводъ углубиться въ это понятіе, обнять его во всей возможной въ то время полнотѣ и разобрать съ различныхъ точекъ зрѣнія. Наконецъ свои большіе дидактическіе труды онъ посвятилъ изслѣдованію функ-

---

[1]) Ср. напр. *Reyneau*. An. dém. Avertissement, pp. XV sqq. съ системой изложенія Эйлерова «Введенія», разборъ котораго слѣдуетъ ниже.

[2]) Ср. *H. Hankel*. Die Entwickelung d. Math. in den letzten Jahrh. Ein Vortrag b. Eintritt in d. Ak. Senat d. Univ. Tübingen. Tüb. 1869, p. 15.

[3]) De infinitis Curvis ejusdem generis. Commentarii *Ac. Sc. Imper. Petr.* T. VII. Ad annos MDCCXXXIV & MDCCXXXV, Petr. MDCCXL, pp. 174—183. *Additamentum*—pp. 184—200. Sur les vibrations des cordes. *Mém. de l'Ac. R. d. Sc. de Berlin* T. IV Ann. 1748 pp. 69—85. Investigatio functionum ex data differentialium conditione. *Novi comm. A. S. I. P.* T. IX pro Ann. 1762 & 1763. Petr. 1764 pp. 170-212. De motu vibratorio cordarum inequaliter crassarum., *ibid* pp. 246 — 304. Lettres à Lagrange (O. c. de Lagr. T. XIV): Berol 2 oct. 1759 (lat. pp. 162—164), Berl. 23 oct. 1759 (pp. 164—170), Berl. 1 juin. 1760 (pp. 178—188, напеч. во второмъ томѣ *Mélanges de phil. et de math. de la Soc. R. de Turin* p. l. a. 1760—1761 [*Miscell. Taur.*] pp. 1—10 de la 2-e partie), Ber. 21 juin 1760 (pp. 193—198). —Въ § 32 прибавленія (Add.) къ своей первой работѣ Эйлеръ говоритъ о полученной имъ общей формулѣ: «...... exemplis particularibus propositis accomodatio saepissime erit difficilima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur et excoleretur».

цій послѣдовательно представляющихся въ систематическомъ развитіи высшаго анализа [1]).

Эйлеръ изложилъ высшій анализъ въ трехъ классическихъ сочиненіяхъ, до сихъ поръ не имѣющихъ себѣ равныхъ, въ своемъ родѣ, по глубинѣ своихъ ученій, простотѣ и ясности изложенія. Это суть: *Введеніе въ анализъ безконечно малыхъ*, изданное въ двухъ томахъ въ 1748 году, *Основанія дифференціальнаго исчисленія*, изданныя въ одномъ томѣ въ 1755 году и *Основанія интегральнаго исчисленія* въ трехъ томахъ, вышедшихъ въ 1768—70 годахъ [2]). Краткій разборъ этихъ сочиненій послужитъ намъ лучшимъ введеніемъ въ исторію ученія о функціяхъ въ разсматриваемый періодъ; при этомъ намъ придется останавливаться нѣсколько дольше на разборѣ наиболѣе важныхъ для насъ теорій и сопровождать его замѣчаніями о другихъ работахъ по этимъ теоріямъ самого Эйлера и современныхъ ему геометровъ.

«*Введеніе въ анализъ*», представляющее изъ себя элементарную теорію аналитическихъ функцій, раздѣлено на двѣ книги: первая — содержитъ въ себѣ теорію аналитическихъ функцій in abstracto, ихъ происхожденіе и классификацію, ихъ взаимную связь и преобразованія, вторая — теорію тѣхъ же функцій in

---

[1]) Превосходное изложеніе всѣхъ главнѣйшихъ изысканій произведенныхъ въ области математическаго анализа Эйлеромъ и его современниками читатель найдетъ въ соотвѣтствующихъ статьяхъ Клюгелева математическаго словаря: Mathem. Wörterbuch u. s. w. von *Georg Simon Klügel*. Erste Abhtlng. Die reine Mathematik: I Theil Lpz. 1803, II Th. ib. 1805, III Th. ib. 1808; fortgesetzt von *Carl Brandan Mollweide*: IV Th. Lpz. 1823; beendigt von *Ioh. Aug. Grunert*: V Th. Lpz. 1831, Supplement ib. 1836. см. также *Lacroix*. Traité du calc. diff. et du c. int. tt. 1—3. 2-e éd. Paris 1810—1819 (ср. ibid. t. III Table d. mat. pp. 746—748).

[2]) Introductio in analysin infinitorum 2 voll. 4. Laus. 1748. Я пользовался французскимъ переводомъ съ примѣчаніями *J. B. Labey*: Introduction à l'an. infinitésimale par Léonard Euler &c. Paris 1835 2 voll. 4°.— Institutiones calculi differentialis. Petrop. 1755. 4°. Я пользовался изданіемъ 1787 года (ср. прим. на стр. 258).—Institutiones calculi integralis. 3 voll. 4°. Petr. 1768—70. У меня подъ рукою были 3 первые тома Петербургскаго же изданія 1824 — 27 г., и IV томъ Petr. 1794, содержащій интересныя добавленія къ Эйлерову инт. исчисленію.

concreto, по скольку онѣ могутъ представлять кривыя линіи и поверхности со всѣми ихъ геометрическими особенностями [1]).

Эйлеръ начинаетъ первую книгу съ опредѣленія понятій о постоянныхъ и перемѣнныхъ величинахъ, ихъ функціяхъ и общихъ соображеній о различныхъ видахъ алгебрическихъ функцій. «Перемѣнное количество», говоритъ онъ между прочимъ, «есть количество неопредѣленное, или, если угодно, всеобщее количество (quantitas universalis), заключающее въ себѣ всѣ опредѣленныя величины..... Его можно сдѣлать опредѣленнымъ безчисленнымъ множествомъ способовъ; понятіе о перемѣнномъ количествѣ можетъ считаться исчерпаннымъ только тогда, когда мы вообразимъ себѣ на его мѣстѣ всѣ опредѣленныя числа какъ положительныя, такъ и отрицательныя, цѣлыя и дробныя, раціональныя, ирраціональныя и трансцендентныя; не должно исключать отсюда даже нуля и мнимыхъ чиселъ» [2]).

«Функція перемѣннаго количества есть аналитическое выраженіе составленное какимъ бы то ни было образомъ изъ самаго этого количества и постоянныхъ чиселъ или количествъ...». Функція есть также перемѣнное количество:—невозможно представить себѣ никакой опредѣленной величины, которую функція не могла бы принять при извѣстномъ значеніи перемѣнной, такъ какъ, сообразно съ выше сказаннымъ, эта перемѣнная заключаетъ въ себѣ и мнимыя значенія» [3]). Не рѣдко встрѣчаются только кажущіяся функціи, сохраняющія одну и ту-же

[1]) «Книга 1-я содержащая объясненіе различныхъ родовъ функцій и т. д., и нѣкоторыхъ другихъ вопросовъ служащихъ къ облегченію изученія анализа безконечно малыхъ». *Introd.* T. I. «Книга 2-я содержащая теорію кривыхъ линій вмѣстѣ съ краткимъ трактатомъ о поверхностяхъ». T. II — Cp. *Klügel.* Wört. Art. «Analysis» «....Entwurf der Analysis endlicher Grössen, mit Ausschluss der Buchstabenrechnung und der Algebra»... «pp. 79—84 Erst. Th.

[2]) *Introd.* Cap. I, t. I, art. 1—3, *Lab.* pp. 1, 2.

[3]) *Ibid.* art. 4, 5, *Lab.* pp. 2. 3; послѣднее утвержденіе справедливо вообще лишь для однозначной моногенной функціи, если включить въ число возможн. значеній перемѣнной и ∞;—строгое доказательство этого предложенія данное въ первый разъ Коши, не могло быть конечно из-

величину, какое бы значеніе мы не придавали перемѣнной; таковы выраженія z^0; 1^z, $\frac{aa-az}{a-z}$, которыя подъ видомъ функцій перемѣннаго z суть на самомъ дѣлѣ количества постоянныя [1]).

Отдѣливъ потомъ функціи трансцендентныя отъ алгебрическихъ, Эйлеръ раздѣляетъ эти послѣднія также какъ это обыкновенно дѣлаютъ и теперь въ классическихъ руководствахъ. Ирраціональныя функціи дѣлитъ онъ на явныя, выраженныя радикалами, и неявныя, зависящія отъ рѣшенія уравненій: «такъ», говоритъ онъ, «Z будетъ ирраціональной неявной функціей отъ z, если она представится такимъ уравненіемъ $Z^7=azZ^2-bz^5$. Дѣйствительно отсюда нельзя извлечь явнаго значенія Z, даже и прибѣгая къ знакамъ радикаловъ, по той причинѣ, что алгебра не пришла еще къ такой степени совершенства» [2]).

вѣстно Эйлеру:—онъ, вѣроятно, разумѣетъ здѣсь «мнимыя значенія» какъ неопредѣленныя символы невозможности рѣшенія даннаго вопроса, подобно Декарту въ «Геометріи» (ср. стр. 127 и прим. 4 тамъ же); ср. *Montucla* Hist. t. III, p. 28.

1) *Intr.* art. 5. *Lab.* p. 3. Эйлеръ считаетъ, такимъ образомъ, *перемѣнность* непремѣннымъ признакомъ функціи; постоянная есть какъ-бы вырожденіе аналитической функціи, ея предѣльный или особенный случай. Эйлерово опредѣленіе (опредѣленіе всѣхъ старыхъ аналистовъ) аналитической функціи конечно не вполнѣ точно и обще (оно не обнимаетъ, напримѣръ, неявныхъ функцій). Невозможно дать въ короткихъ словахъ такого полнаго опредѣленія не предпославъ обстоятельныхъ предварительныхъ объясненій; мы замѣтимъ только, что въ основаніи этого опредѣленія лежитъ понятіе объ аналитическихъ дѣйствіяхъ совершаемыхъ надъ перемѣнными количествами, и что прир.да этихъ дѣйствій должна быть *совершенно независима* отъ частныхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Ср *Méray*. Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale. 1-re partie. Paris 1894, art. 27. p. 18.

2) Первая статья Эйлера объ алгебрическомъ рѣшеніи уравненій находится въ VI томѣ *Comm. Ac. Sc. Imp. Petr.* ad Ann. 1732 et 1733, Petr. 1738, pp. 216—231: De formis Radicum Aequationum cuiusque ordinis coniectatio. Въ IX томѣ *Nov. Comment. Ac. I. Sc. Petr.* pro ann. 1762 et 1763 (Petr. 1764) pp. 70—98 Эйлеръ помѣстилъ статью подъ заглавіемъ: De Resolutione aequationum cuiusuis gradus, гдѣ пытался дать общій методъ для рѣшенія уравненій высшихъ степеней помощью радикаловъ; см. также Summarium этого тома pp. 13—16. О другихъ изслѣдованіяхъ относ. къ тому же предмету см. *Montucla*, Hist. T. III. Part. V, L. I, V, pp. 41—57.

«Слѣдуетъ затѣмъ обратить главнымъ образомъ вниманіе на раздѣленіе финкцій на однозначныя и многозначныя......»[1]. Если Z опредѣляется алгебрическимъ уравненіемъ n-ой степени, въ которомъ коэффиціенты однозначныя функціи перемѣнной z, Z есть многозначная функція отъ z, принимающая для каждаго значенія этого перемѣннаго столько значеній сколько единицъ въ показателѣ n[2]).

«Если Z есть многозначная функція отъ z, которая не можетъ никогда получить болѣе одного вещественнаго значенія, она приближается по этому свойству къ однозначнымъ функціямъ и по этой причинѣ можетъ быть причислена къ этимъ послѣднимъ»[3]).

Если y есть функція отъ z, то, наоборотъ и z есть функція отъ y. Если y и x суть функціи отъ z, y есть функція отъ x и x—функція отъ y. Какъ однозначная такъ и многозначная функціи могутъ быть еще четными и нечетными[4]).

Форму функціи можно измѣнять двоякимъ путемъ: сохраняя прежнюю перемѣнную или вводя вмѣсто нея новую; въ первомъ случаѣ, строго говоря, не происходитъ измѣненія. «Но всякое преобразованіе предполагаетъ другой способъ выраженія той же функціи; такимъ образомъ Алгебра учитъ насъ, что одно и тоже количество можетъ принимать различныя формы.»[5]).

---

[1]) *Introd.* art. 10, *Lab.* p. 6.

[2]) *Ibid.* art. 14, *Lab.* pp. 7—8.

[3]) *Ibid.* art. 15, *Lab.* p. 8.—Это замѣчаніе имѣетъ значеніе въ теоріи кривыхъ.

[4]) *Introd.* art. 16, 17, 18—25, *Lab.* pp. 8—13; art. 26, pp. 13—14 даетъ понятіе *о подобныхъ* функціяхъ; прим. $Z=a+bz+cz^2$ и $Y=a+by+cy^2$.

[5]) *Ibid.* cap. II. art. 27, *Lab.* pp. 14, 15; это замѣчаніе въ сущности заключаетъ въ себѣ дальнѣйшее изложеніе понятія объ аналитич. функціи: форма функціи не представляетъ собою существеннаго признака этого понятія; такимъ признакомъ является лишь совокупность значеній функціи соотвѣтствующихъ значеніямъ перемѣнной по извѣстному закону устанавливаемому данной или другой эквивалентной ей въ этомъ отношеніи формой. Возможность быть выраженной алгебрической формой (въ общ. см. сл.) характеризуетъ только функцію какъ *аналитическую*, отводитъ ей мѣсто въ особомъ классѣ функцій; ср. ниже изложеніе началъ 2-й книги Введенія.

Объ этихъ преобразованіяхъ перваго рода трактуетъ вторая глава Введенія.

Одно изъ самыхъ важныхъ преобразованій этого рода для алгебрическихъ функцій есть Гарріотово [1]) и Декартово разложеніе цѣлаго полинома на линейныхъ множителей, изъ которыхъ каждый есть разность между перемѣннымъ и тѣмъ его значеніемъ, при которомъ полиномъ обращается въ 0. Эти значенія могутъ быть и мнимыми, но мнимые множители въ полиномахъ съ вещественными коэффиціентами бываютъ всегда попарно сопряженными и приводятъ къ квадратнымъ трехчленнымъ и вещественнымъ производителямъ [2]). Теоремы о существованіи корней вида $a+b\sqrt{-1}$ во всякомъ алгебрическомъ уравненіи Эйлеръ во Введеніи не доказываетъ. Отъ разложенія цѣлыхъ полиномовъ на множители онъ переходитъ къ разложенію раціональныхъ дробей на частныя и этимъ заканчиваетъ вторую главу.

---

[1]) См. стр. 109 прим. 2, стр. 114 прим. 3, стр. 126, 127. Я воспользуюсь случаемъ, чтобы разъяснить недоразумѣніе прим. 1 на стр. 115. На стр. 16 своего труда Гарріотъ говоритъ: «.... Nam si ponatur $a=b$ erit $a-b=0$. – Posito igitar $a=b$ erit $\dfrac{a-b}{a+c}\Big| = 0$ Est autem ex genesi $\dfrac{a-b}{a+c} =aa-ba+ca-bc$ quae est aequatio originalis hic designata .... Ergo .... $aa-ba+ca-bc=0$. Ergo ... $aa-ba+ca=+bc$ quae est aequatio proposita. Aequatio igitur canonica proposita ab originali designata, posito b ipsi a aequali deducitur». *Artis Analyticae Praxis &c.* Londini 1631. – Sectio Secunda — Canonicarum quadr. ordinis deriuatio.— Propos. prima. Cp. *ibid.* Canon. cub. ord. der. Prop. 3. pp. 17—19.—Can. biq. ord. der. pp. 20 sqq.—Collectio aequationum aliquarum canonicarum cum tali dispositione, pp. 49—51. Все это лишь комментаріи къ гл. XIV Вьетова трактата De Emend. Aequat. Терминъ «canonica aeq.» принадл. Гарріоту. «Каноническая» форма у него таже что и у Вьеты и форма съ 0 во втор. части лишь переходная.— Первый примѣръ этой формы М. Канторъ нашелъ у Штифеля, Arithm. integra, Nürnb. 1544 fol. 283 *recto*.: 216+√ʒ 41472 – 18ʒ — √ʒ 648ʒ aequantar 0 (т. е. $216+\sqrt{41472}-18x-\sqrt{648}\,x^2=0$); см. *M. Cantor* Vorl. üb. Gesch. d. Math. T. II, Lpzg. 1892, p. 405.

[2]) *Introd.* art. 28—37. L. I. cap. II, *Lab.* pp. 15—21.

Въ третьей главѣ [1]) говорится о преобразованіяхъ втораго рода—посредствомъ подстановки и именно: о превращеніи ирраціональныхъ функцій въ раціональныя и объ извлеченіи явныхъ значеній нѣкоторыхъ алгебрическихъ функцій.

Къ преобразованіямъ перваго рода можно отнести и разложеніе функцій въ безконечные ряды, которые служатъ предметомъ четвертой главы [2]).

«Формула $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$», говоритъ Эйлеръ, «не можетъ представлять ни дробныхъ ни ирраціональныхъ функцій отъ z; тѣмъ не менѣе, обыкновенно ищутъ для ихъ выраженія строки того же вида, которыя предполагаютъ составленными изъ безконечнаго числа членовъ. Къ тому же по подобнымъ рядамъ, хотя и безконечнымъ, можно повидимому лучше узнавать природу и трансцендентныхъ функцій. Въ самомъ дѣлѣ, если природа цѣлой функціи хорошо опредѣлена, когда эта функція разложена по различнымъ степенямъ z и слѣдовательно приведена къ упомянутому выше виду, то таже формула кажется также самой удобной для выраженія характера всѣхъ другихъ функцій, хотя число членовъ въ ней и безконечно. Если бы кто сомнѣвался въ томъ, что такое выраженіе возможно для всѣхъ функцій—дѣйствительное разложеніе отдѣльныхъ функцій не оставитъ мѣста сомнѣнію; но для большей общности, на ряду со степенями z съ цѣлыми и положительными показателями, слѣдуетъ допустить какія угодно степени. Такимъ образомъ не останется никакого сомнѣнія въ томъ, что всякая функція отъ z можетъ быть преобразована въ рядъ та-

---

[1]) *Introd.* art. 46—58, *Lab.* pp. 35—45. - Перемѣнную величину функціи—совокупность ея значеній иногда удобнѣе разсматривать какъ образованную по другому закону, отличному отъ того который связываетъ ее съ данной перемѣнной, и слѣдовательно какъ функцію новой перемѣнной зависящей соотвѣтствующимъ образомъ отъ данной; такъ это бываетъ въ нѣкоторыхъ вопросахъ аналитической геометріи и интегральнаго исчисленія, къ которымъ и приложимы главнымъ образомъ результаты 3-ей главы.

[2]) *Introd.* art. 59—76, *Lab.* pp. 45 - 58.

кого вида: $Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}$&c, гдѣ показатели $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c суть какія нибудь числа[1]).

Разложеніе въ безконечный рядъ является такимъ образомъ, по мнѣнію Эйлера, лучшимъ средствомъ постигнуть природу трансцендентной функціи какого бы то ни было происхожденія. Такое разложеніе сближаетъ ее съ алгебрическими функціями напримѣръ съ цѣлыми полиномами—дѣлаетъ ее *олотропною* по выраженію нѣкоторыхъ новѣйшихъ аналистовъ[2]); будучи опредѣлена безконечнымъ алгебрическимъ рядомъ, трансцендентная функція пріобрѣтаетъ смыслъ для всѣхъ возможныхъ значеній перемѣннаго, какъ вещественныхъ такъ и мнимыхъ и вполнѣ подходитъ подъ общее опредѣленіе данное Эйлеромъ въ началѣ Введенія; функціи разлагающіяся въ такіе ряды могутъ быть разсматриваемы какъ настоящія аналитическія функціи, которыя могутъ быть сравниваемы между собою, и для изученія которыхъ можно воспользоваться всѣми срествами доставляемыми обыкновенной алгеброй.

Разложеніе дроби $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ даетъ первый и простѣйшій примѣръ безконечнаго ряда, геометрическую прогрессію[3]); бо-

---

[1]) *Ibid.* art. 59, *Lab.* pp. 45, 46. Ср. стр. 215 и слѣд.

[2]) *Ch. Méray* Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872, art. 45, pp. 42—43; см. также Leçons nouv. &c. art. 139, p. 110.—*Riquier.* Sur les principes de la théorie générale des fonctions, Paris 1891 art. 12, pp. 15—16. Въ нѣсколько иномъ смыслѣ употребляютъ терминъ *holomorphe*—*Briot* и *Bouquet*: см. Théorie des fonctions elliptiques par MM. Br. & B. 2-e édition. Paris 1875, art. 15, p. 14.

[3]) *Introd.* art. 60, *Lab.* pp. 46—47.—На безкон. геом. прогрессіи обратилъ впервые вниманіе *Вьета*: см. интересныя и своеобразныя замѣчанія его въ *Opera Math.* ed. Fr. à Schooten. Lugd. Bat. 1646, pp. 397—398; Variorum de reb. mathem. responsorum Lib. VIII Cap. XVII: *Progressio Geometrica.*—Полную теорію безконечныхъ геометрическихъ прогрессій далъ *Gregorius à S. Vincentio*: см. Opus Geometricum quadr. circuli et sect. coni. Antverp. 1647. Lib. II. Def. I—III pp. 54—56, Progr. geom. pars secunda *terminum cuiusqunq. progressiones in infinitum continuatae designat*: prop. LXXV sqq. pp. 95 sqq. NB. Def. III, p. 55 и *Scholion* pp. 101—103. Къ сожалѣнію я не имѣлъ подъ рукою замѣчательной книги Гр. de С. Винцента при составленіи предъидущихъ главъ моего сочиненія.

гдѣ сложныя раціональныя дроби приводятъ къ возвратнымъ рядамъ Де Муавра[1]).

Если 0 служитъ m-кратнымъ корнемъ знаменателя, то дробь разлагается въ рядъ, содержащій въ себѣ отрицательныя степени z съ показателями $-1, -2$ и т. д. до $-m$ включительно[2]). Преобразовывая дробь въ другія посредствомъ раціональныхъ подстановокъ, можно получить безчисленное множество различныхъ разложеній ея въ возвратные ряды[3]).

«Ирраціональныя функціи обыкновенно преобразовываются въ безконечные ряды при помощи общей теоремы; $(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n.2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \&c.$» [4]). Чтобы сдѣлать приложеніе этого ряда болѣе удобнымъ, его преобразовываютъ въ такой: $\left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-j+1)}{1.\,2.\,3.\ldots.j} Z^j \right\} P^{\mu}$, гдѣ $\mu = \frac{m}{n}$, а $Z = \frac{Q}{P}$. Оставляя доказательство этой формулы дифференціальному исчисленію, Эйлеръ поясняетъ ее въ приложеніи къ простѣйшимъ примѣрамъ[5]).

Элементарная теорія алгебрическихъ функцій заканчивается пятой главой Введенія, гдѣ говорится «о функціяхъ двухъ или нѣсколькихъ перемѣнныхъ», о распространеніи на нихъ установленныхъ раньше понятій и о нѣкоторыхъ свойствахъ, относящихся къ однородности ихъ самыхъ, или ихъ частей[6]).

---

[1]) *Introd.* art. 61—68, *Lab.* pp. 47—53; ср. стр. 219, 220.

[2]) *Introd.* art. 69, *Lab.* pp. 53—54.

[3]) *Ibid.* art. 70, *Lab.* p. 54.

[4]) Объ исторіи Ньютонова ряда въ разсматриваемую эпоху см. *Montucla*, Hist. d. m. t. III pp. 272—274, *Klügel.* Wörterb. 1 Th. pp. 338—342: Geschichte des binomischen Lehrsatzes.

[5]) *Introd.* art. 71—76, *Lab.* pp. 54—58.

[6]) *Ibid.* art. 77—95, *Lab.* pp. 59—68: NB. art. 92 (классиф. *многоразд. льныхъ* функцій—по числу однор. частей), art. 93 (превращ. неодн. ф. въ

Изученіе трансцендентныхъ функцій—одинъ изъ главныхъ предметовъ интегральнаго исчисленія, которое доставляетъ средства для точнаго выраженія безчисленнаго множества трансцендентныхъ величинъ[1]). Безконечные ряды выражающіе всѣ возможныя аналитическія функціи, даже и такія, которыя не могутъ быть выражены символами исчисленія малыхъ[2]), могли бы съ первыхъ шаговъ анализа служить исходнымъ пунктомъ общей теоріи аналитическихъ трансцендентныхъ. Самостоятельное развитіе такой теоріи представило бы однако большія трудности и въ извѣстной своей стадіи было бы даже совершенно немыслимо безъ предварительнаго *всесторонняго* изученія нѣкоторыхъ особенныхъ, простѣйшихъ, элементарныхъ, или типичныхъ функцій.—Къ числу такихъ функцій принадлежатъ логариѳмы и тригонометрическія функціи и ихъ обратныя. Понятіе о логариѳмической функціи сложилось первоначально изъ представленій заимствованныхъ изъ области безконечно малыхъ[3]). Лейбницъ связалъ теорію этой функціи съ анализомъ конечныхъ величинъ, обобщивъ понятіе о степени и введя обратную функцію логариѳма—показательную[4]). Слѣдуя Лейбницу Эйлеръ начинаетъ изученіе элементарныхъ трансцендентныхъ съ разсмотрѣнія показательныхъ функцій.

Правильная теорія логариѳмовъ зависитъ вполнѣ отъ точнаго и яснаго опредѣленія показательной функціи, опредѣленія

однор. посредств. подстан.), art. 95 (раздѣл. цѣл. функцій на *составн.* и *несоставныя*).

[1]) *Introd.* art. 96. Cap. VI, *Lab.* p. 69; ср. *Inst. calc. int.* Def. 5 et Coroll. 1, 2, 3, Schol. 1, 2, 3. pp. 9—12.

[2]) Ср. мемуаръ Эйлера въ *Act. Acad. Sc. Imp. Petr.* pr. anno 1780 Pars post. Petr. 1784: De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet; pp. 31—37.

[3]) Ср. стр. 132 и прим. 5 (гдѣ въ посл. строкѣ слѣд. чит. $d(a \log_b x): a :: dx : x$).

[4]) Ср. стр. 185. прим. 2. Я прибавлю еще что раньше опубликованія теоріи Ив. Берн. (въ 1697 г.), Вариньонъ (въ 1695 г.), пришелъ къ тѣмъ же результатамъ о чемъ и составилъ записку, которая была опубликована впрочемъ только послѣ его смерти; см. Eclaircissements sur l'Analyse des infin. patits par *M. Varignon*. Paris 1725, pp. 100, 108—118.

обставленнаго нѣкоторыми трудностями, которыя прежде всего слѣдовало преодолѣть. Вотъ какъ разсуждаетъ объ этомъ Эйлеръ [1]).

Пусть будетъ дано показательное количество a^z или, что тоже самое, степень постояннаго a, имѣющая показателемъ перемѣнное z. Этотъ показатель z заключаетъ въ себѣ всѣ опредѣленныя числа, и очевидно, что подставляя вмѣсто z послѣдовательно всѣ цѣлыя положительныя числа, мы получимъ для a^z опредѣленныя значенія a^1; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; &c; что при подстановкѣ вмѣсто z отрицательныхъ чиселъ $-1,-2,-3$, &c, количество a^z будетъ становиться послѣдовательно равнымъ $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^4}$; &c; и что если сдѣлать $z=0$, то получится всегда $a^0=1$. Но если подставлять вмѣсто z дроби, какъ $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; &c.; въ результатѣ явятся количества $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{a^3}$; которыя, будучи разсматриваемы сами по себѣ, имѣютъ по два или по большему числу значеній, ибо извлеченіе корней всегда доставляетъ ихъ нѣсколько. Между тѣмъ въ данномъ случаѣ обыкновенно допускаютъ тѣ значенія, которыя представляются первыми, т. е вещественныя и положительныя, ибо разсматриваютъ количество a^z какъ однозначную функцію отъ z. Такимъ образомъ $a^{\frac{5}{2}}$ будетъ занимать извѣстное среднее положеніе между a^2 и a^3, и будетъ вслѣдствіе этого количествомъ того же рода; и хотя $a^{\frac{5}{2}}$ имѣетъ двойное значеніе $-aa\sqrt{a}$ и $+aa\sqrt{a}$, однако принимаютъ въ разсчетъ только послѣднее. Такъ же слѣдуетъ поступать и тогда, когда показатель z становится ирраціональной величиной, довольствуясь разсмотрѣніемъ одного вещественнаго значенія, такъ какъ въ этомъ случаѣ трудно и представить себѣ число значеній предложеннаго количества. Такъ, $a^{\sqrt{7}}$ есть опредѣленная величина заключенная между предѣлами a^2 и a^3» [2]).

[1]) *Introd.* Cap. VI, art. 97, *Lab.* pp. 69—70.

[2]) Показательная функція не можетъ быть такимъ образомъ опредѣлена формулой a^x безъ дополнительныхъ, не аналитическихъ условій;

Разсматривая затѣмъ свойства показательной функціи, Эйлеръ говоритъ о неудобствахъ введенія отрицательныхъ чиселъ для a, при которыхъ измѣненіе z не даетъ непрерывнаго ряда опредѣленныхъ вещественныхъ значеній функціи и замѣчаетъ далѣе, что a^z не можетъ стать отрицательной величиной при вещественномъ значеніи z [1]. Это послѣднее замѣчаніе дало ему право, при изложеніи теоріи логариѳмовъ, сразу стать на сторону Лейбница въ знаменитомъ спорномъ вопросѣ о реальности логариѳмовъ отрицательныхъ количествъ: [2]) «только положительныя числа могутъ имѣть вещественные логариѳмы», говоритъ онъ, «....что же касается логариѳмовъ отрицательныхъ чиселъ, то они совсѣмъ не вещественны, но мнимы....» [3]).

Такъ какъ a^z есть функція однозначная и непрерывная, то въ формулѣ $a^\omega = 1 + \psi$, при ω безконечно маломъ, и ψ безконечно мало; полагая его равнымъ $K\omega$ мы можемъ написать: (1)....$a^\omega = 1 + K\omega$, или, что все равно: (2).... $\omega = l(1+K\omega)$ [4]). Изъ этихъ формулъ не трудно вывести разложенія показательной и логариѳмической функцій въ безконечные ряды: изъ первой формулы (1) слѣдуетъ: $a^{i\omega} = (1+K\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}K\omega + \frac{i(i-1)}{1.\ 2}K^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}K^3\omega^3 + \&c.$ каково бы ни было число i; полагая $i = \frac{z}{\omega}$, или $\omega = \frac{z}{i}$ исчи-

---

такими условіями служатъ для Эйлера требованія однозначности и непрерывности опредѣляемой функціи. Геометры предъидущаго періода избѣгали этихъ затрудненій, прибѣгая къ разсмотрѣнію кривой линіи — логариѳмики, что тоже можетъ привести къ нѣкоторымъ недоразумѣніямъ о которыхъ мы будемъ говорить ниже; ср. напр. *Ioh. Bern.* и *Varign.* II. cc.

[1]) *Introd.* art. 99, 100, *Lab.* pp. 71—72.

[2]) См. стр. 210—215. «Aussi voit on que Euler....adopta le sentiment de Leibnitz.... Ce fut le sujet d'un commerce de lettres entre lui et Dalembert pendant les années 1747 et 1748» *Montucla* H. d. M. t. III, p. 376. Мы прослѣдимъ ниже подробно исторію этого вопроса.

[3]) *Introd.* art. 103, *Lab.* p. 73. Опредѣленіе логариѳма какъ функціи обратной показательной Эйлеръ даетъ въ art. 101, 102, pp. 72, 73.

[4]) *Introd.* Cap. VI: «О разложеніи показательныхъ и логариѳмическихъ количествъ въ ряды», art. 114, *Lab.* pp. 84—85.

тая такимъ образомъ i безконечно большимъ, мы легко получимъ $a^z = 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{K^j z^j}{1.2.3....j} \ldots (I)$[1].

Изъ второй формулы (2) заключаемъ: $i\omega = l(1+K\omega)^i$; полагая $(1+K\omega)^i = (1+x)...(3)$—, мы найдемъ: $l(1+x)=i\omega$, что при конечномъ x можетъ быть только тогда когда i безконечно велико; изъ равенства (3) слѣдуетъ далѣе, что

$$1+K\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}, \ldots\ i\omega=l(1+x)=\frac{1}{K}\left[(1+x)^{\frac{1}{i}}-\frac{i}{K}\right],$$

или, разлагая по формулѣ Ньютона и принимая во вниманіе, что i безконечно велико,—(II)....$l(1+x)=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}$[2].

Изъ этихъ формулъ (I) и (II) вытекаютъ такія уравненія связывающія a и K: $a=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{K^j}{1.\ 2.\ 3...j}$, $K=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(a-1)^j}{j}$[3].

Значенія этихъ величинъ опредѣляютъ ту или другую систему логариѳмовъ; при K=1 получаются натуральные или гиперболическіе логариѳмы, основаніе которыхъ Эйлеръ обозначаетъ буквой e[4]); въ этой системѣ, при ω безконечно маломъ и i безко-

---

[1]) *Ibid.* art. 115, 116, pp. 85—86.

[2]) *Ibid.* art. 117—119, pp. 86—88.

[3]) *Ibid.* art. 116, p. 86, art. 120, p. 88.—Выводъ Эйлера для разложенія въ рядъ $l(1+x)$ совпадаетъ въ сущности съ выводомъ Галлея l. c. въ прим. 4 на стр. 216. Эйлеръ однако первый вполнѣ оцѣнилъ значеніе формулы разложенія бинома въ теоріи логариѳмовъ. Ср. *Reiff.* Gesch. d. un. R. pp. 40, 105, 107.

[4]) *Introd.* art. 122, *Lab.* p. 89; Эйлеръ даетъ здѣсь число e съ 23 десят. знак.; буква e для обознач. основ. нат. лог. встрѣчается уже въ письмѣ Эйлера къ Гольдбаху *Petr.* 25 *Nov.* 1731. *Corresp.* T. I, p. 58. Ср. еще письмо къ Гольдбаху Petr. 8 Ian. 1730, *Corresp.* t. I, pp. 13—15, гдѣ Эйлеръ объясняетъ Г. разницу между обыкн. и гиперб. логар. (въ отвѣтъ на вопр. Г. въ письмѣ Mosc. 1 Dec. 1729 *ibid.* p. 9.

нечно большомъ, имѣютъ мѣсто такія равенства:—(3)....$e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ и $l(1+z)=i\left[(1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right]$[1].

Восьмая глава «Введенія» подъ заглавіемъ—О трансцендентныхъ количествахъ происходящихъ отъ разсмотрѣнія Круга—содержитъ въ себѣ одно изъ самыхъ замѣчательныхъ твореній Эйлера въ области анализа — исчисленіе тригонометрическихъ функцій[2]) «Послѣ разсмотрѣнія логариѳмовъ и показательныхъ количествъ», говоритъ онъ, слѣдуетъ разсмотрѣніе дугъ круга и ихъ синусовъ и косинусовъ, столько же потому, что они образуютъ новый родъ трансцендентныхъ количествъ, сколько и потому, что они происходятъ изъ самыхъ логариѳмическихъ и показательныхъ количествъ, когда эти послѣднія заключаютъ въ себѣ мнимыя величины»[3]).

Различные элементы теоріи круговыхъ функцій возникли еще въ эпоху Лейбница и Ньютона въ связи съ развитіемъ символической алгебры, съ успѣхами интегральнаго исчисленія и трансцендентной геометріи. Еще раньше чѣмъ Майеръ ввелъ въ тригонометрію алгебрическій символизмъ,[4]) Котесъ,[5]) Де Муавръ[6]) и Иванъ Бернулли[7]) прилагали тригонометрію къ рѣшенію вопросовъ алгебры связанныхъ съ интегральнымъ исчисленіемъ—изслѣдованія, которыя дали поводъ обобщить понятіе о тригонометрическихъ функціяхъ на случай какихъ угодно вещественныхъ аргументовъ[8]).

---

[1]) *Introd.* art. 125, pp. 91–92; это основныя формулы Эйлеровой теоріи логариѳм. и показат количествъ: онѣ опредѣляютъ эти количества какъ *аналитическія* функціи (ср. стр. 266).

[2]) Ср. *Ph. Jolly.* De Euleri meritis de funct. circul. praeced. histor. earum ad Eul. cont. Heidelb. 1834.

[3]) *Introd.* Cap. VIII, art. 126, *Lab.* p. 92.

[4]) Ср. стр. 256.

[5]) Ср. стр. 203—204.

[6]) Стр. 204—207.

[7]) Стр. 207—209.

[8]) Ср. стр. 255.

Иванъ Бернулли, геніальный учитель Эйлера, сдѣлалъ еще громадный шагъ впередъ, связавъ круговыя функціи съ логариѳмами мнимыхъ количествъ [1]); ему же принадлежитъ плодотворная идея введенія *характеристическихъ* символовъ *l*, *sin*, *cos*,...., какъ знаковъ *трансцендентныхъ операцій* надъ перемѣнными количествами и ихъ функціями, подобныхъ символамъ Лейбница $\int$ и d [2]). Изъ всѣхъ этихъ элементовъ Эй-

---

[1]) *L. c.* Въ 1879 году *G. Eneström* нашелъ въ библіотекѣ Стокгольмской академіи наукъ письмо И. Бернулли къ Эйлеру Bas. 18 Apr. 1729, изъ котораго видно что знаменитый Базельскій математикъ пошелъ гораздо дальше въ теоріи мнимыхъ логариѳмовъ, чѣмъ это можно было предполагать по его другимъ, извѣстнымъ ранѣе, работамъ. Я еще буду имѣть случай говорить подробнѣе о содержаніи этого письма. См. Trois lettres inédites de Jean 1-er Bernoulli à Léonard Euler tirées de la corr. de J. I-er B. gardée dans la b. de l'A. R. d. S. de St. par *Gustaf Eneström*. Note pr. à l'Ac. R. d. Sc. d. Suède le 8 Oct. 1879. St. 1880. — Bihang till K. Svenska Vet. Acad. Handlingar. Bd. 5. N: o 21. pp. 5, 6, 21, 22.

[2]) См. *Pr. Calc. Expon.* Op. t. I p. 181, *Sol d'un probl. conc. le calc. int. etc.* t. I. pp. 393—400; письмо къ Эйлеру *Bas.* 9 Dec. 1739, *Corr.* II, p. 29; *Jac. Bern.* Op. p. 777, *Act. Er. L.* 1697 Mai); ср. стр. 201 прим. 4, стр. 212 прим. 1, стр. 256 прим. 2. Cotes употреблялъ верт. черту для обозн. логар.: «.... CE aequabitur mensurae rationis quam habet *v* ad *c* pro Modulo CS,....: quam aequalitatem sic designare soleo, $CE = CS|\frac{c}{s}$.» *Harm. Mens.* p. 37. «....le logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$ au module $\frac{1}{nf}$, qu'on marque de cette façon $\frac{1}{nf}\left(\frac{e+fz^n}{e}\right)$.» *Walmesley*. Anal. d. Mes &c. Paris 1753 p. 33. — Не совсѣмъ справедливо сравниваетъ *W. W. Rouse Ball* Эйлерово изложеніе тригонометріи съ изложеніемъ *Ѳ. Симпсона*: Trigonometry plane and spherical &c. London 1748. Симпсонъ въ своей замѣчательной въ другихъ отношеніяхъ книгѣ употребляетъ при изложеніи теоріи обозначенія Майера, въ другихъ случаяхъ сокр. обозн. *e. g.* p. 71: «*Co-tang* ½ AC.: *Tang.* ½ AC.: : *S*(A+ACE): *S*(A — ACE).» Ср. *W. W. R. Ball.* A Short Account. &c. p. 367, прим. и мою замѣтку въ № 135 *Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Мат.* (Одесса 1892); стр. 51, 52.—Эйлеръ ввелъ сокр. характ. обозначенія и для обратн. тригонометрическихъ функцій: см. *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. IX ad Ann. 1737, Petr. 1744, De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi, § 17, p. 234: «$At\frac{x}{y} = At\frac{ax-y}{ay+x} + At\frac{1}{a}$ ......», *Introd* art. 140, *Lab.* p. 104: «*tang s = t*, ... *s = A tang t*». Cp. *Subsidium calculi sinuum* Auct. *L. Eulero.* Novi Comm. Ac. Sc. Imp. Petr. T. V. ad Ann. 1754 et 1755, Petr. 1760., pp. 164, 165.

леръ и составилъ впервые полную аналитическую теорію круговыхъ функцій, «этихъ удивительныхъ величинъ, безъ помощи которыхъ не можетъ обойтись ни одна часть математической науки» [1]).

Мы конечно не будемъ останавливаться на основныхъ формулахъ тригонометріи, данныхъ въ главѣ о круговыхъ функціяхъ [2]) и упомянемъ только о тѣхъ разсужденіяхъ, посредствомъ которыхъ Эйлеръ устанавливаетъ зависимость между тригонометрическими и показательными величинами, между круговыми дугами и логариѳмами.

Разлагая первую часть равенства $(\text{Sin } z)^2 + (\text{Cos } z)^2 = 1$ на два линейныхъ множителя, Эйлеръ получаетъ сопряженные мнимые биномы $\text{Cos } z + \sqrt{-1}.\ \text{Sin } z$ и $\text{Cos} z - \sqrt{-1}.\ \text{Sin} z$, разсмотрѣніе которыхъ служитъ главнымъ источникомъ всѣхъ послѣдующихъ выводовъ [3]). Перемножая два или нѣсколько

---

[1]) «Inter incrementa splendissima, mathesi per recentiorum labores adiecta, theoria functionum a circulo pendentium procul dubio locum imprimis insignem tenet. Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maxime heterogeneis saepissimè deferimur, cuiusque subsidio nulla Matheseos pars carere potest ....» *Gauss* Disquisitiones arithmeticae. Lips. 1801 art. 335, *Werke*, Bd. I, 1863 p. 412.

[2]) *Introd.* art. 126—131, *Lab.* pp. 92—96; въ art. 125 Эйлеръ даетъ число π съ 127 десятичными знаками; ср. первыя изслѣдованія Эйлера и Гольдбаха о рядахъ служащихъ для вычисленія числа π въ *Comm Ac. Sc. I. P.* T. IX ad ann. 1737, Petr. 1744: Variae observationes circa series infinitas, pp. 160—174, *ibid.* t. XI ad ann. 1739, Petr. 1750: Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inueniendam idoneae. Auctore *L. Eulero*, также мемуаръ упом. въ прим. 2 на стр 273; письмо Гольдб. къ Эйл. 7 Nov. 1739 и Эйл. къ Г. 12 Nov. 1739 st. v., Гольд. къ Э. 24 Nov. 1739, Э. къ Г. 26 Nov. 1739, безъ числа (XXIX въ *Corr.*) *Corr. m. & ph.* t. I pp. 81—96, *Introd.* art. 142, 168, 169, 171—183, 190, 198, 277—280, 285 — 295. *Lagny* первый опредѣлилъ π съ 127 дес. знаками примѣн. для своего вычисл. безк. ряды; см. Hist. de l'Ac. R. d. S. Ann. 1719 av. l. Mém. de M. & de P. p. la même An. Paris 1721; ср. *Montucla.* Hist. des recherches sur la quadr. du cercle etc. Nouv éd rev. et corr. Paris 1831 pp. 156—162 et suiv., Add. pp. 279—282; Hist. d. math t. IV 3-me suppl. pp. 639, 640.

[3]) *Introd.* art. 132, *Lab.* pp. 96—97.

равныхъ биномовъ между собой, легко получить, при помощи полной индукціи, формулу де Муавра, которая сейчасъ же даетъ выраженія—(4)... $\operatorname{Cos} nz = \frac{(\operatorname{Cos} z + \sqrt{-1}.\operatorname{Sin} z)^n + (\operatorname{Cos} z - \sqrt{-1}.\operatorname{Sin} z)^n}{2}$ и (5).... $\operatorname{Sin} nz = \frac{(\operatorname{Cos} z + \sqrt{-1}.\operatorname{Sin} z)^n - (\operatorname{Cos} z - \sqrt{-1}.\operatorname{Sin} z)^n}{2\sqrt{-1}}$ [1], или, по раскрытіи скобокъ и приведеніи: (6).... $\operatorname{Cos} nz = (\operatorname{Cos} z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(\operatorname{Cos} z)^{n-2}(\operatorname{Sin} z)^2 + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\operatorname{Cos} z)^{n-4}(\operatorname{Sin} z)^4 -$ и т. д. и (7)....$\operatorname{Sin} nz = \frac{n}{1}(\operatorname{Cos} z)^{n-1}\operatorname{Sin} z - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(\operatorname{Cos} z)^{n-3}(\operatorname{Sin} z)^3 +$ и т. д.[2]).

Замѣчая далѣе, что при z безконечно маломъ $\operatorname{Sin} z = z$, а $\operatorname{Cos} z = 1$ и полагая n безконечно большимъ, такъ что произведеніе nz равно конечной величинѣ ν, мы легко получимъ изъ предъидущихъ формулъ (6) и (7) извѣстныя разложенія Cos ν и Sin ν по восходящимъ степенямъ числа ν. Формулы (4) и (5) при тѣхъ же предположеніяхъ обращаются въ такія: $\operatorname{Cos} \nu = \frac{\left(1 + \frac{\nu\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{\nu\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ и $\operatorname{Sin} \nu = \frac{\left(1 + \frac{\nu\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{\nu\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$, принимая въ соображеніе равенство (3), мы находимъ:

---

[1]) Эта формула была открыта независимо отъ Де-Муавра *Николаемъ Бернулли* (плем. Я. и И.) въ 1828 году; см. письмо его къ Эйлеру Bas. 13 Jul 1742, *Corr.* T. II. pp. 682—683, письмо Дан. Берн. къ Гольдб. St. Pét. (sans date) и отвѣтъ Гольдб. Moscou 18 Nov. 1728, *Corr.* t. II, pp. 272, 275. *Comm. Ac. Sc. I. P.* t. III ad a. 1728, P. 1732: *Dan. Bernoulli* Observ. de seriebus etc pp. 86, 99—100.

[2]) *Ibid.* art. 133, *Lab* p. 97; отсюда Эйлеръ выводитъ формулы разложенія въ ряды по восход. степ. перем. *Cos v* и *Sin v*, какъ сказано ниже; *Intr.* art. 134—137, *Lab.* pp. 97—102; ср. *Montucla.* H. d. M. T. III, pp. 289, 290.

$$\operatorname{Cos} v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \text{ и } \operatorname{Sin} v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$ откуда $e^{+v\sqrt{-1}} = \operatorname{Cos} v \pm \sqrt{-1}.\ \operatorname{Sin} v.$ [1]).

Если n безконечно мало и равно $\frac{1}{i}$ гдѣ i безконечно большое число, то $\operatorname{Cos} nz = \operatorname{Cos}\frac{z}{i} = 1$, а $\operatorname{Sin} nz = \operatorname{Sin}\frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; дѣлая эти предположенія въ формулахъ (4) и (5) и замѣчая что вслѣдствіе равенства $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} + 1$, — пр

[1]) Эти замѣчательныя формулы, по выраженію Лагранжа (10-me Leç. s. l. c. d. f.) «l'une des plus belles découvertes analytiques qu'on ait faites dans ce siècle», были открыты Эйлеромъ въ началѣ 1742 года и опубликованы въ VII томѣ *Miscellanea Berolinensia*; онъ нашелъ ихъ, сравнивая б. ряды выражающіе *Sinx*, *Cosx* и e^x. См. письма Эйлера къ Гольдбаху Berl. 9 Dec. 1841. $\left\{\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \operatorname{Cos}(39^0\, 42^{I}\, 51^{II}\, 52^{III}\, 9^{IV})\right\}$, 6 März 1742, 8 Mai 1742 $\{\ldots$ mit meinem General-theoremate, dass $a^{+p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \operatorname{Cos. Arc.} p/a \ldots\}$ 30 Iuni 1742 и Гольдбаха къ Э. St. Pet. 13 Febr. n. st. 1742, 12 Apr. 1742, Moscou d. 7 Juni n. st. 1742, *Corresp.* t. I, pp. 111, 112—113, 117, 122, 124, 125—126, 133. Первые слѣды изслѣдованій Эйлера въ этомъ направленіи можно замѣтить еще въ статьѣ: De seriebus quibusdam considerationes, помѣщ. въ XII т. Comm. Ac. Sc. I. P. ad a. 1740, Petr. 1750, p. 65, гдѣ дается такая формула $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\operatorname{Sin}\pi\sqrt{-q}} = \pi\sqrt{q}.\frac{2e^{\pi\sqrt{q}}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1}$. Ср. *Reiff*. G. d. u. R. pp. 103—105. «Les expressions du s. et du c. en exp. im....», говоритъ *Lacroix* (Tr. d. c. d. et d. c. int. t. III pp. 604—605) «sont toujours attribuées par Euler à Jean Bernoulli.... elles sont une conséquence très-prochaine de ce qu'on lit à la page 400 du tome 1-er (т. е. соч. Ив. Берн. ср. стр. 208 прим. 1). Il se peut aussi qu'Euler les ait connues par son commerce avec Jean Bernoulli, dont il était le disciple». — Въ письмѣ И. Берн. къ Э. открытомъ Энестрёмомъ Bas. 18 Apr. 1729 мы дѣйствительно находимъ формулу эквивалентную такой: $\frac{\operatorname{Cos} z + \sqrt{-1}\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z - \sqrt{-1}\operatorname{Sin} z} = e^{2z\sqrt{-1}}$ изъ которой непосредственно слѣдуютъ послѣднія формулы *art.* 138. *Introductionis*; *Eneström*. l. c. pp. 5, 21.

$y=(1+x)$, $y^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}ly$, мы получимъ вмѣсто формулы (4) тожество $\frac{1}{i}\, l\,(\mathrm{Cos}\, z+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin}\, z)+\frac{1}{i}\, l(\mathrm{Cos} z-\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin} z)=0$; формула же (5) превратится въ такое равенство: $z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.$

$$l\left(\frac{\mathrm{Cos}.\, z+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin}.\, z}{\mathrm{Cos}.\, z-\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin}.\, z}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\,\frac{1+\sqrt{-1}.\,\mathrm{tang}.\, z}{1-\sqrt{-1}.\,\mathrm{tang}.\, z},$$

найденное раньше Иваномъ Бернулли посредствомъ интегральнаго исчисленія [1]); изъ этого равенства непосредственно получается разложеніе $z=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(\mathrm{tang}\, z)^{j}}{j}$, дающее при $z=\frac{\pi}{4}$ рядъ Лейбница $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$&c. и, при иныхъ значеніяхъ z другіе, быстрѣе сходящіеся ряды для вычисленія числа π [2]).

Для перваго приложенія аналитической гоніометріи послужило Эйлеру рѣшеніе задачъ Котеса и Де Муавра и другихъ болѣе общихъ задачъ о разложеніи цѣлыхъ функцій на трехчленныхъ множителей [3]). Способъ Эйлера, который распространяется на цѣлыя трансцендентныя функціи выраженныя безконечными рядами расположенными по восходящимъ степенямъ перемѣнной, состоитъ въ подстановкѣ вмѣсто z ——— $\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$ и $\frac{p}{q}(\mathrm{Cos}\,\varphi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$ и опредѣленіи $\frac{p}{q}$ и φ такъ, чтобы функція обращалась въ 0 при этихъ значе-

[1]) *Introd.* art. 139, *Lab.* pp. 102—103; ср. предъидущ. примѣч.

[2]) *Introd.* art. 140—142, *Lab.* pp. 103—105.

[3]) *Ibid.* Cap. IX: о розысканіи трехчленныхъ множителей, art., 143—164, *Lab.* pp. 106—126.

ніяхъ перемѣнной, что даетъ уравненія опредѣляющія рядъ триномовъ вида $pp - 2pqz.\ \mathrm{Cos}\ \varphi + qqzz$ [1]). Эйлеръ получаетъ такимъ образомъ всѣхъ множителей функцій $a^n + z^n$, $a^n - z^n$, $a^{2n} - 2a^n z^n\ \mathrm{Cos}.\ g + z^{2n}$, найденныхъ уже раньше англійскими геометрами [2]) и находитъ впервые разложенія трансцендентныхъ функцій въ *произведенія безконечнаго числа множителей* [3]). Онъ разсматриваетъ выраженія $e^x \mp e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i \mp \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i$, приводящіяся къ виду $a^n \mp z^n$ при $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$ и $z = 1 - \frac{x}{i}$. При верхнемъ знакѣ, кромѣ множителя x существуютъ другіе, общій видъ которыхъ есть $2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)$ $\mathrm{Cos}.\ \frac{2k}{i}\pi$; при нижнемъ знакѣ получаются множители вида: $2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)\ \mathrm{Cos}.\ \frac{2k+1}{i}\pi$. Вслѣдствіе безконеч-

---

[1]) *Introd.*. art. 145—149, pp. 107—109.

[2]) *Ibid.* art. 150—154; pp. 109—116; ср. стр. 202 прим. 1, стр. 204 прим 3 и 4

[3]) Произведенія безконечнаго числа множителей были введены въ первый разъ въ анализъ Эйлеромъ, по примѣру Валлиса, для интерполированія рядовъ по поводу возбужденнаго Гольдбахомъ вопроса о нахожденіи «общаго члена» гипергеометрическаго ряда: 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, ... См. *Comm. Ac. Sc. Imp. Petr.* t. III ad ann. 1728, Petr. 1732: De Terminis generalibus serierum. Auctore *C. G.* (Goldb.), pp. 164—173. *Comm. Ac. Sc. I. P.* ad ann. 1730 et 1731, Petr. 1738: De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. Auct. *L. Eulero*, pp. 38, 39 sqq., также письма Э. къ Г. Petr. 13 Oct. 1729, Petr. 8 Jan. 1730, —Г. къ Э. Moscuae 1 Dec. 1729, *Corr.* t. I, pp. (3) sqq.—Одновременно съ Эйлеромъ *Даніилъ Бернулли* пришелъ къ подобнымъ же формуламъ: см. письма его къ Гольдбаху St. Pét. 6 oct. 1729, 20 (31) oct. 1729, 10 nov. 1729, *Corr* t. II pp 325, 330—331, 333: ср. также п. Г. къ Д. Б. Moscou 18 nov. 1728, *Corr.* t. II, pp. 273—274.—Эйлеръ потомъ связалъ этотъ вопросъ съ интегральнымъ исчисленіемъ: *Comment.* Ac. Sc. I. P T. XI, ad a. 1739, Petr. 1750, pp. 3—31: De Productis ex infinitis factoribus ortis Auctore *L. Eulero*,

ной величины числа i: $\mathrm{Cos.}\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$ и $\mathrm{Cos.}\frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{2ii}$; такъ, что найденные множители приводятся къ выраженіямъ: $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$ въ первомъ случаѣ и (6).... $\frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2}{ii}\pi\pi$ во второмъ. Пренебрегая безконечно малыми величинами происходящими отъ члена $-\frac{xx}{ii}$ мы легко получимъ извѣстное разложеніе функціи $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ [1]). — Для полученія такого же разложенія для $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ мы замѣчаемъ, что эта функція выражается рядомъ $1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$, откуда слѣдуетъ, что ея множители должны имѣть видъ $1+\alpha xx$ и приводимъ къ этому виду выраженіе (6) раздѣляя его на $\frac{(2k+1)^2\pi\pi}{ii}$: общій видъ множителей станетъ тогда такимъ: $1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2\pi\pi}$, гдѣ уже больше не содержится безконечнаго числа i [2]). Полагая $x = z\sqrt{-1}$ мы переходимъ къ къ разложеніямъ Sin z и Cos z; при значеніяхъ z соизмѣримыхъ съ π отсюда получаются, кромѣ выраженій для самаго π, удобныя формулы для вычисленія логариѳмовъ тригонометрическихъ функцій [3]). Подобнымъ же образомъ Эйлеръ находитъ разложенія для $\frac{e^{b+x} \pm e^{c+x}}{e^b \pm e^c}$ и другихъ, происходящихъ изъ

---

[1]) *Introd.* art. 155, 156, *Lab.* pp. 116—118.

[2]) *Ibid.* art. 157, p. 118.

[3]) *Ibid.* art. 158, pp. 118—119; Cap. XI; О другихъ безконечныхъ выраженіяхъ для дугъ и синусовъ, art. 184 - 198, *Lab.* pp. 141—155. —Еще И. Бернулли сдѣлалъ замѣчаніе о безконечномъ числѣ корней уравненія:

этихъ функцій, показательныхъ и тригонометрическихъ выраженій [1]).

Если во второй части равенства: $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)$ &c. раскрыть скобки и приравнять другъ другу коеффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ z въ лѣвой и правой части, то получимъ рядъ новыхъ равенствъ: $A=\sum\alpha$, $B=\sum\alpha\beta$, $\sum\alpha\beta\gamma\delta$, ... дающихъ суммы безчисленнаго множества безконечныхъ строкъ; изъ нихъ можно получить суммы рядовъ: $P=\sum\alpha$, $Q=\sum\alpha^2$, $R=\sum\alpha^3$, ... помощью такихъ уравненій: $P=A$, $Q=AP-2B$, $R=AQ-BP+3C$, $S=AR-BQ+CP-4D$ и т. д. [2]). Прилагая эти соображенія къ найденнымъ разложеніямъ функціи

$\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4.5}x^5-\frac{1}{2.3\ldots.7}x^7+\&c. - y=0$. «Cuius singulae radices, totidem arcus exhibentes, eidem sinui *y* respondent»; см. *Joh. Bern.* Op. ANEKAOTA Analytica, Op. Omn. t. IV, N. CLII.—Summatio seriei quadratorum reciprocae, II, p. 20. Въ 1739 году Эйлеръ нашелъ формулу разложенія гиперболич. и кругов. синуса въ безконечныя произведенія, суммируя эти произведенія такъ: $Ls=\sum_1^\infty L\frac{n^2+p}{n^2}$, откуда $\frac{ds}{s.dp}=\frac{\pi\sqrt{p}-1}{2\,p.}+\frac{\pi\sqrt{p}}{p.(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)}$, а полагая $p=qq$; $\frac{ds}{s}=-\pi\,dq-\frac{dq}{q}+\frac{2\,e^{\pi q}\pi dq}{e^{2\pi q}-1}$, откуда затѣмъ легко найти что $s=\frac{e^{2\pi\sqrt{p}}-1}{2e^{\pi\sqrt{p}}\,\pi\sqrt{p}}$; такимъ же путемъ можно доказать что $\prod_1^\infty\frac{n^2-qq}{n^2}=\frac{\text{Sin A. }\pi q}{\pi\sqrt{p}}$. См. въ XI томѣ *Comm. Ac. Sc. I. P. ad ann. 1739*, pp. 194—230, диссертацію: Methodus facilis computandi angulorum sinus ac Tangentes tam natur. quam artif. Probl. 1, Coroll. 1—6, Probl. 2, Coroll. 1—5, pp. 194—200 sqq.

[1]) *Introd.* art. 159—164, *Lab.* pp. 119—126.

[2]) *Ibid.* Cap. X: Объ употребленіи вышенайденныхъ множителей для суммованія безконечныхъ рядовъ, art. 165, 166, *Lab.* pp. 126—128; ср.: Obseruationes Analyticae variae de Combinationibus, Auctore *L. Euler*. *Comm. Ac.* Sc. *I. P.* T. XIII, ad ann. 1742—43. Petr. 1751, pp. 64—93. N. pp. 69 sqq. Вопросъ о выраж. суммъ один. степен. корней данн. у-ія былъ рѣшенъ впервые *А. Жираромъ* въ Invent. Nouv. (ср. стр. 113); Ньютонъ далъ извѣстныя возвратныя формулы въ Arithm. Univ.; ср. *Arbogast.* Calc. d. Dériv. Strasb. 1800, p. 59.

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ въ рядъ и произведеніе безконечнаго числа множителей, мы находимъ суммы *обратныхъ степеней* натуральныхъ чиселъ: $M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n}$, а слѣдовательно и рядовъ: $1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c. = \frac{2^n - 1}{2^n} M$ и $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c. = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} M$. [1]). Поступая также съ разложеніями другихъ трасцендентныхъ функцій Эйлеръ суммируетъ еще болѣе сложныя числовыя строки [2]).

Способъ опредѣленія трехчленныхъ множителей даетъ еще возможность находить вещественныя разложенія сложныхъ раціональныхъ дробей на простѣйшія [3]), которыя, кромѣ своего значенія для интегральнаго исчисленія играютъ важную роль въ ученіи о возвратныхъ рядахъ. Эйлеръ посвящаетъ XIII главу *Введенія* теоріи этихъ рядовъ [4]) и далѣе, въ главѣ XVII [5]) прилагаетъ ее, слѣдуя *Даніилу Бернулли* [6]), къ розысканію корней алгебрическихъ и даже трасцендентныхъ уравненій.

---

[1]) *Introd.* art. 167—170, *Lab.* pp. 128—131, ср. прим. 2 на стр. 274.

[2]) *Introd.* art. 171—183, *Lab.* pp. 131—141.

[3]) *Introd.* Cap. XII, art. 199—210, *Lab.* pp. 156—168. О разлож. рац. др. на прост. ср. письмо Э. къ Гольдб. Berl. 9 Apr. 1743, *Corr.* t I, pp. 216—218.

[4]) *Ibid.* art. 211—233, pp. 168—187.

[5]) *Ibid.* art. 332—355, *Lab.* pp. 257—276.

[6]) *Ibid.* art. 332; см. *Comm. Ac. Sc. Imp P.* T. III ad a. 1728, Petr. 1732: *Danielis Bernoulli*, Jo. Fil. Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutuo consequentium etc, pp. 85—100; *Ibid* T. V ad a. 1730 et 1731, Petr. 1738: *Dan. Bernoulli* Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium: ut et de noua serierum specie, pp. 63—82. Въ наше время этотъ вопросъ послужилъ предметомъ статьи: Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations; par *C.-A. Laisant.* Bull. d. sc. math. 2-e série t. V. 1881; ср. нѣк. истор. свѣд. на 2-й страницѣ этой ст.; ср. еще мем. *C. Runge* въ *Acta Mathem.* t. VI, 1885 pp. 304 sqq.

Послѣ приложеній къ алгебрѣ, другой областью, въ которой помощь аналитической тригонометріи существенно важна, является геометрическій вопросъ объ умноженіи и дѣленіи угловъ [1]). Уже «отецъ анализа», Вьета усмотрѣлъ въ теоріи угловыхъ сѣченій такую область, гдѣ алгебра всего тѣснѣе соприкасается съ геометріей, гдѣ онѣ, такъ сказать, переплетаются между собою тончайшими нитями своихъ тканей, гдѣ эти двѣ науки доставляютъ другъ другу безконечное разнообразіе задачъ и методовъ для ихъ рѣшенія [2]). Въ новѣйшее время великій *Гауссъ* обнаружилъ въ этомъ вопросѣ глубочайшія тайны науки о числахъ, и въ наши дни ученіе объ умноженіи и дѣленіи аргумента составляетъ одинъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ теоріи всякой трансцендентной функціи [3]).

Въ аналитической тригонометріи теорія угловыхъ сѣченій въ самомъ общемъ видѣ имѣетъ предметомъ розысканіе соотношеній между тригонометрическими линіями дугъ соизмѣримыхъ, или сумма или разность которыхъ соизмѣрима съ окружностью.

---

[1]) *Introd.* Cap. XIV, art. 234–263, *Lab.* pp. 187–207. — Объ исторіи этого вопроса см. *Klügel.* Math. Wört. 2 Th. pp. 614—622 (Art. Goniometrie). Art. 262 и 263. *Introd.* содерж. формулы выражающія степени Cos и Sin прост. дуги съ пом. Cos и Sin дугъ кратныхъ; въ дополненіе къ этимъ art. см. мемуаръ Эйлера Subsidium calculi sinuum упом. въ прим. 2 на стр. 273.

[2]) «Ecquis vero cum magnitudines omnes sint lineae, superficies, vel corpora, tantus proportionum supra triplicatam, aut demum quadruplicatam rationem potest esse usus in rebus humanis, nisi forte in sectionibus angulorum.. . — Ergo à nemine hactenus adgnitum mysterium angularium sectionum, sive ad Arithmetica, sive Geometrica, & edocet—*Data ratione angulorum dare rationem laterum. Facere ut numerum ad numerum, ita angulum ad angulum*». — *Fr. Vietae* Isagoge in A A. Cap. VIII. Op. Math. ed. Schooten. Lugd. Bat. 1646. p. 12. Ср. *ibid.* p. 300 (F. V. ad Ang. Sect. Th. καθολ. dem, per Al. Andersonum ad Theor X): «*Ergo à nemine prius agnita Mysteria, tam in Arithmeticis quam Geometricis, pandit Analytice sectionum Angularium*». Ср. стр. 110 и прим. 3 тамъ же.

[3]) «.... tractatio ipsa abunde declarabit quam intimo nexu hoc argumentum cum arithmetica sublimiori coniunctum sit.—Ceterum principia theoriae ... non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt....» *Gauss* Disq. ar. art. 335, *Werke* t. I pp. 412—413.

Для развитія этой теоріи Эйлеру послужило выраженіе для *Sin. nz* помощью *Sin. z* и *Cos. z* и формула Ивана Бернулли для *tang. nz* какъ функціи отъ *tg. z* [1]). Кромѣ того, теорія возвратныхъ рядовъ доставила ему замѣчательныя общія формулы для вычисленія суммы конечнаго числа синусовъ или косинусовъ, аргументы которыхъ составляютъ ариѳметическую прогрессію: безконечный рядъ $\sum_{j=0}^{\infty} \text{Sin}\,(a+jb)$ можетъ быть разсматриваемъ какъ возвратный, scala rationis котораго есть $2\text{Cos}\,b - 1$, и который, слѣдовательно, происходитъ отъ разложенія дроби $\frac{\text{Sin}\,a + z.\,[\text{Sin}\,(a+b) - 2\,\text{Sin}\,a.\,\text{Cos}\,b]}{1 - 2z.\,\text{Cos}\,b + zz}$ при $z=1$, или $\frac{\text{Cos}(a - \frac{1}{2}b)}{2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,b}$; сумма добавочнаго ряда: $\sum_{j=n+1}^{\infty} \text{Sin}\,(a+jb)$ по той же причинѣ есть $\frac{\text{Cos}[a + (n + {}^1/_2)b]}{2\text{Sin}\,{}^1/_2 b}$, и слѣдовательно сумма искомаго ряда $\sum_{j=0}^{n} \text{Sin}\,(a+jb)$ есть $\frac{\text{Sin.}\,(a + {}^1/_2\,nb)\,\text{Sin.}\,[{}^1/_2\,(n+1)\,b]}{\text{Sin.}\,{}^1/_2\,b}$.

Точно также легко найти сумму косинусовъ $\frac{\text{Cos.}\,(a + {}^1/_2\,nb)}{\text{Sin.}\,{}^1/_2 b.}$. $\text{Sin.}\,[{}^1/_2(n+1)b]$ [2]).

Кромѣ суммъ и произведеній, еще одинъ родъ безконечныхъ аналитическихъ выраженій обратилъ на себя вниманіе Эйлера—непрерывныя дроби [3]). Выраженія эти могутъ быть безъ

[1]) *Introd.* art. 235—257, *Lab.* pp. 188—203; ср. art. 249 и стр. 209, прим. 2

[2]) *Introd.* art. 258—260, pp 203—204.

[3]) Первыя изслѣдованія Эйлера о непрерывныхъ дробяхъ тоже находятся какъ и изсл. о безк. произв., въ связи съ вопросомъ объ интерполяціи и съ интегральнымъ исчисленіемъ: см. *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. IX

труда приведены къ безконечнымъ рядамъ и наоборотъ, извѣстные виды рядовъ легко превращаются въ непрерывныя дроби: дробь $\left[\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{d}, \frac{\delta}{e}, \frac{\varepsilon}{f}, \&c.\right]$ равна ряду: $\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d + \gamma b)(bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta)} + \&c$[1]), а рядъ: $A-B+C-D+E-F+\&c.$ дроби: $\left[\frac{A}{1}, \frac{B}{A-B}, \frac{AC}{B-C}, \frac{BD}{C-D}, \frac{CE}{D-E}, \&c.\right]$[2]). Такъ рядъ Лейбница $\frac{\pi}{4}=1-1/3+1/5-1/7$ &c. приводитъ къ выраженію $\frac{\pi}{4}=[1/1, 1/2, 9/2, 25/2, 49/2, \&c.]$, или къ дроби Броункера: $\frac{4}{\pi} = 1+[1/2, 9/2, 25/2, 49/2, \&c.]$, и рядъ: $l2= 1-1/2+1/3-1/4+\&c.$ къ дроби: $[1/1, 1/1, 4/1, 9/1, 16/1, 25/1, \&c.]$[3]).

---

ad ann. 1737, Petr. 1744, pp. 98—137; De Fractionibus Continuis Dissertatio, Auctore *Leonh. Euler*; *ibid.* T. XI ad a. 1739, Petr. 1750, pp. 32–81: De fractionibus continuis Observationes. Auctore *Leonh. Eulero.* О прочихъ трудахъ Э. и другихъ геом. XVIII-го вѣка по этому предмету см. *Klügel.* Math. Wört. 3 Th. pp. 85—87 (Art. Kettenbruch). См. также письма Э. къ Гольдбаху Petr. 25 nov. 1731 (разложеніе интегр. д. ур. Рикката), Domi d. 3 Jan. 1732 (тоже), *Corr.* T. I, pp. 58, 59, 62, 63, Berl. 9 Iuli 1843 pp. 240–241, Berl. 7 Aug. 1845, pp. 325—326.

1) *Introd.* Cap. XVIII: О непрерывныхъ дробяхъ, art. 356–364, *Lab.* pp. 277—282; употребляемое мною обозн. н. д. не принадлежитъ Э.

2) *Ibid.* art. 363–369 (превр. въ н. д. ряда $\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-$ &c). pp. 282—286.

3) *Ibid.* art. 369, Exempl. II & I, pp. 286, 287; ср. стр. 147; ср. также *Nova Acta Acad. Sc. Imp. Petr. (Praec. Hist. Eiusd. Ac.)* ad ann. 1784, Petr. 1788: De Transformatione seriei divergentis $1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4$ etc. in Fractionem Continuam. Auctore *L. Eulero.* Conuent. exhib. d. 11 *Jan.* 1776. pp. 40—42: *Appendix.* De fractione continua Brounckeriana, гдѣ даны ряды и дроби для $\frac{4}{\pi}$ и $l2$. — Въ art. 369. *Introd.* Exempl. III, IV (pp. 287—288) Э. даетъ еще дроби для $\sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{m+in}$ и $\sum \frac{(-1)^i}{in-m} = \frac{\pi \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}}{n \operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}$. Въ art. 370 (pp. 288 — 290) превр. въ

Сверхъ того непрерывныя дроби составленныя изъ раціональныхъ звеньевъ даютъ непосредственно, съ помощью несложнаго алгориѳма, простѣйшія раціональныя дроби подходящія къ трансцендентнымъ и алгебрическимъ ирраціональнымъ величинамъ; Эйлеръ показалъ, одинъ изъ первыхъ, что радикалы второй степени выражаются періодическими непрерывными дробями, и что, обратно, эти послѣднія могутъ получаться только отъ разложенія корней квадратныхъ уравненій[1]).

Я нарочно останавливался на нѣкоторыхъ подробностяхъ Введенія, чтобы дать хотя бы слабое понятіе, не только о порядкѣ, въ которомъ авторъ развиваетъ свои идеи, и о сущ-

---

дробь рядъ $\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-$&c. и дается въ Exempl. I и II разлож. въ др. $\frac{1}{e}$ и *Cor 1*. Въ art. 371 превр. въ н. др. общ. рядъ $A - Bz + Cz^2 - Dz^3 +$&c. (pp. 290—292).—Въ IX томѣ *Comm. Ac. Sc. Im. P.* (ср. прим. 3 къ стр. 283) Эйлеръ разлаг. въ непр. др. e и $\sqrt{e}$ (§ 21, pp. 120, 121), $\frac{\sqrt[3]{e-1}}{2}$, $\frac{e^2-1}{2}$, $\frac{e+1}{e-1}$ (§ 22 pp. 121, 122), $\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1}$ (p. 132, § 30) и $e^{\frac{1}{s}}$ (pp. 131, 132, § 30).

[1]) *Introd.* art. 374—380, *Lab.* pp. 292—298, *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. IX §§ 18, 19, pp. 115—120. Суммованіе період. непр. дробей посредст. квадр. уравненій было дано *Н. Сондерсономъ* въ его «Началахъ Алгебры» опубл. въ 1740 г. т. е. за 4 года до выхода въ свѣтъ Эйлерова Мемуара; ср. прим. 3 на стр. 247.—Art. 381, 382 (pp. 298—304) *Introd.* посвящены прилож. н. др. къ Ариѳметикѣ — здѣсь даны разложенія приближ. значеній $\sqrt{2}$, $\frac{e-1}{2}$, π продолжит. въ доляхъ сутокъ средн. солнечн. года. Въ дополненіе къ этой элементарной теоріи н. др. см. еще двѣ статьи помѣщ. въ «*Leonhardi Euleri* Opuscula Analytica» t. II Petr. 1785: De transf. ser. in fr. cont. ubi haec theoria non mediocriter amplificatur, pp. 138—177 и Summatio fr. cont. cuius indices progr. arithm. constituunt, dum num. omn. sunt unitates etc. (въ доп. къ статьѣ о н. д. въ IX Т. *Comm. Ac. Sc. I. P.*), pp. 217—239. *I. H. Lambert.* Beyträge z. Gebrauche d. Mathematik und d. Anwendung. Zweyter Theil Erst. Abschn. Berl. 1770: III. Verwandlung d. Brüche, pp. 54—132; V. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification d. Circuls suchen. pp. 140—169.

ности этихъ идей, но и объ удивительномъ изяществѣ, простотѣ и силѣ его Аналитическаго Метода и той смѣлости и увѣренности, съ которыми онъ имъ пользуется. Это характерныя общія черты Эйлерова математическаго генія, которыя обращаютъ на себя вниманіе во всѣхъ его работахъ[1]).—Чтобы покончить съ первой книгой разобраннаго нами трактата, мнѣ остается еще упомянуть о двухъ ея главахъ XV и XVI[2]), которыя не содержатъ въ себѣ непосредственно дальнѣйшаго развитія ученія о функціяхъ: въ XV главѣ Эйлеръ разсматриваетъ ряды происходящіе изъ нѣкоторыхъ безконечныхъ произведеній, послѣдовательные множители которыхъ содержатъ въ себѣ всѣ послѣдовательныя *первоначальныя* числа—каждый по одному[3]); здѣсь даетъ онъ равенство: $\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum\frac{1}{n^s}$ $\left\{\begin{array}{l}p=2,3,5,7,11\ldots;\\ n=1,2,3,4,5,6,7,\ldots\end{array}\right\}$[4]), изъ котораго впослѣдствіи *Риманн* вывелъ *законъ простыхъ чиселъ*[5]). Въ XVI главѣ Эйлеръ го-

---

[1]) «... & l'on ne pourra s'empêcher de regarder comme l'ouvrage de *M. Euler*, la revolution, qui a rendu l'analyse algébrique une méthode lumineuse universelle, applicable à tout & même facile» *Condorcet*, 'Eloge de M. E. Inst. c. diff. Tic. 1787 p. XVII (t. I). Cp. *Hankel*. Die Entw. d. M. in d. letzt. J. pp. 16—17.

[2]) Cap. XV: О рядахъ происходящихъ отъ разложенія произведеній. art. 264—296, *Lab*. pp. 206-233; Cap. XVI: De partitione numerorum, *art*. 297—331, *Lab*. pp. 234—256. См. также Observ. An. v d. Combin. *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. XIII (1741—43) P. 1751 pp. 69 sqq.

[3]) *Introd*. art 274—295, pp. 210—233.

[4]) *Ibid*. art. 273, 274, p. 210

[5]) Ueber d. Anzahl der Primzahlen unter e. gegebenen Grösse. Monatsber. d. Berl Ak. Nov. 1859, *B. Riemann's* ges. math. Werke. Lpz. 1876, VII, pp. 136 — 144. Изслѣдованіе Риманновой аналитической функціи $\zeta(s) = \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum\frac{1}{n^s}$ послужило недавно предметомъ интересной работы: 'Etude sur les propr. des fonct. entières et en part. d'une f. considérée par Riemann; par M. *J. Hadamard*. Journ d. math. p. et a. 4-me sér t. 9, pp. 171 sqq.— Интересно замѣтить, что еще въ 1810 году *Бессель* писалъ Гауссу о законѣ простыхъ чиселъ: — «Wenn Meinungen in der Mathematik einiges

воритъ о разложеніи въ ряды безконечныхъ произведеній нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій: коеффиціенты разложеній даютъ рѣшеніе интересной задачи о раздѣленіи чиселъ (de partitione numerorum)[1]; въ этой теоріи можно видѣть, такимъ образомъ, приложеніе метода, оказавшагося впослѣдствіи столь полезнымъ при рѣшеніи другихъ числовыхъ вопросовъ —*метода производящихъ функцій*[2]).

Во второй книгѣ своего трактата Эйлеръ развиваетъ, разсматривая ихъ съ точки зрѣнія теоріи функцій, основныя идеи геометріи Декарта.

Gewicht hatten, so würde die meinige den Zusammenhang durch die bekannte Reihe $1+{}^1/_2+{}^1/_3+{}^1/_4+{}^1/_5+\text{etc.}=\frac{1}{(1-{}^1/_2)(1-{}^1/_3)(1-{}^1/_5)(1-{}^1/_7)(1-{}^1/_{11})(1-{}^1/_{13})}$ etc. suchen».

[1]) «... problema hoc non inelegans quod mihi a Viro clar. Naudaeo propositum ita se habet; «Definire, quot variis modis datus numerus produci queat ex additione aliquot numerorum integrorum inter se inaequalium; quorum numerus detur». «Observ. anal. de Comb. a *L. Eulero*, l. c. § 19 p. 79. Дальнѣйшее развитіе этой теоріи дано Эйлеромъ въ Nov. Comm. Ac Sc. I. P. t. III ad a. 1750 et 1751 P. 1753 De part. numerorum. pp. 125–169, *Summ.* pp. 15–18; *Nov. Comm.* t. XIV ad a. 1759, Pars prior P. 1770. De part. num. in partes tam numero quam specie datas. Auct. *L. Eulero*, pp. 168–187, *Summ.* pp. 20—22. —Берлинскій профессоръ *Phil. Naude*, математикъ и богословъ род. въ Метцѣ 1654 —ум. въ Берл. 1729.

[2]) Такъ $\Pi(1+x^i)$ есть производящая функція числа y_i, рѣшающаго вопросъ о томъ, quot variis modis numerus i produci q. ex a. a. n. i inter se inequalium (*Introd.* art. 325). Идея *теоріи производящихъ функцій* принадлежитъ *Лапласу*, который изложилъ ее впервые въ мемуарѣ *Sur les suites* представл. Парижск Ак. Н. въ 1779 году, а затѣмъ въ 1-ой части *Аналитической Теоріи вѣроятностей* въ 1812 г.; см. Hist. de l'Ac. R. d. S. Ann. 1779 Av. les Mém. de M. & de Ph. p la même a. Paris 1782 pp. 207 et suiv.— Théorie an. d. Prob. par *M. le Marquis de Laplace*. 3-e éd. rev. et augm. par l'auteur. Paris 1820 pp. 3- 87.—Ср. *Lacroix*. Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III, p. 466 *n.* о Ламбертовой функціи $\sum\frac{x^n}{1-x^n}$, производящей числа дѣлителей данн. чисел. (*Lambert.* Anlage z. Architectonik. Riga 1771).

«Перемѣнное количество», говоритъ онъ, «есть величина, разсматриваемая во всей своей общности, заключающая въ себѣ всѣ опредѣленныя значенія; — въ геометріи неопредѣленная прямая, на которой можно брать какія угодно части, имѣющія определенную величину, даетъ нашему уму тоже представленіе о величинѣ, какъ и перемѣнное количество, по скольку оно остается вещественнымъ, и потому можетъ хорошо служить для его изображенія. Опредѣленные отрѣзки прямой или *абсциссы*, считаемые отъ данной начальной точки, представляютъ пропорціальныя имъ опредѣленныя вещественныя величины, заключенныя въ перемѣнномъ количествѣ x» [1]). Каждому значенію перемѣннаго соотвѣтствуетъ одно положеніе конечной точки отрѣзка, и наоборотъ, каждому положенію этой точки отвѣчаетъ одна опредѣленная величина перемѣнной. Росту или убыли перемѣнной соотвѣтствуетъ ростъ или убыль отрѣзка: прибавленію положительныхъ или отрицательныхъ величинъ въ анализѣ соотвѣтствуетъ въ геометріи передвиженіе конечной точки отрѣзка, изображающаго слагающуюся съ ними величину, — въ ту или другую сторону; чистыя отрицательныя величины представляются поэтому отрѣзками, растущими отъ общей начальной точки въ сторону противоположную направленію роста абсолютныхъ или положительныхъ величинъ [2]).

Такъ какъ функція перемѣннаго x есть сама перемѣнное количество — y —, то и ее можно изобразить геометрически отрѣзками прямой. Чтобы связать между собою изображенія функціи съ изображеніями перемѣнной, отрѣзки представляющіе значенія функціи y прикладываются къ конечнымъ точкамъ соотвѣтствующихъ абсциссъ перпендикулярно къ линіи или *оси* x-въ въ ту или другую ея сторону смотря по тому, положительны они или отрицательны. Конечныя точки *приложенныхъ* ли-

---

1) *Introd.* Lib. II, Cap. I, art. 1, 2, *Lab.* pp. 1—2.
2) *Ibid.* art. 3, p. 2.

ній[1]) даютъ такимъ образомъ геометрическое мѣсто или кривую, характеризующую конкретно взаимную зависимость совмѣстныхъ вещественныхъ значеній двухъ перемѣнныхъ связанныхъ даннымъ аналитическимъ уравненіемъ[2].

«Многія кривыя линіи», говоритъ Эйлеръ, «можно описать непрерывнымъ движеніемъ точки, представляющимъ наглядно кривую линію во всей ея полнотѣ; мы будемъ однако, разсматривать кривыя главнымъ образомъ какъ происходящія отъ изображенія функцій; эта точка зрѣнія—и болѣе общая и болѣе пригодна для изученія кривыхъ путемъ аналитическаго исчисленія»[3]). Произвольно данная кривая линія можетъ всегда быть разсматриваема какъ изображающая извѣстную зависимость между двумя перемѣнными, и слѣдовательно всегда можно разсматривать *приложенную* линію или ординату какъ нѣкоторую функцію (въ общемъ значеніи этого слова) отъ *абсциссы*. Но не всякая линія изображаетъ на всемъ своемъ протяженіи одну и туже *аналитическую* функцію; кривыя обладающія этимъ свойствомъ Эйлеръ называетъ *непрерывными* (l. continuae)»[4]). «Въ геометріи идетъ рѣчь главнымъ образомъ о непрерывныхъ кривыхъ, и можно показать, что кривыя описанныя механически однообразнымъ движеніемъ по извѣстному постоянному закону,

---

[1]) Эйлеръ употребляетъ всегда терминъ «applicata» для обозначенія одной изъ кординатъ; «ординатами» или «хордами» онъ называетъ прямыя стягивающія дуги кривыхъ, ср. *Lab.* t. II p. 5 *n*.

[2]) *Introd.* Lib. II, art. 4—7, 11, 12, *Lab.* pp. 2—4, 5—6. — Интересно сравнить Эйлерово изложеніе принципа координатъ съ теоріей средневѣковыхъ математиковъ къ которой оно ближе всего подходитъ; см. напр. въ статьѣ *Curtze* въ Zeitschr. f. M. & Ph. Jahrg. 13, 1868, Suppl. pp. 94, 95 положенія *Н. Орема* (ср. стр. 95): De latitudine formarum magistri Nicolaï Horen. P. 2. Latitudo per figuras geometricas, Cap. 2. Supposita (Thorn, Gymnasialbiblthk Handschr. R. 4° 2. pp. 198—206; ср. D. math. Schr. des N. O. v. Max. *Curtze*. Berl. 1870, pp. 9—13; *M. Cantor*. Gesch. d. M. t. II, Lpz. 1892, pp. 111, 117—120; о Лейбницѣ и схоласт. матем. см. *ll. c.* въ прим. 2 къ стран. 225.

[3]) *Introd.* Lib. II art. 8, *Lab.* p. 4.

[4]) *Ibid.* art. 9. Ср. *ll. c.* въ прим. 3 на стр. 259.

могутъ быть выражены одной функціей и поэтому непрерывны»[1]) — Сообразно съ двоякимъ раздѣленіемъ выражающихъ ихъ функцій непрерывныя линіи бываютъ *алгебрическими* и *трансцендентными*:[2]) при измѣненіи положенія оси x—въ относительно неподвижной кривой, изображаемая ею функція мѣняетъ свою форму или даже уступаетъ мѣсто другой функціи; каждая кривая изображаетъ такимъ образомъ безчисленное множество функцій y, которыя всѣ могутъ быть получены со своими перемѣнными x изъ одной пары x_1, y_1 посредствомъ группы простыхъ линейныхъ замѣщеній съ детерминантомъ 1; алгебрическая функція при этомъ не можетъ перейти въ трансцендентную и наоборотъ: кромѣ того, степень уравненія опредѣляющаго алгебрическую функцію не измѣняется и показатель ея можетъ поэтому характеризовать въ извѣстной мѣрѣ *геометрическую* природу алгебрической кривой[3]); онъ выражаетъ принадлежность ея къ тому или другому *порядку*. Линіи перваго порядка—*прямыя*[4]). Линіи высшихъ порядковъ выражаются *вообще* многозначными функціями и, сообразно съ этимъ, состоятъ изъ нѣсколькихъ вѣтвей входящихъ другъ въ друга, или не имѣющихъ между собою вещественной связи; изученіе этихъ вѣтвей, ихъ хода и

---

[1]) *Introd.* art. 10, *Lab.* p. 4. — См. исторію вопроса о механич. описаніи кривыхъ у *Шаля*: Aperçu histor. pp. 100 — 101, 145, 146, 150, 151, 336; главнѣйшія относ. сюда сочиненія: *Cavalieri*. Exercit. geom. 1647, Exerc. 6, *J. De Witt*. Elementa curvarum linearum. *Ed. F. a Schooten*. Amst. 1683, также въ прил. къ Геом. Декарта ed. F. a Sch. 1683, II pp. 159—340, *I. Newton*. Enum. lin. 3 ord., VI. De curv. descr. organicâ. *Cast.* t. I pp. 265 sqq. *C. Maclaurin*. Geometria organica sive descriptio lineanum curvarum universalis. Lond. 1720. *Braikenridge*. Exercitatio Geometriae de descriptione lin. curvarum. 1733; также *Phil. Trans*. 1735.

[2]) *Introd.* L. II, art. 15, *Lab.* pp. 6 — 7; ср. *Newton*. Enum. *Linearum ordines*, l. c. p. 248, *Leibniz*. стр. 184.

[3]) *Introd.* L. II, art. 46; Cap. II: о преобразованіи координатъ, art. 23—46, *Lab.* pp. 10—22; Cap. III: О раздѣленіи алгебрическихъ кривыхъ линій на порядки, art. 47 sqq., pp. 22 sqq.

[4]) *Ibid.* art. 52, 53, pp. 24, 25, *Newt.* l. c. 247; ср. стр. 125. О линіяхъ *составныхъ* см. *Intr.* art. 61—65, pp. 28—31, ср. art. 95 L. I и прим. 6 къ стр. 267.

расположенія, ихъ пересѣченій съ другими линіями и соприкосновенія съ простѣйшими линіями въ безконечности или на безконечно-маломъ протяженіи — въ зависимости отъ различнаго вида уравненія кривой — приводитъ къ открытію замѣчательныхъ характерныхъ свойствъ непрерывныхъ и правильныхъ кривыхъ, отличающихъ ихъ отъ линій неправильныхъ и прерывныхъ [1]).

---

[1]) *Introd.* L. II. art. 22, *Lab.* p. 10; см. *ibid.* art. 16—22, pp. 7—10, Cap. IV: о главныхъ свойствахъ каждаго порядка кривыхъ линій, art. 66—84, pp. 31—39—(объ опредѣленіяхъ крив. данн. пор. проход. черезъ данн. точки) Cap. V: о крив. 2-го пор. art. 85—130 и Cap. VI: о подраздѣл. кр. 2-го п. на роды, art. 131—165, pp. 39—79, Cap. VII — о розысканіи безконечныхъ вѣтвей, art 166—197, Cap. VIII—объ асимптотахъ, art. 198—218, pp. 79—108, Cap. IX — о подраздѣленіи крив. 3-го пор. на виды (species), art. 219—238, Cap. IX — о главныхъ свойствахъ кр. 3-го пор., art. 239—259, pp. 108 — 133 (16 видовъ кр. 3-го пор. соотвѣтств. 72 видамъ Ньютона; Эйлеръ разл. 4 главн. случая: когда въ высш. однор. членѣ у-ія, 1) одинъ вещ. лин. множ., 2) всѣ 3 множ. вещ., 3) два множ. равны м. с., 4) всѣ три множ. равны м. соб.; сообразно съ этимъ получаются виды: 1) 1в.:—одна асимптота природа кот. опред. ур. $u=\frac{A}{t}$, 2в.:—1 асимпт. $u=\frac{A}{tt}$; 2) 3 видъ: 3 асимпт. $u=\frac{A}{t}$, 4в.:—2 ас. $u=\frac{A}{t}$, одна $u=\frac{A}{tt}$, 5в.:—3 ас. $u=\frac{A}{tt}$; 3) 6в.:—1 ас. $u=\frac{A}{t}$, и одна $uu=At$, 7в.:—1 ас. $u=\frac{A}{tt}$ и одна параболическая вида $uu=At$, 8в.:—1 ас. вида $u=\frac{A}{t}$, 9в.—1 ас. $u=\frac{A}{tt}$, 10в.:—1 ас. $u=\frac{A}{t}$ и 2 друг. паралл. м. с. $u=\frac{A}{t}$, 11в.:—1 ас. $u=\frac{A}{tt}$ и 2 паралл. м. с. вида $u=\frac{A}{t}$, 12в.:—1 ас. $u=\frac{A}{t}$, и одна вида $uu=\frac{A}{t}$, 13в.:—1 ас. $u=\frac{A}{tt}$ и другая $uu=\frac{A}{t}$, 4) 14в.:—одна единств. ас. параболическая вида $u^3=Att$, 15в.: — 1 пар. ас. $uu=At$ и одна прямолинейная вида $u=\frac{A}{t}$ и ось параболы параллельна прямолинейной асимптотѣ, 16в.: одна ас. парабол. вида $u^3=At$), Cap. XI: о линіяхъ 4 пор., art. 260—271, pp. 133—144 (146 родовъ кр. 4 пор.), Cap. XII—о фигурѣ кривыхъ линій, art. 272—284, Cap. XIII—о свойствахъ кривыхъ линій art. 285—303, pp. 145—161 (art. 282—перес. вѣтвей, кратныя точки, art. 288 sqq.—касательныя, art. 296—сопряж. точка) Cap. XIV —О кривизнѣ кр. лин., art. 304—335, pp. 162 — 177, Cap. XV—о крив. имѣющ. одинъ или нѣск. діаметровъ, art. 336 — 363, pp. 178 — 191, Cap.

Таковы основныя положенія второй книги Эйлерова Введенія, представляющей изъ себя *первую* полную систему настоящей *Аналитической Геометріи*. — Въ приложеніи къ Введенію, Эйлеръ распространилъ эти положенія на геометрію трехъ измѣреній и изслѣдовалъ впервые уравненіе съ тремя перемѣнными, выражающее собою кривыя поверхности втораго порядка [1]).

Послѣ Декарта, открывшаго путь къ систематическому приложенію алгебрическаго анализа къ геометріи [2]), *Валлиса* и *Лопиталя*, которые изложили Аналитическую Геометрію коническихъ сѣченій [3]), первый значительный шагъ въ этой области былъ сдѣланъ безсмертнымъ Ньютономъ. Въ 1704 году онъ издалъ, въ прибавленіи къ своей «Оптикѣ», небольшой трактатъ: «Enumeratio Linearum Tertii Ordinis» [4]), гдѣ изложилъ принципы классификаціи алгебрическихъ кривыхъ вообще

XVI—о спос. нахожд. крив. по нѣкот. свойств. ординатъ, art. 364—390, Cap. XVII—о спос. нах. крив. по друг. свойствамъ, art. 391 — 434, pp. 191—232 (art. 392 sqq.—полярныя координаты, 416, 417—конхоиды), Cap. XVII—о подобіи и родствѣ крив. линій, art. 435—456, pp. 232—244 (art. 437—параметры) Cap. XIX—о пересѣченіи кривыхъ, art. 457 — 485, Cap. XX—о построеніи уравненій, art. 486—505, pp. 245—286 (art. 483—485—изложеніе знаменитаго Эйлерова способа исключенія неизв. изъ двухъ уравненій).

[1]) *Introd.* L. II.—Краткій трактатъ о поверхностяхъ Cap. I, II — о пов. вообще, Cap. III о цилиндр., конич. и сфер. сѣчен., Cap. IV—о преоб. коорд., Cap. V—о кр. пов. 2-го пор., Cap. VI — о пересѣч. 2 поверхн.. *Lab.* t. II pp. 325 — 403; ср. стр. 289. *Introd.* L. II art. 8. *Chasles* Ap. h. pp. 152—153.

[2]) См. стр. 120 и слѣд.

[3]) *Wallis.* Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis, Op. math. t. I pp. 291—354, ср. *Cantor.* Vorl. t. II, p. 748, *Chasles.* Ap. h. p. 126. *L'Hospital.* Traité analytique des sections coniques. 1707 (посмертное изд.); ср. *Chasles.* Ap. h. pp. 127, 171.

[4]) *Opusc.* ed. Cast. t. I op. IV, pp. 247—270; ср. *ibid.* Praefat. p. VII, *Chasles.* Ap. h. pp. 144—146, *Marie.* H. d. sc. m. t. V, pp. 219—225: «Cet ouvrage de Newton est parfait; il devrait être classique et est à peine connu». *Ibid.* p. 219.

и приложеніе ихъ къ кривымъ третьяго порядка[1]). Въ 1840 году аббатъ *De Gua de Malves*, слѣдуя за Ньютономъ приложилъ Анализъ Декарта къ алгебрическимъ кривымъ всѣхъ порядковъ[2]). Эйлеръ, съ своей стороны, далъ во «Введеніи» полную классификацію кривыхъ второй, третьей и четвертой степеней и изложилъ основанія для изученія всѣхъ алгебрическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ независимо отъ методовъ аббата De Gua и безъ посредства высшаго анализа[3]). Наконецъ, въ 1750 году *Gabriel Cramer* посвятилъ теоріи алгебрическихъ кривыхъ особое, замѣчательное сочиненіе[4]), послужившее главнымъ основаніемъ всѣхъ позднѣйшихъ изысканій въ этой важной области Геометріи[5]).

Главнымъ предметомъ теоріи алгебрическихъ кривыхъ служитъ, по мысли Ньютона, изученіе ихъ особенныхъ точекъ и прежде всего—безконечно-удаленныхъ (если такія точки суще-

---

[1]) О сочиненіяхъ которыя были написаны въ дополненіе и объясненіе Ньютонова трактата (*Stirling*, *Maclaurin*, *Nicole*, *Bragelogne*) см. Castillon l. c., *Chasles*, Ap. h. pp. 145 suiv., 151—152. Вообще объ Исторіи ученія о кривыхъ линіяхъ въ разсм. эпоху см. въ особенности *Montucla* H. d. M. t. III pp. 63—102, Part. V Livre I, VIII.

[2]) *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres.* Paris 1740. О De Gua (1712—1722) см. *Marie*. H. d. sc. m. t. VIII, pp. 136—138. Ср. *Chasles* Ap. h. p. 152; методъ De Gua былъ смѣшанный, насколько можно судить по словамъ Шаля; къ сожалѣнію мнѣ не удалось самому видѣть книги De Gua.

[3]) Кромѣ Введенія Эйлеръ посвятилъ общей теоріи кривыхъ только два мемуара помѣщенныхъ въ *Mém. de l'Ac. r. d. sc. de Berlin*, t. IV 1748, pp. 219 sqq., 234 sqq.: Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes (о числѣ точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ одного и того же порядка) и Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper (ср. *ibid.* t. XX, 1764: Nouvelle méthode d éliminer les quantités inconnues des équations, p. 91).

[4]) Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques par *Gabriel Cramer*. A Genève, MDCCL. О Крамерѣ (1704--1752) см. *Marie* H. d. M. t. VIII pp. 37—39.

[5]) *Chasles*. Ap. h. p. 153. *G. Salmon*. Higher plane curves, art. 55 [Traité de géom. anal. (courbes planes) etc. o. trad. de l'angl par *O. Chemin*, Paris 1884, p. 61].

ствують на кривой), въ которыхъ хотя бы одна изъ прямолинейныхъ координатъ безконечно велика. Если кривая имѣетъ безконечную вѣтвь, то нужно различать два случая: направленіе этой вѣтви при удаленіи въ безконечность можетъ не имѣть предѣла или можетъ стремиться къ опредѣленному предѣльному направленію. Въ первомъ случаѣ безконечная вѣтвь кривой—*параболическая* [1]), во второмъ—у разсматриваемой линіи есть прямолинейная *асимптота* и мы имѣемъ дѣло, по выраженію Ньютона, съ *гиперболической* вѣтвью кривой. Чтобы еще ближе опредѣлить природу безконечной вѣтви нужно найти ближе всего подходящую къ ней *асимптоту*—простѣйшаго вида гиперболическую или параболическую кривую, имѣющую съ данной вѣтвью въ безконечно-удаленной точкѣ соприкосновеніе наивысшаго порядка [2]). Такого рода сравненіе кривой съ простѣйшими важно не только при изученіи ея безконечныхъ вѣтвей: оно даетъ наилучшее представленіе о ходѣ ея въ отдѣльныхъ нормальныхъ частяхъ и доставляетъ средства для изученія ея характера вблизи конечныхъ особенныхъ точекъ [3]). Въ анали-

---

[1]) См. *Newton*. Enum. II, 5. *De Cruribus Hyperbolicis, & Parabolicis, & eorum plagis*, Op. I, p. 250. «Parabolam quoque *convegrentem, divergentem, cruribus contrariis praeditam, cruciformem* (т. е. quae coniugatam decussat), nodatam (т. е. quae seipsam decussat in orbem redeundo), *cuspidatam* (т. е. cuius partes duae in Angulo contactus concurruut et ibi terminantur) *punctatam* (т. е. quae conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id est, Punctum) & *puram* (т. е. лишенн. овала, узла, заостренія и сопр. точки) nominabimus». *Ibid*. III, *Nomina formarum*, p. 253. *Cramer*. Introd. Chap. VIII, *Des branches infinies des Courbes*, art. 123—129, pp. 223—230.

[2]) *Newton* l. c. pp. 250. 252—253; гиперболы 3-го порядка бываютъ тѣхъ же формъ какъ и параболы и еще *inscriptae, circumscrptae, cruribus contrariis praeditae, conchoidales, anguineae*, смотря потому какъ онѣ расположены по отношенію къ своимъ прямол. ассимптотамъ. *Cramer*. l. c. art 118 — 122, pp. 219 — 223; ср. еще прим. 1 на стр. 291. О криволинейныхъ ассимптотахъ см. *Euler*. Introd. L. II art. 218, pp. 107—108; *Cramer*. l. c. art. 132—134, pp. 232—237; а также ниже о теоріи ан. ф. Лагранжа.

[3]) Ср. *Chasles* l. c. въ прим. 2 на стр. 293. (De Gua). Нѣкоторыя особенныя точки изслѣдованы уже Лопиталемъ: см. *Anal. de inf. p.* pp. 42, 43, 59 (Déf. II p. d'inflexion et de rebroussement), 60 suiv., 102, 103, 165—166, *Varignon*. Eclairciss. pp. 30—34, 39 suiv., 58, 59, 94; ср. *Euler*.

тической геометріи этотъ методъ сравненія приводитъ къ замѣнѣ данной аналитической функціи, вблизи извѣстнаго значенія перемѣнной, другой, подходящей къ ней функціей простѣйшаго вида [1]); такой методъ изученія кривой имѣетъ то преимущество, что функція эта, опредѣляя *аналитическій* характеръ кривой въ данной области, выражаетъ такія его черты, которыя иногда остаются невидимыми въ дѣйствительной линіи, но позволяютъ соединять въ одну группу особенности различнаго конкретнаго характера [2]). Подходящую функцію можно

Introd. L. II art. 319 (точк. перег.), art. 332, 333 (точки возврата); о Лопиталевыхъ точкахъ возврата 2-го рода, возможность существованія которыхъ отрицалъ De Gua, см. кромѣ art. 333 *Intr.* L. II. Эйлера еще его замѣтку въ *Mém. de Berlin* t. V 1749: Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de Mr. le Marquis de l'Hôpital, p. 203, также *D'Alembert.* t. II *ibid.* 1746, p. 186, *Cramer.* Intr. pp. 572 suiv. — Теорія всѣхъ особенныхъ точекъ алг. кривыхъ вообще и кратныхъ точекъ въ особенности подробно развита у Крамера: Ch. X. *Des points singuliers: Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpentement*, pp. 400 — 459, Ch. XI. *De la Méthode des tangentes. Des Points d'Inflexion &c.*, pp. 460—538, Ch. XII. *De la Courbure des L. c. en leurs diff. Points*, art. 211 suiv. pp. 548 suiv. Ch. XIII. *Des diff. espèces de Points mult. dont peuvent être susceptibles les Courbes des six prem. ordres*, pp. 568—655. О касат. и кривизнѣ см. соотв. главы Введеній Эйлера и Крамера.

[1]) Этотъ методъ, творцомъ котораго безъ всякаго сомнѣнія слѣдуетъ считать Ньютона (Sibi gratulentur mortales, tale tantumque extitisse humani generis decus!) является основнымъ въ огромномъ числѣ математическихъ вопросовъ; значеніе его въ теоріи функцій уже настолько испытано и такъ велико, что мнѣ кажется, что я не ошибаюсь, полагая что отъ систематическаго примѣненія этого метода слѣдуетъ ожидать главнымъ образомъ успѣховъ въ основаніяхъ этой теоріи. Намъ придется еще не разъ возвращаться къ этому важному замѣчанію.

[2]) Таковы напримѣръ невидимыя кратныя или сопряженныя точки и точки невидимаго перегиба или перегиба четной степени: «L'Inflexion ne paroit plus», говоритъ объ этихъ послѣднихъ *Cramer*, «quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, & qu'elle soit sensible à l'Analyse, dont la vuë, si l'on ose parler ainsi, est plus perçante que la nôtre». *Introd.* art. 164, p. 403. Точки невид. перг. были впервые изслѣдованы *Maupertuis*, который называлъ ихъ *points de Serpentement* (*Mém de l'Ac. r. d. Sc. de P.* 1729, p. 277 suiv.: Sur quelques affections des courbes). См. подробн. у *Клюгеля—Грунерта.* Math. Wört. Erst. — Abth. V Th. II Bd. Ст. Vielfacher Punkt, pp. 853 — 869. О сопр. точк. см. напр. *Cramer* l. c. pp. 453—454, 568, 580—581.

найти, выдѣливъ тѣ части или члены данной функціи, которые, для извѣстной области значеній перемѣннаго, играютъ *преобладающую* роль въ предложенномъ вопросѣ; такое выдѣленіе приходится дѣлать, смотря по обстоятельствамъ, посредствомъ разложеній въ ряды, посредствомъ механическихъ пріемовъ подобныхъ Ньютонову параллелограмму или другихъ эквивалентныхъ методовъ [1]).

За алгебрическими кривыми слѣдуетъ, въ системѣ Эйлера, разсмотрѣніе кривыхъ трансцендентныхъ [2]).

Если соотношеніе между абсциссами и ординатами точекъ кривой не можетъ быть выражено алгебрически, то кривая *трансцендентна* и ордината есть трасцендентная функція абсциссы. Разсмотрѣнныя въ первой части Введенія трансцендентныя функціи выражаютъ нѣкоторые простѣйшіе частные виды кривыхъ; анализъ безконечно-малыхъ даетъ общій способъ подробнаго изслѣдованія такихъ линій и доставляетъ новые виды ихъ, гораздо болѣе многочисленные чѣмъ кривыя алгебрическія [3]).

Какъ бы среднее положеніе между алгебрическими и трансцендентными линіями занимаютъ, по своему происхожденію, Лейбницевы *интерсцендентныя* кривыя [4]). Такова кривая, урав-

---

[1]) Ср. стр. 216—218. За подробной и полной исторіей этого предмета я отсылаю читателя къ интересной статьѣ *С. Гюнтера*: Das Newton'sche Parallelogram und die Cramer-Puiseux'sche Regel. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionstheorie. См. Vermischte Untersuchungen z. Gesch. d. mathem. Wissenschaften v. Dr. *Siegmund Günther*. Lpz. 1876, Kapitel III, pp. (136)—187.

[2]) *Introd.* Lib. II Cap. XXI — о кривыхъ линіяхъ трансцендентныхъ, art. 506—528, *Lab.* t. II, pp. 306 — 307. Послѣдняя, XXII глава Введенія имѣетъ предметомъ рѣшеніе нѣкоторыхъ трансц. уравненій: Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ относящихся къ Кругу, art. 529 — 539, pp. 307 — 324 ($s = Cos.\ s$, $s = Sin.\ 2s$, $u = Sin\,(60^0 - u)$, $180^0 - s = 2\sqrt{2}.\ Cos.\ \frac{1}{2}s.\ Cos\,(45 - \frac{1}{2}s)$, $2s = tang s$, $s\ Sin.\ \frac{1}{2}s = 1$ — всѣ эти у-ія рѣшаются по способу *ложнаго положенія*; $s = tang.\ s.$ — посредств. разлож. $arctg\,x$ въ б. рядъ).

[3]) *Introd.* L. II art. 507, p. 287.

[4]) Ср. стр. 252.

неніе которой есть $y=x^{\sqrt{2}}$; уравненіе это не можетъ быть обращено въ алгебрическое, такъ какъ показатель $\sqrt{2}$ выражается дробью съ безконечно-большими числителемъ и знаменателемъ; къ этому нужно прибавить, что оно представляетъ собою двойную кривую, вслѣдствіе двойнаго значенія радикала. Но кривую эту можно построить съ помощью логариѳмовъ, ибо $ly=\sqrt{2}.\ lx$, такъ что ее слѣдуетъ причислить къ классу логариѳмическихъ трансцендентныхъ линій [1]). Къ трасцендентнымъ же линіямъ принадлежатъ и тѣ, уравненія которыхъ содержатъ мнимые показатели, напримѣръ кривая, выражаемая уравненіемъ $2y=x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}}$, ибо оно эквивалентно такому: $y=Cos.\ A.\ lx$ и легко можетъ быть построена помощью логариѳмовъ [2]).

Обыкновенная *логариѳмика,* въ которой ариѳметической прогрессіи абсциссъ соотвѣтствуетъ геометрическая прогрессія ординатъ, и уравненіе которой есть: $x=b.\ l.\ \frac{y}{a}$, представляетъ собою простѣйшій примѣръ трансцендентной линіи [3]). Самое замѣчательное свойство ея состоитъ въ томъ, что она удовлетворяетъ требованію задачи де Бона,—ея подкасательная есть постоянная величина. Въ самомъ дѣлѣ: $y=ae^{\frac{x}{b}}$, сосѣдняя ордината $y'=ae^{\frac{x}{b}}.\ e^{\frac{u}{b}}$, гдѣ u безконечно-мало; $y'-y=ae^{\frac{x}{b}}\left(e^{\frac{u}{b}}-1\right)$, и слѣдовательно подкасательная$=\frac{u}{e^{\frac{u}{b}}-1}$, при $u=o$; разлагая $e^{\frac{u}{b}}$ въ рядъ и полагая, послѣ необходимыхъ сокращеній $u=o$, мы и найдемъ, что постоянная b есть

1) *Introd.* Lib. II, art. 509 510, pp. 288—289.

2) *Ibid.* art. 511, pp. 289—290, ср. стр. 276 прим. 1.

3) Ср. прим. 1 на стр. 211, также *Klügel.* III Th.: Logarithmische Linie. См. еще *Newt. Princ.* T. II, pp. 7—16, NN. 31-46.... de Logarithmicae proprietatibus.... p. 15, b. 46. *Scholium.*

искомая длина подкасательной[1]). Вся кривая состоитъ изъ *одной вѣтви*, приближающейся асимптотически къ оси, и этимъ существенно отличается отъ алгебрическихъ линій, въ которыхъ всегда *двѣ вѣтви* приближаются къ одной асимптотѣ: такъ какъ логариѳмы отрицательныхъ чиселъ суть мнимыя количества, то наша кривая повидимому не должна существовать въ области отрицательныхъ значеній ординаты y[2]). Однако тутъ мы встрѣчаемся съ нѣкоторой особенностью логариѳмики, которая можетъ показаться парадоксомъ и заслуживаетъ поэтому обстоятельнаго разъясненія: каждый разъ какъ въ уравненіи ея

$$y=ae^{\frac{x}{b}}, \frac{x}{b}$$ дѣлается дробью съ четнымъ знаменателемъ, ордината y пріобрѣтаетъ два значенія, одно положительное, другое отрицательное, равныя по абсолютной величинѣ. «Отсюда слѣдуетъ, что логариѳмика будетъ имѣть подъ асимптотой безчисленное множество точекъ отдѣленныхъ одна отъ другой, которыя не составляютъ непрерывной кривой, на которыя, будучи безконечно близкими другъ къ другу, имѣютъ видъ такой кривой;—парадоксъ который не имѣетъ мѣста въ алгебрическихъ кривыхъ»[3]). Это замѣчаніе даетъ Эйлеру случай сдѣлать небольшое отступленіе о другихъ, «еще болѣе удивительныхъ» свойствахъ логариѳмической функціи. «Логариѳмы отрицательныхъ чиселъ», говоритъ Эйлеръ, «мнимы; (что очевидно само

---

[1]) *Introd.* L. II, art. 512—514, *Lab.* pp. 290—292; ср. стр. 177 прим. 2. *Joh. Bern.* Op. t. I pp. 145—148 (Act. Er. 1696 p. 82).

[2]) *Introd.* L. II, art. 513, p. 291, art. 515 pp. 292—293.

[3]) *Ibid.* art 515, p. 293. *Даламбертъ* воспользовался этимъ парадоксомъ въ своемъ спорѣ съ Эйлеромъ о логар. отриц. величинъ; см. Opuscules mathématiques &c. par M. *d'Alembert*, T. I, Paris 1761, Op. VI. pp. 184, 191—192. *De Foncenex* думалъ доказать существованіе 2-ой вѣтви логариѳмики, обнаруживъ, что развертка ея есть алгебрич. кривая $z^2=\frac{4u \cdot 4u^2-1}{1-u}$, имѣющая двѣ веществ. подобныя вѣтви, расположенныя симметрично по обѣ стороны оси; см. *Mélanges de phil. et de math. de la Soc. R. de Turin* (*Misc. Taur.* t. II) p. 1. a. 1760—1761; 'Eclaircissements pour le Mém. sur. l q. imag. ins. dans le prem. vol., p. 342. — Мы еще вернемся къ этому вопросу, при изложеніи исторіи спора о логар. отр. вел.

по себѣ; и что есть къ тому же слѣдствіе того, что отношеніе log.—1 къ $\sqrt{-1}$—конечное отношеніе) слѣдовательно $l.-n$ есть мнимое количество, которое я полагаю $= i$, ... откуда $l.(-n)^2 = l.\, n^2 = 2i$; но кромѣ того $log.\ n^2$ есть вещественное количество $= 2.\ l.\ n$. Отсюда слѣдовало бы, что и вещественное количество $l.\ n$ и мнимое i — половины одной и той же вещественноя величины $l.\ n^2$, и нужно было бы вывести то заключеніе, что каждое число имѣетъ двоякаго рода половины: одну вещественную, а другую мнимую, равнымъ образомъ три различныхъ трети, четыре различныхъ четверти и т. д....... Допустивъ это мы найдемъ, что половина числа a есть равнымъ образомъ $\frac{a}{2} + l.-1$ и $\frac{a}{2}$.... Замѣтимъ при этомъ, что $+l.-1 = -l.-1$, хотя $l.-1$ не$=0$; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $-1 = \frac{+1}{-1}$, то $l-1 = l.+1 - l.-1 = \ldots\ldots = -l.-1$. Подобнымъ же образомъ..... трояка го рода трети одной и той же величины a будутъ $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3} + l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ и $\frac{a}{3} + l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;.....

«Чтобы выяснить эти предложенія, которыя кажутся совершенно недопустимыми», и «которыя трудно примирить съ обычными понятіями о количествахъ,»[1]) «нужно установить другой парадоксъ, а именно тотъ, что всякое число имѣетъ безчислен-

---

[1]) *Introd.* T. II, art. 515, 516, *Lab.* pp. 293 — 294 — допущеніе вещественности логариѳм. отр. кол. дѣлаетъ такимъ образомъ дѣленіе многозначнымъ дѣйствіемъ; ср. прим. 1 на стр. 214. Интересно сопоставить съ этими разсужденіями колебанія въ ученіи объ аналитическихъ величинахъ у Кардана; ср. стр. 111, 112; «Ex hoc etiam patet», говоритъ Карданъ, «quod .. diviso m : per m : exit m : & p : quia ex m : in p : & m : fit m : igitur diviso eo producto, quod est m : exit alterutrum, scilicet p : uel m : Diviso autem p : per m : nihil exit,....» *Hieronymi Cardani* de Aliza regula, Libellus &c. Bas. 1570, Cap. XXII.—De contemplatione p : & m : & quod m : in m : facit m : & de causis horum iuxta veritatem. *Corm* 2. p. 46.

ное множество логариѳмовъ, между которыми только одинъ вещественный. Такимъ образомъ, хотя логариѳмъ единицы$=0$, она имѣетъ еще безконечное число другихъ логариѳмовъ, именно $2l. -1$, $3l.\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $4l.-1$ и $4l.\pm\sqrt{-1}$, а также безчисленное множество другихъ, которые доставляетъ намъ извлеченіе корней. Это мнѣніе гораздо правдоподобнѣе предъидущаго; ибо полагая $x=l.\ a$, мы будемъ имѣть ... $a=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\&c.$; и такъ какъ число измѣреній этого уравненія безконечно велико, то и не удивительно, что x имѣетъ также безчисленное множество корней»[1]). Изъ этого простаго, но глубокаго замѣчанія не трудно было вывести правильную и полную теорію логариѳмовъ. Эйлеръ развилъ эту теорію въ своемъ знаменитомъ Мемуарѣ о логариѳмахъ отрицательныхъ и мнимыхъ чиселъ, опубликованномъ въ 1749 году въ V-мъ томѣ Записокъ Берлинской Академіи Наукъ[2]). Вотъ какъ разсуждаетъ онъ въ этомъ Мемуарѣ:[3])

Извѣстно, что для гиперболическаго логариѳма, при безконечно большомъ n существуетъ равенство $l.x=nx^{\frac{1}{n}}-n$,[4]) опредѣливъ въ которомъ все безчисленное множество значеній корня $x^{\frac{1}{n}}$, мы найдемъ и всѣ соотвѣтствующія значенія лога-

---

[1]) *Introd.* L. II, art. 516, p. 294; ср. замѣчаніе И. Бернулли цит. въ прим. на стр. .

[2]) *Mémoires de l'Ac. R. d. Sc. de Berlin*, t. V, Ann. 1749: De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires.

[3]) Не имѣя подъ рукою мемуаровъ Берл. Ак. я излагаю теорію Эйлера слѣдуя *de Foncenex* (Reflexions sus les quantités imaginaires par M. le Chev. Daviet de Foncenex, art. 8, Miscellanea Phil-math. Soc. privatae Taurinensis T. I Aug. Taur. 1759, pp. 125—127); я пользовался также диссертаціей *Карстена*, трактатомъ *Феррони* и др. сочиненіями, о которыхъ я буду говорить ниже.

[4]) Ср. стр. 272.

риѳма. Предположимъ сначала, что x положительная величина и замѣтимъ, что $x = 1 \times x$, откуда, обозначая черезъ X табличный логариѳмъ отъ x, мы получимъ $l\,x = l.1 + X$, такъ что остается лишь найти всѣ значенія $l.1$, т. е. рѣшить уравненіе $n(1^{\frac{1}{n}} - 1) = y$, или $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$; корни этого уравненія опредѣлятся изъ общей формулы $1+\frac{y}{n} = Cos.\frac{2\lambda\pi}{n} \pm Sin.\frac{2\lambda\pi}{n}.\sqrt{-1}$, или, вслѣдствіе безконечной малости дуги $\frac{2\lambda\pi}{n}$, $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. И такъ, $l.1 = 0, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 6\pi\sqrt{-1}$, и т д.; точно также изъ уравненія $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, найдемъ: $l.-1 = \pm\pi\sqrt{-1}, \pm 3\pi\sqrt{-1}, \pm 5\pi\sqrt{-1}, \ldots$ Эйлеръ разсматриваетъ затѣмъ общій случай какого нибудь мнимаго выраженія $a + b\sqrt{-1}$; полагая $\sqrt{(a^2+b^2)} = c$; онъ замѣчаетъ, что отношенія $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ могутъ быть разсматриваемы какъ синусъ и косинусъ нѣкотораго угла φ, который легко опредѣлить по таблицамъ, и придаетъ такимъ образомъ мнимому выраженію видъ: $c(Cos.\varphi + Sin.\varphi.\sqrt{-1})$, откуда слѣдуетъ, что $l.(a + b\sqrt{-1}) = C + l.(Cos\,\varphi + \sqrt{-1}.\,Sin\,\varphi)$, гдѣ C есть логариѳмъ c. Но $Cos.\varphi + \sqrt{-1}.\,Sin.\varphi = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$, [1]) при n безконечно большомъ, и логариѳмъ этого количества найдется изъ уравненія $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 0$, которое даетъ, подобно раньше разсмотрѣннымъ простѣйшимъ уравненіямъ, при безконечно большомъ n: $y = \varphi\sqrt{-1} \pm \lambda\pi\sqrt{-1}$, такъ что $l\,(a + b\sqrt{-1}) = C + \varphi\sqrt{-1}$, $C + (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1}$, $C + (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1}$ и т. д. Такова истинная теорія логариѳмовъ, которая даетъ полное

[1]) Ср. стр 274, 275 также прим. 1 на стр. 276 и *Foncenex* l. c.. p. 126 и.

объясненіе всѣхъ относящихся къ нимъ аналитическихъ парадоксовъ и недоразумѣній.——————«Но хотя послѣдній парадоксъ можетъ быть такимъ образомъ объясненъ», замѣчаетъ Эйлеръ во Введеніи, «первый, который состоитъ въ допущеніи существованія безчисленнаго множества точекъ, отдѣленныхъ другъ отъ друга и расположенныхъ по обѣ стороны оси логариѳмики, сохраняетъ всю свою силу».[1]) Чтобы еще яснѣе обнаружить существованіе этой безконечности изолированныхъ точекъ, Эйлеръ беретъ уравненіе $y=(-1)^x$, которое представляетъ безчисленное множество точекъ, отдѣленныхъ другъ отъ друга и расположенныхъ по обѣ стороны оси на разстояніи$=1$. Невозможно найти хотя бы двѣ изъ нихъ, которыя были бы смежны другъ съ другомъ; между тѣмъ, пространство, раздѣляющее каждыя двѣ сосѣднія точки, лежащія по одну и туже сторону оси абсциссъ, менѣе всякой данной величины. «Эта послѣдовательность точекъ будетъ такимъ образомъ, имѣть видъ двухъ прямыхъ, параллельныхъ оси и удаленныхъ отъ нея въ ту и другую сторону на разстояніе$=1$; ибо невозможно представить себѣ на этихъ линіяхъ никакого, малѣйшаго пространства, въ которомъ нельзя было бы найти, не только одной, но даже безчисленнаго множества точекъ выражаемыхъ уравненіемъ $y=(-1)^x$. Таже аномалія встрѣчается и въ уравненіи $y=(-a)^x$, и въ другихъ подобныхъ, гдѣ отрицательная величина возвышается въ неопредѣленную степень»[2]).

Причина открытаго Эйлеромъ парадокса заключается, съ одной стороны, въ неопредѣленности значенія символа показательной функціи, съ другой,—въ многозначности логариѳма;[3])

---

[1]) *Introd.* L. II art. 516, p. 294.

[2]) *Ibid.* art. 517, pp. 294—295.

[3]) Нужно замѣтить, что уравненіе $y=ae^{\frac{x}{b}}$ не принадлежитъ *логариѳмикѣ* въ строгомъ смыслѣ этого слова, уравненіе которой есть $x=blh\frac{y}{a}$,— если только символу $e^{\frac{x}{b}}$ сохранить всю его общность, подобно тому какъ

дѣйствительно, самое общее значеніе, которое можно придать формулѣ a^{x} есть e^{xlha}, или, точнѣе $(1+\frac{xlha}{n})^{n}$ при n безконечно большомъ[1]). Такимъ образомъ символъ $y=ae^{\frac{x}{b}}$ можетъ изображать какъ однозначную функцію $a(1+\frac{x/b}{n})^{n}$, обратную функцію гиперболическаго логариѳма, такъ и многозначную $a(1+\frac{x/b\; lhe}{n})^{n}=a\left[1+\frac{x/b\;(1+2\pi\lambda\sqrt{-1})}{n}\right]^{n}$.—Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, кромѣ вещественной вѣтви, является еще безчисленное множество мнимыхъ вѣтвей, на каждой изъ которыхъ есть безконечное же число вещественныхъ точекъ, въ которыхъ эти вѣтви пересѣкаются между собой[2]). При этомъ двѣ рядомъ лежащія точки принадлежатъ различнымъ вѣтвямъ, и совокупность ихъ есть безконечная система, хотя и *повсюду плотная*[3]), но *равносильная*[4]) ряду натуральныхъ чиселъ, и слѣдовательно не представляетъ изъ себя *сплошной линіи*[5]). Одна часть этихъ точекъ лежитъ на вещественной вѣтви логариѳмики, въ области положительныхъ ординатъ, другая — на

биполярное уравненіе $\left(r_1^2 - r_2^2\right)^2 - 8a^2\left(r_1^2 + r_2^2\right) + 16a^4 = 0$ полученное изъ у-ія эллипса $r_1 - r_2 = 2a$, принадлежитъ одновременно и гиперболѣ $r_1 + r_2 = 2a$; существуетъ нѣкоторое противорѣчіе между Эйлеровой теоріей показ. ф-ціи изложенной въ 1-й книгѣ Введенія (см. стр. 269) и его разсужденіями о логариѳмикѣ. Ср. Cayley cit a *G. Salmon.* H. pl. c. (франц. пер. p. 402 n. 1).

[1]) Подъ *lhx* я разумѣю гиперболическій лог. отъ *x*.

[2]) Ср. подробный разборъ этого вопроса въ статьѣ *Vincent*, Ann. de Gergonne, vol. XV, p. 1 и статью *Gregory* въ *Cambridge Math. Journ.* t. I, pp. 231, 264 (*Salmon. H.* p. c. фр. пер. pp. 400—402).

[3]) Ueberall dicht, partout dense по терминологіи *Г. Кантора*, *Math. Ann.* t. XV 1879. p. 2. (Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten); Act. Math. t. II. p. 351.

[4]) *Journ. f. d. r. u. a. Math. her. v. Borchardt.* vol. 84, p. 242. Ein Beitr. z. Mannigfaltigkeitslehre. V. H. *G. Cantor*: *Acta Math.* t. II. p. 311.

[5]) *Borchardts Journal*, t. 77. pp. 260—261. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. V. H. *Cantor* in Halle a. S. § 2; *Acta Math.* t. II. pp. 308—309, ср. прим. 2 на стр. 224. Vincent l. c. называетъ эту систему точекъ *courbe pointillée*.

симметричной линіи отрицательныхъ ординатъ—на *кажущейся* второй вѣтви логариѳмики[1].

Не меньшій интересъ чѣмъ логариѳмическія линіи представляютъ кривыя, выражаемыя тригонометрическими функціями. Особенность этихъ линій та, что онѣ состоятъ изъ безчисленнаго множества слѣдующихъ другъ за другомъ частей, которыя или воспроизводятся періодически, или происходятъ одна отъ измѣненія другой по извѣстному закону,—все это въ зависимости отъ періодичности входящихъ въ уравненіе кривой тригонометрическихъ функцій. Таковы простѣйшія кривыя этого рода, Лейбницева линія синусовъ[2]) и изслѣдованныя Котесомъ линіи тангенсовъ и секансовъ[3])—Сюда же принадлежатъ *линіи катанія* или рулетты: циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды[4]). Болѣе сложной природы—упомянутая нами выше кри-

---

[1]) *Branche similaire* (Salmon l. c.). — Въ art. 518, 519, *Lab.* t. II pp. 295—298, Эйлеръ разсматр. кривыя $y=x^x$ и $x^y = y^x$; NB. прим. къ art. 518 (*Lab.* p 296) о кот. мы еще упомянемъ ниже.

[2]) *Euler.* Introd. art. 520, pp. 298, 299, ср. стр. 188. *M. Cantor* въ своихъ Vorl. üb. G. d. M. II Bd. Lpz. 1892, p. 803 говоритъ: «....Roberval als Erfinder der *Sinuslinie* betrachtet werden muss». Въ самомъ дѣлѣ. Робервалева *socia* или *comes trochoidis* есть ни что иное какъ линія синусовъ. См. Divers Ouvrages de Math. et de phys. *Par Messieurs de l'Acad. R. d. Sc.* A Paris 1693. Div. Ouvr. de M. de Rob. *De Trochoide* ejusque Spatio p. 252 Coroll. 5 (Prop. I) и fig. p. 252. Несомнѣнно, однако, что Лейбницъ первый ввелъ линію синусовъ *какъ таковую*: NB. сказ. на стр. 188 и прим. 3 тамъ же. Эйлеръ первый показалъ свойство періодичности синусоиды, разсматривая ее на всемъ ея протяженіи, а не только часть ея какъ Р. и Л.

[3]) *Introd.* art. 521, pp. 299—300, ср. стр. 188, 203 и 204.

[4]) *Introd.* L. II art. 521—524, *Lab.* t. II pp. 300-303. Ср. прим. 1 на стр. 145, *Cantor.* Vorl. t. II. pp. 185, 186 (*Cusanus*), 351, 352 (*Ch. de Bouvelles*), 780, 781 (*Galilei*, *Descartes*) 786—788, 797 (*Fermat*), 801—804, 806, 807 (*Roberval*), 808 (*Torricelli*), 809 — 813 (*Torr. & Rob.*), 827 (*Wallis*), 829 — 832 (*Pascal*, *Lalouvère*, *Wallis*) 838, 839 (*De Sluse*). Эпициклоиду можно найти еще въ сочин. знаменитаго *Альбрехта Дюрера* (1471—1528): Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt etc. 1525. См. *Cantor.* Vorl. t. II p. 423: «Dürer hat in seiner Spinnenlinie die *Epicykloide* erfunden». *Desargues* и *Roemer* (1674) нашли, что при эпициклоидальной формѣ зубцовъ въ з. колесахъ имѣетъ мѣсто наименьшее треніе; см. *G. Desargues.* Oeuvres t. I, p. 31 (ср. *Cantor.* Vorl. t. II, p. 621); *Leibnitii* Epist. ad Joh. Bernoullium

вая съ уравненіемъ $2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$, или $y = Cos.\ A.\ lx$, содержащимъ еще и логариѳмическую функцію. Это уравненіе можно написать еще такъ: $x = e^{\frac{A.\ Cos y}{}}$, откуда видно, что кривая не имѣетъ сплошной части въ области отрицательныхъ x-въ и пересѣкаетъ ихъ ось въ безчисленномъ множествѣ точекъ, абсциссы которыхъ суть.... $-e^{\frac{7\pi}{2}}, e^{\frac{5\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{-\pi}{2}}, e^{\frac{-3\pi}{2}}, e^{\frac{-5\pi}{2}}, \ldots$ и которыя, слѣдовательно, приближаются безгранично къ началу координатъ; сверхъ того эта кривая распространяется по обѣ стороны оси на разстояніе $=1$, между двумя прямыми параллельными оси, и касается ихъ въ точкахъ, абсциссы которыхъ составляютъ также убывающую геометрическую прогрессію. Кривая приближается такимъ образомъ къ отрѣзку оси y-въ отъ точки $y = -1$, до точки $y = +1$ и послѣ безчисленнаго множества изгибовъ совершенно сливается съ этимъ отрѣзкомъ. «Особенность этой кривой заключается слѣдовательно въ томъ, что асимптотой служитъ для нея не безконечная прямая линія, но конечный отрѣзокъ прямой; что даетъ ей характеръ отличающій ее отъ алгебрическихъ кривыхъ» [1]).

Къ трансцендентнымъ кривымъ слѣдуетъ причислить и безконечный классъ *Спиралей*, въ построеніе которыхъ входятъ углы, или ихъ логариѳмы, и которыя развертываются вокругъ опредѣленной точки, или центра, обыкновенно дѣлая при этомъ

Hanov. 18 *Jan.* 1698, *Commerc.* t. I, p. 347. Первое системат. изслѣдованіе эпициклоидъ вообще принадлежитъ *де Лагиру* (1677—1719): *De la Hire.* Traité des Epicycloïdes & de leurs usages dans les Méchaniques. Paris 1694; см. еще *L'Hospital.* An. d. i. p. art. 100—106, pp. 94—101 (Лопит. называетъ разсм. крив. *рулеттами*), ср. *Varignon.* Ecl. pp. 54—58, *Joh. Bern.* Lect. Math. Op t. III. Lect. XXI sqq., два мемуара *Де Лагира* и *Николя* въ Mém. de l'Ac. R. d. Sc. de Paris 1707; —съ другой стороны *Newton.* Princ. Lib. I prop. 48 (выпрямл. эпиц.), 49 (выпрям. гипоцикл.) sqq., *Halley.* Philosoph. Trans. nr. 218. Ср. *Klügel.* M. W. II Th. pp. 126—129.

1) *Introd.* L. II, art. 525, pp. 303—304.

безчисленное множество оборотовъ. Ихъ природа можетъ быть удобно выражена уравненіемъ между перемѣнными s и z, гдѣ z выражаетъ длину прямой соединяющей какую нибудь точку спирали M съ центромъ C, а s—уголъ ACM, составленный этой прямой съ прямой опредѣленнаго положенія CA проходящей черезъ центръ. Слѣдуетъ замѣтить, что при непрерывномъ вращеніи CM около центра въ ту или другую сторону возникаетъ безчисленное множество значеній угла ACM: .... $-4\pi+s$, $-2\pi+s$, s, $s+2\pi$, $s+4\pi$,.... соотвѣтствующихъ одному и тому же положенію прямой CM. Отсюда слѣдуетъ, что любое уравненіе между s и z представляетъ вообще спираль; ибо, подставляя вмѣсто s указанныя выше эквивалентныя значенія угла ACM, мы получимъ изъ этого уравненія безчисленное множество соотвѣтствующихъ значеній z, и если эти значенія не мнимы, то имъ будетъ соотвѣтствовать безконечное число точекъ въ которыхъ прямая CM, — опредѣленнаго направленія, пересѣкаетъ кривую[1]). Простѣйшіе случаи представляютъ уравненія: $z=as$, отвѣчающее *Архимедовой спирали*[2]) и $z=\frac{a}{s}$ — *гиперболической* спирали Ивана Бернулли[3]).

Уравненіе $s=n.\, l. \frac{z}{a}$ или $z=ae^{\frac{s}{n}}$ даетъ такъ называемую *логариѳмическую* спираль,[4]) главное свойство которой состоитъ

---

[1]) *Introd.* L. II, art. 526, pp. 304—305; ср. art. 392 sqq.

[2]) Ср. стр. 63, прим. 4. *Introd.* art. 526, 527, p. 305.

[3]) *Introd.* art. 527, *Lab.* t. II, pp. 305 — 306; *Joh. Bernoulli.* Op. t. I. № 87: Probl. inverse d. forces centrales, p. 480 (Spirale hyp. on reciproque). № 83: Des forces centr. d. l. milieux resistans, p. 506, № 90: De motu pend. et project. pp. 552—553. (Spiralis hyp. vel archimedea inversa); t. IV. p. 177; см. еще въ I-мъ томѣ p. 47 о *параболической* с.

[4]) Логариѳм. спираль была открыта *Декартомъ* (*Cartes. Epist.* P. I. Epist. 73, 74, P. II. Ep. 91), которому было извѣстно характерное свойство ея касательныхъ. *Иванъ Бернулли* подробно изслѣдовалъ эту кривую и далъ ей ея названіе. См. *Joh. B.* Op. t. I, pp. 61, 495, 500, 547, t. III, pp. 459, 481. t. IV, p. 350; *Яковъ Бернулли*, пораженный удивительными открытыми имъ свойствами различныхъ производныхъ этой кривой (развертки, зажигатель-

въ томъ, что всѣ прямыя выходящія изъ центра пересѣкаютъ ее подъ равными углами; это свойство легко доказать: изображая разность между двумя послѣдовательными прямыми $CN - CM = LN$ формулой $ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{\nu}{n}} - 1)$, а дугу круга ML формулой $z\nu = ae^{\frac{s}{n}} . \nu$, мы получимъ $\frac{ML}{LN} = \frac{\nu}{e^{\frac{\nu}{n}} - 1}$; разлагая показательную функцію въ рядъ и полагая $\nu = 0$, мы найдемъ, что отношеніе $\frac{ML}{NL}$, которое станетъ при этомъ тангенсомъ угла составляемаго CM съ кривой, равно n. При $n = 1$ — уголъ этотъ станетъ $= 45^0$ и получится такъ называемая *полу-прямая* логариѳмическая спираль[1]).

Уже тѣ немногія изысканія, о которыхъ мы упомянули, ясно показываютъ всю важность роли, которую играютъ сходящіеся безконечные ряды въ теоріи аналитическихъ функцій. Разложеніе функцій въ ряды можетъ служить не только для нахожденія ихъ числовыхъ значеній съ извѣстной степенью точности, но, что главнымъ образомъ важно для геометра, — для опредѣленія законовъ тѣхъ измѣненій, которыя онѣ претерпѣваютъ при измѣненіи перемѣнной, и однимъ изъ лучшихъ средствъ для яснаго выраженія и пониманія которыхъ служатъ наглядныя свойства представляемыхъ функцій геометрическихъ образовъ. — Уже первые геометры употреблявшіе безконечные ряды для выраженія аналитическихъ функціей замѣтили, что можно быть увѣреннымъ въ сходимости безконечнаго ряда *вообще*

ныхъ линій....) назвалъ ее *Spira mirabilis*: «.... libenter spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum epigraphe: *Eadem mutata resurgo*» (*Act. erud.* 1692, p. 212. Op. p. 502); см. *Jac. Bern.* Op. T. I Nr. 49, 50, 56. (*Act. Er.* 1692, 1693). См. еще *Newton.* Princ. Lib. II, Sect. IV, *Les. & Jacq.* t. II, pp. 146 sqq.

[1]) *Introd.* L. II, art. 528, *Lab.* t. II, pp. 306—307.

лишь для значеній перемѣнной мало отличающихся отъ одной опредѣленной ея величины, и слѣдовательно только для этихъ значеній рядъ точно представляетъ предложенную функцію[1]). Это опредѣленное значеніе перемѣнной—центральная ея точка—зависитъ въ извѣстной мѣрѣ отъ формы ряда, и наоборотъ, самое разложеніе функціи зависитъ отъ выбора этой величины. При этомъ самая эта величина перемѣнной вліяетъ лишь на постоянныя разложенія, на коеффиціенты, форма же его зависитъ отъ геометрической природы функціи вблизи центральной точки: разложенія сходящіяся вблизи двухъ такихъ точекъ могутъ не отличаться другъ отъ друга по формѣ, если только въ обѣихъ точкахъ функціи имѣютъ тотъ же геометрическій характеръ. Вмѣсто одной центральной точки можно выбрать нѣсколько основныхъ критическихъ значеній перемѣнной и измѣняя ихъ число и расположеніе получать все новыя и новыя разложенія функціи, представляющія ее въ болѣе или менѣе широкихъ областяхъ перемѣнной[2]).—Такимъ образомъ въ общей теоріи аналитическихъ функцій открываются два пути. Одинъ состоитъ въ методахъ геометрической реализаціи функцій, въ пользованіи этими методами для усмотрѣнія всѣхъ различныхъ наглядныхъ особенностей, которыя могутъ представлять функціи даннаго рода, или даже всѣ аналитическія функціи вообще и въ правильной классификаціи всѣхъ функцій по этимъ особенностямъ. Различные классы функцій могутъ быть затѣмъ изучены въ отношеніи тѣхъ особыхъ аналитическихъ формъ, въ которыхъ онѣ могутъ представляться. Изученіе высшихъ отдѣловъ—обладающихъ простѣйшими особенностями—опирается при этомъ на основные принципы и доставляетъ главныя теоремы; сложныя комбинаціи особенностей представляемыхъ высшими отдѣлами характеризуютъ низшія подраздѣленія, изученіе которыхъ приводитъ къ болѣе сложнымъ и разнооб-

---

[1]) Ср. стр. 217—220.

[2]) Стр. 220 и прим. 3 тамъ-же.

разнымъ формамъ; ихъ можно получить изъ главныхъ помощью второстепенныхъ вспомогательныхъ принциповъ, которые собственно и сообщаютъ теоріи ея силу и значеніе [1]).

Второй путь въ теоріи функцій исходитъ изъ классификаціи самыхъ формъ ихъ и состоитъ въ изученіи природы функцій принадлежащихъ къ различнымъ полученнымъ такимъ образомъ классамъ. Въ обоихъ случаяхъ классификація даетъ безчисленное множество классовъ, происходящихъ посредствомъ постепенной генераціи, подчиняющейся при этомъ общимъ законамъ построенія безконечныхъ системъ [2]). Орудіями анализа и синтеза служатъ прежде всего основныя операціи теоріи величинъ. Сверхъ того, первому пути существенно принадлежатъ, кромѣ геометрическихъ построеній зависящихъ отъ способа реализаціи функцій, операціи исчисленія безконечно-малыхъ, тѣсно связанныя съ ихъ непрерывностью. Во второмъ пути такими орудіями служатъ формальныя видоизмѣненія функцій, состоящія въ ихъ *парціалированіи* [3]), въ замѣщеніяхъ входящихъ въ ихъ выраженія буквъ и символовъ, въ измѣненіи ихъ

---

[1]) Полное развитіе этихъ принциповъ можетъ, разумѣется, найти мѣсто только въ систематическомъ изложеніи Основаній Теоріи Функцій. Я здѣсь напомню лишь читателю о современной теоріи *одкозначныхъ* аналитическихъ функцій; см. въ особенности замѣчанія *F. Casorati* въ статьѣ Aggiunte a recenti lavori dei sig^{i} Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. *Annali di mat. pura ed appl.* (*Brioschi*) Milano. Serie II, T. X. 1880—1882, pp. 261 — 278; ср. также Vorl. üb. Math. v. *Leopold Kronecker*. Erst. Bd. V. üb. d. Th. d. einfachen u. d. vielf. Integrale her. v. Dr. *E. Netto*. Lpzg. 1894, III Vorl., § 10, p. 52, X Vorl. § 5, p. 167, § 12, p. 176.

[2]) Ср. *G. Cantor*. Math. Ann. t. XXI pp. 545 sqq., Acta Math. t. II, pp. 381 suiv.: Fondements d'une théorie générale des ensembles.

[3]) Этотъ терминъ принадлежитъ *Герману Шапира*; см. Дневникъ 52-го съѣзда Герм. Ест. и Вр. 1879 стр. 171: Gegenseitigkeit von Partial= und circumplexen Functionen und Reihen v. Dr. *H. Shapira*, также *Основаніе для теоріи общихъ кофункцій и ихъ приложеній.* 1-ая часть, 1-ый отдѣлъ, выпускъ 1. Одесса, 1881. *Sin x* и *Cos x* разсм. въ своихъ разлож. въ степ. ряды суть. напр., парціальн. ф-іи главной ф-іи e^x. Сочиненія Шапира однѣ изъ самыхъ замѣчательныхъ современныхъ работъ произведенныхъ въ разсм. нами направленіи.

числовыхъ элементовъ по опредѣленнымъ законамъ и другихъ подобныхъ операціяхъ, которыя имѣютъ свои алгориѳмы, связанные вообще съ теоріей сочетаній, и которыя носятъ одно общее названіе *деривацій* [1]).

Не трудно видѣть, даже a priori, что ни одинъ изъ этихъ путей не можетъ быть самъ по себѣ достаточнымъ, что они не независимы и должны быть проходимы не только одновременно, но и постоянно перекрещиваться. Только въ угоду постороннимъ и случайнымъ тенденціямъ можно слѣдовать исключительно по одному пути, не безъ натяжекъ и софизмовъ, съ немалымъ ущербомъ для самой теоріи и съ дурнымъ вліяніемъ на развитіе науки.

Въ эпоху Эйлера и Лагранжа основныя идеи перваго пути были еще очень слабы и неясны, проявлялись лишь въ частныхъ иктому-же довольно запутанныхъ вопросахъ и не могли служить основаніемъ общей теоріи [2]). Формальный анализъ напротивъ достигъ большаго совершенства. Вотъ почему многіе математики искавшіе обобщеній находили ихъ такъ охотно въ формальныхъ системахъ.

Символическое исчисленіе, основанное Лейбницемъ и его современниками, было далѣе разработано *Меерманомъ* [3]) въ Гол-

---

[1]) См. Du Calcul des dérivations par *L. F. A. Arbogast*. A Strasbourg. An VIII (1800).

[2]) Это вопросы о произвольныхъ функціяхъ, логариѳмахъ, рядахъ, . . . которые мы потомъ разсмотримъ подробно.

[3]) Specimen Calculi fluxionalis quo exhibetur generalis methodus duarum pluriumve quant. var. in sem. multipl. flux. et fluentes cujusc. ord. ope serierum infinitarum adinveniendi etc. Auctore *Gerardo Meerman*. Lugd. Bat. 1742. ср. *Leibnis* ll. c. на стр. 180, прим. 2 и на стр. 252—254. Мерманъ усовершенствовалъ Ньютоновъ алориѳмъ введя флюксіи нулев. и отриц. пор. (Spec. pp. 1, 2, 3) и употребляя обозначенія флюксій неопредѣленныхъ порядковъ: въ этомъ слѣдовалъ онъ Тейлору; ср. *Spec.* p. 1. и *Method. Increm.* pp. 1, 2. Ср. еще *E. Waring*. Miscellanea analytica. Cantabr. 1762, и Meditationes analyticae. Cantabr. 1776 (3-тье издан. ibid. 1785).

ландіи, *Лагранжемъ* и *Лапласомъ* [1]) во Франціи, *Lorgna* и

[1]) См. Lettera di L. de La Grange Tournier Torinese all'illustr. signor conte G. Carlo da Fagnano ecc. contenente una nuova serie ecc. (In Torino 1754); *O de L.* t. VII, pp. 584–588; Письмо къ Эйлеру Taur. 4 cal. Iulii (1754?), *O de L.* t. XIV, pp. 135–138; ср. *Zeitschr. f. M. u. Ph.* 23 Jahrg. 1 Heft 1878: *M. Cantor.* D. Briefwechs. zw. L. u. E. Въ *Nouv. Mém. de l'Acad. r. d. Sc. et B.—L. de Berlin*, *ann.* 1772 см. мемуаръ *Лагранжа*: Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables (Oeuvres de L., t. III, 1869, pp. (441)–476; въ этой работѣ Lagrange установилъ символическія формулы $\Delta^\lambda u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \cdots} - 1\right)^\lambda$ (p. 450) и $\sum^\lambda_{u=1} : \left(e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \cdots} - 1\right)^\lambda$ (p. 451) (Ср. *Reiff.* Gesch. d. un. R. § 12, pp. 149–152); онѣ были доказаны вмѣстѣ съ другими, болѣе общими *Лапласомъ* въ мемуарѣ *Sur les suites* упом. въ прим. 2 на стр. 287 l. c. X, p. 245–251, XXIV, pp. 306–309; ср. *Arbogast.* Calc. d. der. pp. 343 suiv., *Lacroix.* Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III, art. 929 suiv., pp. 60 suiv.; кромѣ упомянутаго мемуара Лапласа см. еще: его работы въ *Mémoires de Math. et de Phys. prés p. div. Savants à l'Ac. r. d. Sc. de Paris*, T. VII, pp. 584 suiv., *Mém. de l'Acad. r. d. Sc. d. P.* ann. 1777, pp. 102 suiv. *Journal de l'École Polytechnique* 15-me Cahier, T. VIII, Paris 1809: Mémoires sur divers points d'Analyse, pp. 229 suiv. {NB. p. 264: $x^{(n)} = \phi.[\psi(x^{(n)})]$ }; въ томъ же журналѣ: *Prony.* Méthode directe et inverse des différences.—Leçons d'Analyse donn. à l'Éc. Pol. pp. 259 suiv., также мем. *Brinckley* и *Andrews* въ *Philos. Transact. of the R. S. of. L.* за 1807 г. (P. I). Ср. еще другіе примѣры символ. исчисл. у Лагранжа: Nouvelle méthode pour résoudre les équat. littérales par le moyen des séries; *Mém de l'Ac. r. d. S. et Belles—L. de Berlin*, t. XXIV, 1770, art. 18. p. 26 (Выводъ Лагр. ряда); ср. *Reiff.* l. c. p. 147; Sur une nouvelle méthode de Calc. int. pour les diff. affectées d'un radical carré sous lequel la var. ne passe par. le quatr. degré. *Mém. de l'Acad. R. d. Sc. de Turin.* T. II, 1784–1785, *O. d. L.* t. II; ср. *Lacroix.* Tr. d. c. d. et d. c. i. t. II, art. 421 pp. 72–74.– Къ французскимъ символистамъ примыкаетъ непосредственно Англійская Аналитическая Школа и ея Исчисленіе Функцій (*Woodhouse.* The principles of analytical calculation. Cambridge 1803, *Th. Knight* въ *Phil. Tr.* за 1811 г. P. I и 1817 г. P. II, *John F. W. Herschel.* Consideration of various Points of Analysis, *Phil. Tr.* 1814, P. II pp. 440 — 449 [NB. pp. 441–442: обозначенія $f^2, f^3, \ldots$ вмѣсто $ff, fff, \ldots$ также: $f^{-1}f(x) = f^0(x) = x$], 1816, P. I.—C. *Babbage.* An Essay towards the Calculus of functions, communic. by W H. Wollaston. *Philos. Trans.* 1815 Part. II, pp. 389–423, 1816 Part. II, pp. 179–256; Observations on the Analogy which subsists between the C. of f. and other branches of Analysis. By *C. Babbage*, *Phil. Trans.* 1817. Part. II, pp. 197–216.—

Caluso[1]) въ Италіи. За ними слѣдовала цѣлая школа нѣмецкихъ *комбинаториковъ* съ *Гинденбургомъ* во главѣ[2]), процвѣтавшая еще въ началѣ нынѣшняго столѣтія, *Brunacci*, *Ruffini*[3]) и *Arbogast* со своимъ «исчисленіемъ дериваціи»[4]). Сюда же слѣдуетъ отнести грандіозную систему *Гоёне Вронскаго*, вели-

---

О другихъ математ. А. А. Ш. мы еще будемъ говорить ниже. — Объ исчисленіи *факторіаловъ* (*Stirling*, *Vandermonde*, *Kramp*, *Arbogast*, *Multedo*) см. *Lacroix*. Tr. t. III, art. 981—989, pp. 119—133.

[1]) Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal. Par *M. le Clevalier Lorgna. Mémoires de l'Ac. R. d. Sciences*, Ann. 1786 — 1787, A Turin 1788, pp. 409—448. *Ibid.*: Des diff. manières de traiter cette partie des math. que les uns app. calc. diff. et les autres méth. d. fluxions par *M. l'Abbé de Caluso*, 2-e partie (lue le 9 déc. 1787), pp. 556 suiv.

[2]) См. *K. I. Gerhardt*. Gesch. d. M. in Deutschl. pp. 201—206, также *Klügel*. M. W. Erst. Th. pp. 475—511. Combinatorische Analysis; *C. F. Hindenburg*. Sammlung combinator. — analyt. Abhandlungen (v. *Tetens*, *Klügel*, *Kramp*, *Pfaff*, ...) 2 Bde. Lpzg. 1796, 1800. *Pfaff*. Disquisitiones analyt maxime ad calc. int. et doctrinam serierum pertin. Helmst. 1797. *Kramp*. Arithmétique universelle. Ср. еще прим. 2 на стр. 239.—Главные представители этой школы, кромѣ *Карла Фридриха Гинденбурга* (1741 — 1808), *Eschenbach* (1764—1797) и *Rothe* (1773—1842).—Ср. замѣч. Лакруа о комб. въ 1-мъ т. Tr. d. c. d. et d. c. i. Préf. pp. XXVIII—XXXII.

[3]) *V. Brunacci*. Corso di Matematica sublime. Calc. diff. ed int. e loro appl. 4 voll. Firenze 1804—1808. — Compendio d. c. s. 2 voll. Milano 1811. Къ сожалѣнію я не знаю ни одного сочиненія *Руффини* относ. къ этому предмету. Я заимств. свое свѣдѣніе изъ Мемуара *G. Magistrini*. Confronto del calcolo delle funzioni di La—Grange ecc.; mem. postuma letta all'accad. d. s. d. ist. d. Bologna nella sed. d. 19 Genn. 1832, Mém. d. a. d. B. t. I, 1850.

[4]) См. прим. 1 на стр. 310. *Montucla*. H. d. m. Ach. et publ. par *J. de la Lande* t. IV, Paris An. X (1802) pp. 659 suiv. (VI-me suppl.). *Louis Arbogast* род. въ Мунтцигѣ 4 Окт. 1759, ум. въ Страсбургѣ 8 Апр. 1803. Отдѣленіе символовъ количествъ отъ символовъ дѣйствій и оперированіе съ этими послѣдними какъ съ количествами введенное уже Lorgna (l. c. въ прим. 1) развито систематически Арбогастомъ (C. d. dér. art. 371, 404, ср. *Lacroix*. C. d. et i. t. III p. 726); NB. еще *Calc. d. dér.* pp. 160—229—прилож. къ теоріи возвр. ряд., 230—304—прилож. къ обращ. рядовъ въ особ. p. 374, art. 440. (дробн. указат. д.); нѣкоторыя указанія объ исторіи вопр. о дифф. съ дробн. указ. и пр. можно найти въ статьѣ проф. *P. Tardy*. Intorno ad una formola del Leibniz. *Bull. Bonc.* T. I, Roma 1868, pp. 177—186.

чайшаго изъ систематиковъ — формалистовъ[1]). Работы всѣхъ этихъ математиковъ, не смотря на свою исключительность, принесли немалую пользу развитію символической алгебры, и внимательное и всестороннее изученіе нѣкоторыхъ изъ нихъ, въ особенности Вронскаго, еще и теперь представляетъ большой

---

[1]) *Hoëné Wronski* (1778—1853). См. его автобіографію въ Suppl. à la réf. de la phil.: manifeste historique concern. cette réf. du sav. hum. pp. XVI suiv.: «M. Hoëné, qui prit postérienrement le nom de Wronski....». Paris 1845, напеч. въ соч. Messianisme etc. P. 1847 tt. II и III; Маниф. носитъ эпиграфъ: «Dein Orakel zu verkünden, Warum warfest du mich hin In die Stadt der ewig blinden?» и начинается печальнымъ утвержденіемъ: Les savants par brevet sont les ennemis nés des progrès de la verité. Какъ часто это бываетъ справедливо, показалъ, къ сожалѣнію, не одинъ Вронскій. - *Émile West* помѣстилъ о матем. работахъ Вронскаго нѣсколько статей въ *Journ. d. m. p. & a.*; эти статьи были потомъ собраны въ отдѣльной книгѣ подъ заглавіемъ: 'Exposé des méthodes générales en mathématiques, résol. et intégr. d. éq., applic. div. d'après H. Wronski. Paris 1886; см. въ особ. Complément, pp. 235 — 309 и Digression sur les séries, pp. 33-50; см. также *A. S. de Montferrier*. Encyclopédie mathématique d'après H. Wronski. Math. pures tt. I—IV. Loi d. séries de Wronski; sa Phoronomie par *M. Abel Transon*, *Nouv. Ann. d. Math.* II-me sér. t. 13, 1874, pp. 305—318; Réflexions sur l'événement scientif. d'une formule publ. p. Wronski en 1812 et dém. par M. Cayley en 1875, par *M. Ab. Transon*, *ib.* pp. 161—174; *A. Cayley*. On Wronski's theorem. *Quart. Journ. of. Math.*, Apr. 1873.—Самое раннее изложеніе системы Вронскаго— его Introduction à la philosophie des Mathématiques, Paris 1811. — послѣднее и самое полное заключается въ упом. уже сочиненіи: Messianisme ou réforme absolue du savoir humain; nommément réf. d mathématiques comme prototype de l'accomplissement final des sciences et réf. de la philosophie comme base de l'acc. f. de la religion. Paris 1847 (3 тома); T. I; Prem. Partie; programme scientif. pour l'accompl. f. de la r. d. math. pp. 9 suiv. и въ особ. Complément historique et didactique de la réf. d. m. pp. III suiv. Система Вронскаго, какъ мы уже говорили, чисто формальная— элементами ея служатъ простыя математич. операціи и законы ихъ сочетаній; ср. *Méss.* t. I, pp. 65—68: Système architectonique de l'Algorithmie. Сочиненіе *Méss.* имѣетъ фронтисписъ, изображающій кольцо съ фигурами зодіака въ облакахъ, съ солнцемъ внутри, на дискѣ котораго написано:

Lex Suprema

$$Fx = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 \ldots.$$

τελει'ωτις

$$x^m \equiv a \ (mod = M)$$

Problema universale

$$0 = fx + x_1 . f_1 x + x_2 . f_2 x \ldots\ldots$$

интересъ и обѣщаетъ привести къ немаловажнымъ результатамъ. Начала, на которыхъ основаны системы Вронскаго и комбинаториковъ имѣютъ весьма мало общаго съ принципами послужившими развитію теоріи функцій, и мы не можемъ остановиться на разсмотрѣніи этихъ системъ, даже въ ихъ общихъ чертахъ [1]). Изъ той же тенденціи — обосновать всѣ методы чи-

[1]) Я, къ сожалѣнію не могу указать читателю ни одного сочиненія, въ которомъ была бы изложена полная исторія разсматриваемаго нами *въ высшей степени важнаго* момента въ развитіи современной математики. Историкъ этого вопроса долженъ будетъ имѣть въ виду: 1) Что къ французскому символическому исчисленію примыкаютъ непосредственно: а) *исчисленіе производящихъ функцій*, основные принципы котораго простираются гораздо дальше чѣмъ сама Лапласова теорія — они находятся въ связи, между прочимъ, съ одной стороны, съ изысканіями Эйлера о суммахъ дѣлителей нат. чиселъ и позднѣйшихъ геометровъ о другихъ числовыхъ законахъ, отъ глубокихъ изслѣдованій Дирикле до замѣчательныхъ работъ Бугаева, съ другой—съ методами опред. интегр. Фурье, исчисленіемъ вычетовъ Коши и Абелевой теоріей производ. функцій и, наконецъ, съ исчисленіемъ $E\varphi x$ Н. В. Бугаева; b) *вся англійская Аналитическая школа*, какъ старая (исчисленіефункцій), такъ и новая (символическая алгебра); 2) Что *школа комбинаториковъ* была господствующею въ Германіи до тридцатыхъ годовъ нынѣшняго столѣтія, что въ ней воспитывался математическій геній Вронскаго, и что къ ея вліянію слѣдуетъ отнести направленіе нѣкоторыхъ интересныхъ работъ нѣмецкихъ математиковъ: Бесселя, Крелле, Ома, Этингера—объ аналитическихъ факультетахъ,—вызвавшихъ м. пр. появленіе первой статьи Вейерштрасса по теоріи функцій (1843); Гоппе и Шлемильха—о произв. высш. порядковъ; Магнуса, Геллвига, Буттеля, Симона, Бейсселя, Моста, Кнара, Бретшнейдера ... объ общихъ синусахъ (разсм. и Вронскимъ),—длинный рядъ работъ, которыя тянутся вплоть до 80-хъ годовъ и изслѣдуютъ лишь частные случаи несравненно болѣе общихъ вопросовъ, разсмотрѣнныхъ *Шапирой*; 3) Что *Вронскій* вывелъ чрезвычайно общія формулы для разложенія функцій въ ряды (которымъ Лагранжъ и Лакруа придавали большое значеніе) и указалъ замѣчательные методы для примѣненія этихъ формулъ къ интегрированію дифф. уравненій; 4) Что его работы содержатъ въ себѣ, сверхъ того, общіе методы относящіеся къ *теоріи чиселъ* и *рѣшенію алгебрическихъ уравненій*; 5) Что въ сочиненіяхъ Вронскаго находится много интересныхъ и глубокихъ замѣчаній относящихся къ *философіи математики*, и что, вообще, ему принадлежитъ одна изъ немногихъ, достойныхъ серьезнаго вниманія со стороны математиковъ, попытокъ систематическаго изложенія такой философіи; 6) Что и работы англійской Анал. Школы привели къ не менѣе важнымъ философско-математическимъ выводамъ, какъ Пикокова философія алгебры, теорія операцій, теорія комплексныхъ величинъ, математическая логика — ученія, которыя почти одновременно

стаго анализа на одномъ формальномъ принципѣ — возникла однако и «теорія аналитическихъ функцій» *Лагранжа*[1])—одно изъ главныхъ основаній современнаго ученія о функціяхъ.

Разсматриваемая съ такой точки зрѣнія, теорія Лагранжа представляетъ собой обобщеніе всѣхъ тѣхъ результатовъ, которые могутъ быть получены помощью разложеній функцій въ безконечные ряды, безъ посредства представленій анализа безконечно-малыхъ, главнымъ образомъ однако въ тѣхъ вопросахъ, къ которымъ этотъ анализъ непосредственно примѣнимъ; она служитъ такимъ образомъ естественнымъ дополненіемъ *элементарнаго* ученія изложеннаго въ Эйлеровомъ «Введеніи».

Мы приступимъ теперь къ разбору основныхъ положеній этой замѣчательной теоріи.

Принципы и правила дифференціальнаго исчисленія примѣнимы непосредственно лишь къ значеніямъ функціи, отвѣчающимъ величинамъ перемѣнной лежащимъ въ области, въ которой данная аналитическая функція остается непрерывной и хорошо опредѣленной. Дифференціалы и дифференціальныя частныя различныхъ порядковъ опредѣляютъ извѣстнымъ образомъ характеръ измѣненія или ходъ функціи вблизи какой нибудь опредѣленной точки этой области причемъ каждый дифферен-

---

послужили предметомъ геніальныхъ изысканій нѣмецкаго математика *Германа Грассмана* и работъ его брата Роберта.

[1]) *Joseph Louis Lagrange* род. въ Туринѣ въ 1736 г. ум. въ Парижѣ въ 1812 г. Ср. *A. Forti*. Intorno alla vita ed alle Opere di L. Lagrange. Pisa 1868.—*P. Cossali*. Elogio di L. Lagrange. Padova 1813. — *Delambre* въ Mém. de l'Instit. за 1812 г. — Всѣ сочиненія Лагранжа изданы въ Парижѣ въ 14-ти томахъ въ 1867—1892 гг. подъ общимъ заглавіемъ: Oeuvres Complètes de L. publ. par les soins de *J.-A Serret* et *G. Darboux*, sous les ausp. du Min. de l'Instr. p. — tt. I—VII.—Мемуары изд. въ Собр. Туринской, Берл. и Парижск. Академій и статьи изд. отдѣльно; tt. VIII—XII - дидактич. труды; tt. XIII, XIV — переписка съ Даламбертомъ, Кондорсэ, Эйлеромъ, Лапласомъ и др.—См. у *M. Marie*. Hist. d. sc. m. t. IX, pp. 149—234—кратк. біографію и краткій разборъ всѣхъ главнѣйшихъ трудовъ Лагранжа, также *ibid.* pp. 76—130, во введеніи въ 13 ый періодъ статью: Travaux de Lagrange. Превосходная характеристика Лагранжа какъ математика дана Ганкелёмъ: Die Entwickelung d. M. u. s. w. pp. 17—18.

ціалъ характеризуетъ ходъ дифференціала непосредственно низшаго порядка совершенно также, какъ дифференціалъ перваго порядка характеризуетъ ходъ самой функціи. Съ другой стороны, измѣненіе такой аналитической функціи вблизи даннаго значенія перемѣнной можетъ быть вполнѣ опредѣлено ея приращеніемъ, соотвѣтствующимъ приращенію даннаго значенія перемѣнной и развертывающимся въ безконечный рядъ расположенный по цѣлымъ и положительнымъ восходящимъ степенямъ этого послѣдняго — рядъ, который остается сходящимся пока приращеніе перемѣнной, увеличиваясь въ абсолютномъ значеніи, не выведетъ функцію изъ области ея непрерывности и опредѣленности [1]) Коеффиціенты членовъ разложенія зависятъ только отъ даннаго значенія перемѣнной и входящихъ въ функцію параметровъ и въ своей послѣдовательности характеризуютъ ходъ функціи совершенно также, какъ соотвѣтственные члены ряда дифференціаловъ возрастающихъ порядковъ. Этотъ фактъ, разъясненіе котораго дается Тейлоровой теоремой [2]), былъ замѣченъ еще Ньютономъ, который пользовался разложеніями въ степенные ряды вмѣсто дифференціальнаго исчисленія [3]).

---

[1]) Я, конечно, не имѣю здѣсь въ виду дать въ выраженіяхъ вполнѣ точныхъ условія разложимости анал. функціи въ рядъ Тейлора; вопросъ этотъ будетъ подробно разсмотрѣнъ въ исторіи девятаго періода.

[2]) См. стр. 221 — 223.

[3]) См подробный разборъ Ньютоновыхъ методовъ и ихъ исторію у Лагранжа въ *Théorie d. fonct. anal.* Nouv. éd. Paris 1813. Introd. и Chap. IV. Oeuvres c. t. IX, pp. 19—20, 365—376. Ньютонъ въ Principia искалъ законъ сопрот. среды въ которой свободное тяжелое тѣло описывало бы данную плоскую кривую; пользуясь мет. рядовъ онъ нашелъ для отношенія силы сопр. къ силѣ тяжести неправильн. выраж.: $-\frac{y''' \sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$, вмѣсто правильнаго $-\frac{y''' \sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$. Ошибку свою, замѣченную Ив. Бернулли, онъ исправилъ во второмъ изданіи Princ., давъ новое рѣшеніе задачи, основанное на методѣ флюксій: такимъ образомъ ошибка Ньютона была по-

«Hujusmodi series», говоритъ Ньютонъ во второй книгѣ *«Началъ»*, «distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva *o* (приращеніе независимой перемѣнной — абсциссы точки кривой) non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium in quo extat duarum;.... & sic in infinitum. Et primus terminus,..... denotabit semper longitudinem ordinatae CH insistentis ad initium indefinitae quantitatis *o*. Secundus terminus.... positionem tangentis.... semper determinat;.... Terminus tertius,.... designabit lineolam...., quae jacet inter tangentem et curvam ideoque determinat angulum contactus.... seu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa.... finitae est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturae, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum seriorum in solutione problematum, quae pendent à tangentibus & quadraturâ curvarum»[1]).

«Vel quod eodem redit», прибавляетъ къ замѣчанію Ньютона *Яковъ Стирлингъ*, сопоставивъ его съ теоремой Тейлора, «tota Series est Ordinata Parabolae transeuntis per Ordinatas Curvae aequidistantes, numero infinitas, & coincidentes cum Ordinatâ primâ»[2]).

лезна, приведя къ сравненію двухъ метод.—рядовъ и флюксій; «Nam, ut saepe dicere soleo», какъ говоритъ Лейбницъ, «Egregiorum Hominum etiam errata docent» Ср. *Memoires de l'Ac. r. d. S. de Paris*, 1711, *J. Bern.* Oeuvres T. I; *Correspondence of J. Newton a. Cotes.* Ed. by J. Edleston. Lond. 1850, lett. LXVIII, LXXXVII.

[1]) *Newton.* Prencipia Lib. II. Sect. II, Prop. X. Probl. III. Exempl. 1, pp. 88, 89. t. II Женевскаго изданія *Les. & Jacq.*

[2]) Methodus Differentialis sive Tract. de Summ. et Interp. Ser. Inf. Auctore *Jacobo Stirling.* Lond. 1764, pp. 102—103.

Методъ безконечныхъ рядовъ сводится такимъ образомъ къ сравненію кривой, изображающей функцію, съ прямой линіей и рядомъ параболъ безконечно возрастающихъ порядковъ и имѣющихъ съ разсматриваемой кривой въ данной ея точкѣ все болѣе и болѣе возрастающія степени соприкосновенія.

Въ 1772 году Лагранжъ показалъ [1]), чисто алгебрическимъ путемъ, что если придать разложенію $f(x+\xi)$ форму $u+u'\xi+\frac{u''\xi^2}{2}+\frac{u'''\xi^3}{2.3}+\ldots$, то полученныя такимъ образомъ функціи отъ x, $u=fx$, u', u'',...... производятся одна изъ другой по одному и тому-же закону: каждая изъ нихъ есть коеффиціентъ при ξ въ разложеніи по степенямъ ξ результата подстановки въ предъидущую функцію $x+\xi$ вмѣсто x; ихъ можно слѣдовательно получить изъ первоначальной функціи u, постоянно повторяя надъ ней одну и туже операцію. Отсюда Лагранжъ вывелъ весьма простое доказательство теоремы Маклорена: [2]) при безконечно маломъ ξ разность $f(x+\xi)-u$ превращается въ $du=u'\xi+\frac{u''\xi^2}{2}+\frac{u'''\xi^3}{2.3}+\ldots$; пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ $\frac{u''\xi^2}{2}$, $\frac{u'''\xi^3}{2.3}$,..., мы получимъ просто $du=u'\xi$, или, считая $\xi=dx$, $u'=\frac{du}{dx}$, а слѣдовательно, въ

---

[1]) Sur une nouvelle esp. de calc. relat. à la diff. et à l'intégration d. quant. var. *Nouv. Mém. de l'Ac. r. d. Sc. et B.—L. de Berlin* ann. 1772, *Oeuvres de Lagr.* t. III, 1869, pp. 442—446. Ср. *Th. d. f. an.* Ch. II (Nouv. éd.). O. de L. pp. 31—33, II *Leç. sur le Calc. d. fonct. O. de L.* t. X pp. 15—17.

[2]) Ср. стр. 223; какъ я уже говорилъ въ указ. мѣстѣ, подъ теоремой Маклорена можно разумѣть лишь то предложеніе, что «всякое разложеніе ф. по цѣл. восх. полож. степ. перем. должно происходить непремѣнно по формулѣ Тейлора». Говорить, какъ это часто дѣлается, о «рядѣ Маклорена», отличномъ отъ Тейлорова, возводя въ особое открытіе простое замѣчаніе, сдѣланное къ тому-же самимъ Тейлоромъ, — и котораго Маклоренъ, конечно, никогда себѣ не приписывалъ, — очень несправедливо и по отношенію къ Тейлору и по отношенію къ Маклорену.

силу приведеннаго выше замѣчанія, и вообще $u^{(i)} = \frac{d^{(i)}u}{dx^i}$ [1]). Въ связи съ замѣчаніями Ньютона и Стирлинга отсюда можно было заключить, что теорія приложенія степенныхъ рядовъ къ исчисленію функцій можетъ быть основана на разсмотрѣніи одной простой операціи нахожденія перваго члена разложенія приращенія функціи по восходящимъ степенямъ приращенія перемѣнной независимой, и что алгориѳмъ новаго исчисленія долженъ совпадать съ алгориѳмомъ дифференціальнаго исчисленія Лейбница или теоріи флюксій Ньютона. Всѣ эти соображенія могли легко привести къ той мысли, что теорія аналитическихъ функцій можетъ быть основана, какъ in abstracto, такъ и въ геометрическихъ приложеніяхъ, совершенно безъ посредства понятій о безконечно малыхъ или предѣлахъ, единственно на фактѣ возможности разложенія этихъ функцій въ степенные ряды и на свойствахъ этихъ рядовъ[2]). Послѣ попытки *Condorcet*, оставшейся почти неизвѣстной[3]), первый опытъ такой теоріи при-

---

1) *L. c.* pp. 446—447.

2) Нужно всегда имѣть въ виду при изученіи сочиненій геометровъ прошлаго вѣка, что всѣ ихъ возрѣнія на природу рядовъ какъ разложеній а. ф-ій нисколько не отличаются отъ возрѣній Грегори и Ньютона; см. стр. 150 — 153; *An. p. eq. num. term. inf.* Appl. ad curv. mech., *Comm. ep.* N. II, *ed. B. et Lef.* p. 72, *Opusc.* ed *Cast.* t. I, pp. 24—25: «.... quicquid vulgaris Analysis per aequationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, haec per aequationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec aequationes minus exactae; licet omnes earum terminos, nos homines et rationis finitae nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus....» Къ концу разсматриваемаго періода, формальный характеръ этого возрѣнія становится болѣе рѣзкимъ: ср. *H. Wronski*. Réfutation de la th. d. f. analyt. de Lagrange. Paris 1811, Second mémoire: Insuff. de la dém. du Th. de Taylor. tentée par. M. Poisson, pp. 56 suiv.: «.... pour employer ces fonctions (б. ряды) dans l'Algorithmie, il suffit, dans tous les cas, de tenir compte du nombre indéfini de leurs termes: c'est là une vérité connue de tous les géomètres etc.» (NB. p. 58 въ концѣ).

3) Въ неоконченномъ и не изданномъ сочиненіи *Traité de Calcul intégral*, представленномъ Пар. К. Ак. Н. въ 1778—1782 годахъ; сохранив-

надлежитъ *Арбогасту*, который развилъ ее въ представленной въ 1789 году Парижской Академіи Наукъ запискѣ подъ заглавіемъ: «*Опытъ изложенія новыхъ началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій независимыхъ отъ теорій безконечно-малыхъ и предѣловъ*». Этотъ мемуаръ не былъ никогда опубликованъ и Арбогастъ изложилъ лишь его руководящіе принципы въ предисловіи къ другому своему сочиненію «о деривацiяхъ» напечатанному въ 1800 году[1]). Принципы эти, хорошо резюмирующіе все новое направленіе въ ученіи о функціяхъ, состоятъ изъ слѣдующихъ шести предложеній[2]):

I. Если уравненіе между величинами зависящими отъ какой нибудь перемѣнной и постоянными существуетъ для всякихъ значеній этой перемѣнной; члены независимые и члены зависимые составляютъ равенства порознь. Это начало, называемое Арбогастомъ «принципомъ отдѣленія независимыхъ количествъ»[3]), лежитъ въ основаніи метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

шіяся рукописныя части этого трактата вмѣстѣ съ корректурами первыхъ печатныхъ листовъ хранятся въ библіотекѣ фр. Института—въ трехъ томахъ. Повидимому съ этимъ сочиненіемъ болѣе или менѣе близко ознакомился одинъ Лакруа, написавшій о немъ небольшую замѣтку въ началѣ перваго тома хран. въ библ. Института; см. *Ch. Henry*. Les méthodes d'approx. pour les éq. d. etc. mém. inédit de J.-A.-N. C. M. de Condorcet, avec une notice sur sa vie et ses écrits mathématiques. Extrait du *Bull. Bonc.* T. XVI, mai 1883, Rome 1884, pp. 20–23; см. о томъ же: *Lacroix*. Traite du c. d. et du c. i. T. I, pp. XXII—XXIV.—*Jean-Antoine-Nicolas Caritat Marquis de Condorcet* род. 17 сент. 1743 г. ум. 8 апр. 1794 г. О его жизни и математич. работахъ см., кромѣ указанной статьи Henry біографію написанную Араго: *Oeuvres de Fr. Arago*, deux. éd. p. p. *Barral*, Notices biogr. t. II, pp. 117–246.—Caritat de Condorcet, Biogr. lue en séance publ. de l'Ac. d. S. le 28 déc. 1841 (*Mém. de l'Ac. d. S.* t. XX).

1) См. прим. 1 на стр. 310. *Calc. d. dér.* Préf. p. XI–XII.

2) *Ibid.* pp. XI—XIV, n(*).

3) «principe de la séparation des quantités indépendantes», *Arb.* l. c. p. XII, n(*). «Il me semble», говоритъ Карно «que Descartes, par sa méthode des indérminées, touchait bien près à l'Analyse infinitésimale, ou plutôt il me semble que l'An. i. n'est autre chose qu'une heureuse application de la m. d. i.». *Carnot.* Réfl. sur la métaph. du calc. inf. Paris 1797.

II. Принципъ Лагранжа: въ разложеніи $f(x+\xi) = fx+u'\xi+\frac{u''^2}{2}+\frac{u'''\xi^3}{2.3}+\ldots$, коеффиціенты u', u'', u''',.... суть функціи отъ x производящіяся одна изъ другой по тому же закону и по тому же способу по которымъ u' производится изъ fx, «*Дифференціалы*» $u'\xi$, $u''\xi^2$, $u'''\xi^3$...., можно разсматривать, не принимая въ разсчетъ числовыхъ знаменателей, какъ *части* или *члены* различныхъ порядковъ «конечной» разности $f(x+\xi)-fx$.

III. Всякая функція отъ $x+\xi$ можетъ быть разложена въ рядъ расположенный по цѣлымъ степенямъ ξ, если только предположить, что x не имѣетъ *особеннаго частнаго* значенія, для котораго коеффиціенты ряда дѣлаются безконечно-большими и разложеніе невозможнымъ; существуютъ функціи, для которыхъ имѣютъ мѣсто такіе случаи; но въ этихъ случаяхъ дифференціальное исчисленіе неприм\u0463нимо.

IV. Въ разложеніи $f(x+\xi)$ можно всегда выбрать для ξ конечное значеніе, столь малое, чтобы любой членъ этого разложенія былъ больше суммы всѣхъ слѣдующихъ. Нужно замѣтить, что уже Эйлеръ и нѣкоторые другіе геометры, полагавшіе въ основаніе дифференціальнаго исчисленія представленія о безконечно малыхъ или предѣлахъ, пользовались въ сущности тѣми же предложеніями I, III и IV для развитія теоріи этого исчисленія и его приложеній [1]).

V-me éd. P. 1881 pp. 123–124. Cp. *Descartes* Géom. L. II n. é. d. p. 40: «.... je veux bien en passant vous avertir que l'invention ..... peut servir à une infinité d'autres problèmes, et n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers».

[1]) Cp. ex. gr. *Euler* Inst. Calc. diff. Cap. IV, art. 112 sqq., ed. Tic. 1787 pp. 80 sqq. *L'Huilier*. Expos. élém. des pr. d. calc. sup. Berlin. 1786, pp. 25 suiv., 38, 43 suiv., 52 suiv., 198. — NB. примѣч. къ art. 518 второй книги Эйлерова Введенія, *Lab.* t. II. p. 296, гдѣ разыск. *min.* функціи $y=x^x$, посредств. разлож. въ рядъ по восх. степ. u, $(x+u)$. $l(x+u)$.

V. Пусть дана плоская кривая ордината которой y_1, соотвѣтствующая абсциссѣ $x+\xi$, представлена рядомъ $y_1=y+y'\xi+\frac{y''\xi^2}{2}+\frac{y'''\xi^3}{2.3}+\ldots$; развернувъ подобнымъ же образомъ въ рядъ ординату u_1 другой кривой, уравненіе которой отнесенное къ тѣмъ же осямъ координатъ содержитъ n постоянныхъ, мы получимъ, при той же абсциссѣ $x+\xi$, $u_1=u+u'\xi+\frac{u''\xi^2}{2}+\frac{u'''\xi^3}{2.3}+\ldots$; если мы опредѣлимъ n постоянныхъ второй кривой изъ уравненій:

$$u=y,\ u'=y',\ u''=y'',\ldots\ldots \overset{(n-1)}{u} = \overset{(n-1)}{y},$$

опредѣленная такимъ образомъ кривая будетъ, изъ всѣхъ линій той же природы, та, теченіе которой приблизится наиболѣе къ теченію данной, такъ что черезъ данную точку (x, y) невозможно будетъ провести между этими кривыми новой кривой той же природы что и первая, т. е. съ уравненіемъ содержащимъ n постоянныхъ. Въ частности, при $u=y$, обѣ кривыя проходятъ черезъ одну точку (x, y), при $u=y$ и $u'=y'$ онѣ имѣютъ въ этой точкѣ общую касательную, при $u=y$, $u'=y'$, $u''=y''$ общій кругъ кривизны, такъ что соприкосновеніе ихъ становится все болѣе и болѣе тѣснымъ по мѣрѣ увеличенія числа уравниваемыхъ коэффиціентовъ. — Это число Лагранжъ назвалъ впослѣдствіи *порядкомъ соприкосновенія* данныхъ кривыхъ[1]). «Отсюда вытекаютъ», говоритъ Арбогастъ, «какъ частные случаи, всѣ формулы подкасательныхъ, поднормалей, радіусовъ соприкосновенія, формулы для точекъ перегиба, для развертокъ и т. д.».

---

[1]) Théorie d. fonct. anal. Nouv. éd. Sec. part, Chap. II, 10, *Oeuvres de L.* t. IX, p. 198.

VI. Пусть даны три выраженія расположенныя по восходящимъ степенямъ ξ:

$$U = a + b\,\xi + c\,\xi^2 + d\,\xi^3 + \ldots,$$
$$V = a' + b'\,\xi + c'\,\xi^2 + d'\xi^3 + \ldots,$$
$$W = a'' + b''\,\xi + c''\,\xi^2 + d''\xi^3 + \ldots;$$

если величина V не дана, и мы знаемъ только, что она лежитъ между величинами U и W, т. е. меньше одной изъ нихъ и больше другой; если въ двухъ крайнихъ рядахъ первые члены въ извѣстномъ числѣ одного равны порознь соотвѣтственнымъ членамъ другаго, то можно утверждать что рядъ V имѣетъ тоже число первыхъ членовъ равныхъ соотвѣтствующимъ членамъ другихъ рядовъ. Такъ напримѣръ, если $a = a''$, $b = b''$, то и $a' = a$, $b' = b$. Это предложеніе дало возможность Арбогасту пріити путемъ строгаго вывода къ формуламъ для дифференціаловъ площади и дуги любой кривой, какъ въ случаѣ прямолинейныхъ, такъ и въ случаѣ полярныхъ координатъ [1]).

Тѣми же принципами руководился и Лагранжъ въ двухъ своихъ классическихъ трудахъ о высшемъ анализѣ: въ «Теоріи аналитическихъ функцій» и въ «Урокахъ объ исчисленіи функцій», изданныхъ имъ въ 1797 и 1801 годахъ [2]). Такъ какъ «Уроки» суть только повтореніе и дополненіе изложеннаго въ «Теоріи функцій», то намъ удобнѣе всего будетъ разсмотрѣть обѣ книги вмѣстѣ, какъ одно цѣлое сочиненіе.

---

[1]) Ср. *Lagrange Calcul d. f.* Leç IX, *Oeurres de L.* t. X, pp. 101—105; Th. d. f. an. N. éd. Sec. p. Ch. VI, O. de L. t. IX, pp. 238—247.

[2]) Théorie d. f. analytiques, contenant les principes du c. diff., dégagés de toute considération d'inf. p., d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'an. alg. d. quantités finies. Paris, Prairial an V (1797); Nouv. éd. revue et augmentée par l'Auteur, Paris 1813. — Leçons sur le calcul des fonctions. Девятнадцать первыхъ лекцій были читаны Лагр. въ Полит. Школѣ втеченіи VII (1799) года и появились впервые, съ прибавленіемъ двадцатой въ X т. нов. изд. *Séances des Écoles Normales*, an IX (1801), а затѣмъ перепеч. въ XII тетради *Journ. de l'Éc. Pol.* an XII (1804). Второе изданіе съ прибавл. XXI и XXII лекцій напечат. отдѣльно въ Парижѣ въ 1806 г. in 8°, а затѣмъ въ XIV тетр. Журн. П. Ш. въ 1808 г. Въ полн. собр. соч. Л. напечатан. посл. изд. *Th. d f. a.* и *C. d. f.*

Послѣ краткаго историческаго введенія, гдѣ говорится о различныхъ методахъ изложенія дифференціальнаго исчисленія, о методѣ рядовъ и его судьбѣ у Ньютона[1]), Лагранжъ приступаетъ къ главному основному вопросу теоріи функцій — къ разложенію функціи отъ приращеннаго аргумента $f(x+i)$ по восходящимъ цѣлымъ степенямъ приращенія i. Вопросъ этотъ для Лагранжа, какъ и для другихъ современныхъ ему ему математиковъ, не приводился къ изслѣдованію возможности существованія такого ряда, что имѣетъ смыслъ лишь въ геометрической теоріи функцій и не имѣло никакого значенія съ точки зрѣнія «формальной» теоріи Лагранжа. Возможность разложенія въ алгебрическіе ряды считалась характерной для аналитическихъ функцій. Общей формой алгебрическаго ряда признавалась строка:

$$fx+ai^{\alpha}+bi^{\beta}+ci^{\gamma}+\ldots,$$

гдѣ a, b, c, ... зависятъ отъ x, а α, β, γ, ... суть раціональныя числа[2]), и нужно было только доказать, что для функціи fx, въ нормальныхъ частяхъ ея хода, такая строка возможна лишь для цѣлыхъ и положительныхъ показателей α, β, γ .... Прежде всего устраняются отрицательные показатели, дающіе строкѣ, при $i=0$, безконечно-большое значеніе, вмѣсто конеч-

[1]) *Th. d. f. an.* Intr., *O. de L.* t. IX pp. 16—20. Въ первомъ изданіи объ Арбогастѣ сказано: «Depuis, Arbogast a présenté à l'académie des sciences un *beau* mémoire où la même idée est exposée avec des développemens et des applications qui lui appartiennent. *Cet ouvrage ne doit rien laisser à désirer sur l'objet dont il s'agit*; mais l'auteur n'ayant pas encore jugé à propos de le faire paraître,......» (*Th. d. f. a.* prem. éd., prem. partie art. 7. p. 5). Во второмъ изданіи слова напечат. здѣсь курсивомъ выпущены, а вмѣсто фразы «mais l'auteur etc.» сказано: «Mais l'Auteur n'ayant encore rien publié sur ce sujet» съ прим. «(*) L'Ouvrage que feu Arbogast a donné en 1800, sous le titre de *Calcul des dérivations* a un objet différent, comme l'Auteur en avertit lui-même à la fin de sa Préface». Лагранжъ очевидно принималъ слишкомъ близко къ сердцу вопросъ о пріоритетѣ «теоріи ан. ф.».

[2]) Ср. сказ. на стр. 265—266 *Lacroix*. T. d. c. d. et d. c. i. Ch. I, art 17, t. I, pp. 160 suiv.

наго fx. Члены съ дробными показателями, содержащіе радикалы, и имѣющіе поэтому нѣсколько значеній, могутъ быть только въ разложеніи многозначной функціи, да и то лишь въ особенныхъ случаяхъ: различныя значенія радикаловъ, сочетаясь съ значеніями перваго члена давали бы для $f(x+i)$ больше значеній чѣмъ для fx, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда для даннаго x въ fx сливаются различныя значенія функціи [1]). Всѣ эти разсужденія основаны на томъ предположеніи, что формулы разложенія функцій, полученныя чисто формальнымъ, алгебрическимъ путемъ, должны имѣть и алгебрическую общность [2]).

Найдя форму разложенія въ рядъ $f(x+i)$, слѣдуетъ затѣмъ разсмотрѣть ближе это разложеніе и значеніе каждаго коеффиціента ряда. Первый членъ, или коеффиціентъ при i^0 есть fx, такъ что $f(x+i)=fx+Pi$, откуда слѣдуетъ, что разность $f(x+i)-fx$ дѣлится на i. Частное P, полученное отъ этого дѣленія есть новая функція отъ x и i, при $i=0$ принимающая опредѣленное значеніе p, вообще отличное отъ 0. Такимъ образомъ $P=p+iQ$; представляя подобнымъ же образомъ Q въ видѣ $q+iR$, R въ видѣ $r+iS$ и т. д. и исключая изъ уравненій $f(x+i)=fx+iP$, $P=p+iQ$, $q+iR$,

---

[1]) Все равно, будетъ ли x точкой развѣтвленія или нѣтъ; мы увидимъ потомъ какъ Лагранжъ различалъ эти два случая.

[2]) Эта алгебрическая точка зрѣнія рѣзко отличаетъ другъ отъ друга работы по теоріи функцій старыхъ и новыхъ аналистовъ. *Cauchy* говоритъ объ этомъ во введеніи въ Алгебр. Анализъ: Cours d'An. d. l'Éc. R. Pol. 1-re P. An. Alg. Intr. p. ij. — *Th. d. f. a.* N. Éd. Pr. p. Ch. I, art. 1 — 2, *O. de L.* t. IX, pp. (21)—23, *Calc. d. f.* Leç. II, *O. de L.* t. X, pp. 13—15; *Пуассонъ* далъ потомъ другое доказательство этой теоремы Лагранжа; см. *Correspondance de l'Éc. Pol.* en 1804—1812 publ. p. Hachette. 3 vols. Paris 1813—16, n° 3, Vol. I, pp. 52 suiv.: Démonstration du théorème de Taylor par *M. S.-D. Poisson*, также *Lacroix* l. c. t. I, pp. 160 suiv.—Доказательство Пуассона, основанное на найденномъ Лагранжемъ въ 1772 году методѣ двойнаго приращенія. о которомъ мы сейчасъ будемъ говорить, нисколько для насъ не интересно.

$R = r + iS, \ldots$ послѣдовательно P, Q, R, S и т. д., мы получимъ разложеніе $f(x+i) = fx + ip + i^2q + i^3r + \&c.$[1]).

Изъ этихъ соображеній легко вывести доказательство упомянутаго нами выше IV-го предложенія Арбогаста, состоящаго въ томъ, что при достаточно малыхъ значеніяхъ i любой членъ разложенія $f(x+i)$ по восходящимъ степенямъ i превышаетъ сумму всѣхъ остальныхъ: въ самомъ дѣлѣ, *остаточные члены* разложенія iP, Q, $iR \ldots$ суть функціи отъ i обращающіяся въ O при $i = O$, слѣдовательно плоская кривая, абсциссы точекъ которой суть значенія i, а ординаты — соотвѣтствующія значенія одной изъ этихъ функцій, проходитъ черезъ начало координатъ. Если это начало не есть особенная точка кривой — чего не можетъ быть если данное значеніе перемѣнной x не есть *особенное* для функціи fx[2])—то кривая приближается непрерывно къ этой точкѣ, такъ что при достаточно маломъ i и при всѣхъ меньшихъ соотвѣтствующія ординаты не превышаютъ произвольно малой величины. Отсюда слѣдуетъ, что можно выбрать настолько малое i, чтобы iQ было $< p$, $iR < q$, и т. д. и слѣдовательно чтобы ip было $> iQ$, $i^2q > i^3R$ и т. д., что и требовалось доказать[3]).

«На эту теорему», говоритъ Лагранжъ, «слѣдуетъ смотрѣть, какъ на одинъ изъ основныхъ принциповъ развиваемой нами теоріи; она подразумѣвается въ дифференціальномъ исчисленіи и въ исчисленіи флюксій и можно сказать, что на этой именно теоремѣ основано наибольшее число приложеній

---

[1]) *Th. d. fonct. an* 1-re P Ch. I, art. 3, *O. de L.* t. IX, pp. 23—24.

[2]) «a moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion et par un raisonnement analogue à celui du n°2, le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point». Въ этомъ мѣстѣ а. ф. Лагранжъ отступаетъ отъ принятой имъ чисто алгебр. точки зрѣнія на ф-ціи; въ томъ же порядкѣ идей произв. конечно, и изслѣд. объ остат. членѣ Т. ряда въ гл. VI; ср. *Calc. d. f.*, Leç. IX, *O. de L.* t. X, pp. 100—101.

[3]) *Th. d. f. a.* Pr. p. Ch. I, 6, *O. de L.* t. IX, pp. 28—29.

этихъ исчисленій, въ особенности къ геометріи и механикѣ»[1]). Функціи $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, ..., какъ уже давно было замѣчено Лагранжемъ[2]), могутъ быть замѣнены другими, которыя отличаются отъ нихъ постоянными множителями и которыя происходятъ одна изъ другой по тому же закону, по какому p происходитъ изъ данной функціи fx. Справедливость этого легко выяснить, придавъ къ $x+i$ новое приращеніе o и сравнивъ между собою тожественныя разложенія $fx+p\times(i+o)+q\times(i+o)^2+r\times(i+o)^3+\&c=fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\&c.$ и $f(x+o)+i\,p(x+o)+i^2\,q(x+o)+\&c=fx+f'x\times o+\ldots+i(p+p'\times o+\ldots)+i^2(q+q'\times o+\ldots)+\&c.$, откуда слѣдуетъ, что $p=f'x$, $q=\frac{p'}{2}$, $r=\frac{q'}{3}$, $s=\frac{r}{4}$, ..., или $p=f'x$, $q=\frac{f''x}{2}$, $r=\frac{f'''x}{2.\,3}$, $s=\frac{f^{IV}x}{2.3.4}$, ... гдѣ $f'x$ есть коеффиціентъ при первой степени приращенія перемѣнной въ разложеніи приращенной функціи $f(x+o)$ или $f(x+i)$, $f''x$ такой же коеффиціентъ въ разложеніи $f'(x+i)$, $f''x$ коеффиціентъ при i въ разложеніи $f''(x+i)$ и т. д.[3]). Каждая функція ряда $f'x$, $f''x$, $f'''x$, $f''''x$, ... есть *производная* предъидущей и всѣ они суть *производныя послѣдовательныхъ порядковъ первоначальной* функціи fx[4]). Полезно замѣ-

---

[1]) *Th. d. f. a.* Pr. p. Ch. I, *O. de L.* t. IX, p. 29: «.... c'est par cet endroit qu'on peut dire que ces calculs donnent le plus de prise sur eux,....».

[2]) Въ мемуарѣ 1772 г., ср. прим. 1 на стр. 318.

[3]) *Th. d. f. an.* Ch. II (Nouv. éd.), art. 8—9 *O. de L.* t. IX, pp. 31—33; *Calc. d. f.* II Leç. *O. de L.* t. X, pp. 15—17.

[4]) *Ibid.* pp. 33 & 17. *resp.* Терминъ *произв. ф.* введенъ въ т. а. ф. впервые. Обозначенія произв. ф-ій Лагранжъ употр. въ мем.: *Nouvelles recherches sur la nature et la propag. du son*, *Miscell. Taur.* t. II, ann. 1760—1761 p. 63. «Soit supposé $\frac{d.\,\varphi x}{dx}=\varphi' x$, $\frac{d.\,\varphi' x}{dx}=\varphi'' x$ & $\int \varphi x dx = {}'\varphi x$, $\int {}'\varphi x\, dx = {}''\varphi x$ &c.....». Въ мем. *Sur les princ. fond. de la méchanique*, помѣщен. въ томъ же томѣ, *Foncenex* говоритъ объ этомъ обознач. производныхъ какъ объ обыкновенномъ: $\xi' x$, $\xi'' x$, $\xi''' x$ &c. dénotant selon l'usage ordinaire les diff. succ. de ξx div. par dx (M. T. t. II, p. 321). Ср. обозначеніе $f_{,}x$ первонач. ф-іи отъ fx, котор. Лагр. предложилъ въ *Résolut. d. éq. numér.* (O. de L.

тить еще, что *первая производная* $f'x$ есть значеніе частнаго $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ при $i=o$, а слѣдовательно вообще $f^{(n)}x = [f^{(n-1)}(x+i)-f^{(n-1)}x] : i$ при $i=o$. Этимъ замѣчаніемъ можно воспользоваться для разложенія въ ряды нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій [1]). Разсмотрѣніе такихъ *специальныхъ значеній* отношеній вида $\left[\frac{Fx_1-Fx}{x_1-x}\right]_{x_1=x}$ послужило еще въ 1764 году англійскому геометру *Ландену* для обоснованія особой, изобрѣтенной имъ вѣтви высшаго анализа, которую онъ называлъ «резидуальнымъ анализомъ» и которою хотѣлъ онъ замѣнить исчисленіе безконечно малыхъ [2]).

Алгориѳмъ исчисленія производныхъ функцій легко вывести изъ ихъ опредѣленія посредствомъ простыхъ алгебрическихъ дѣйствій и примѣненія I-го принципа Арбогаста [3]). Не трудно найти и производныя отдѣльныхъ элементарныхъ функцій, зная формулы разложенія ихъ въ безконечные ряды: найдя производную отъ степени, нетрудно вывести формулу бинома Ньютона [4]); эта формула легко приводитъ и къ отысканію

---

t. VIII) и затѣмъ въ *Calc. d. fonct.* Leç. XVII (O. de L. t. X, pp. 259—260. Corr. n. 1) p. 147 *Reiff.* Gesch. d. un. R.

[1]) *Th. d. f. a.* N. éd. Ch. I, art. 4—5, *O. d. L.* t. IX, pp. 25—28.

[2]) *John. Landen.* род. 1719—ум. 1790.—См. Discourse concerning the Residual Analysis: a new branch of the algebraic art. London 1758; Ланденъ здѣсь обозначаетъ отношеніе $(y-u)$: $(x-v)$ черезъ $[x \mid y]$, а значеніе его при $v=x$ и $u=x$ черезъ $[x \,\underline{'}\, y]$ (p. 12) также $\{[x \,\underline{'}\, y]-[v \,\underline{'}\, y]\} : (x-v)$ при $v=x$, черезъ $[x \,\underline{''}\, y]$ (p. 24).—The Residual Analysis a new branch &c. Book. I London 1764; см. Ch. I, 4, p. 8, гдѣ ввод. терминъ *special value* и обозн. $[x \,\underline{'}\, y]$, $[x \,\underline{''}\, y]$, $[x \,\underline{'''}\, y]$ и т. д. Анализъ Л. основанъ, разумѣется, на разлож. въ ряды.—Лагранжъ считаетъ его своимъ предшественникомъ въ провед. нов. взглядовъ на начала дифф. и инт. и. (*Th. d. f. a.* Intr. *O. d. L.* t. IX, p. 18).

[3]) *Th. d. f. an.* Nouv. éd. Pr. part. Ch. III, art. 15—17, *O. de L.* t. IX, pp. 39—44, *Calc. d. f.* Leç. VI, *O. de L.* t. X, pp. 48—61.

[4]) *Ibid. resp.* Ch. III, art. 11, pp. 34—35 & Leç. III, pp. 20—27. Въ *Leç. s. le C. d. f.* данъ полный выводъ производной отъ x^m: полагая

производной отъ показательной функціи $fx = a^x$ —: $f(x+i) = a^x . a^i$; $a = 1 + b$, $a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2}b^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}b^3 + \ldots$; коэффиціентъ при i въ этомъ выраженіи есть $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots = A$, слѣд. $f'x = Aa^x$ и $a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \ldots$; полагая $x = \frac{1}{A}$, получимъ: $a^{\frac{1}{A}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ или $A = lha$ [1]). Логариѳмическая функція $fx = logx$ есть функція обратная отъ показательной и опредѣляется уравненіемъ $x = a^{fx}$; полагая $x + i = a^{fx+o} = a^{fx} . a^o$, гдѣ $o = if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \ldots$, найдемъ: $\frac{i}{x} = Ao + \frac{A^2o^2}{2} + \ldots$, или $\frac{1}{x} = Af'x + \frac{i}{2}[Af''x + A^2f'^2x] + \ldots$; откуда, въ силу «принципа отдѣленія независимыхъ количествъ» имѣемъ: $f'x = \frac{1}{Ax} = \frac{1}{xlha}$ [2]).

«Синусы и косинусы угловъ, разсматриваемые аналитически, суть не что иное какъ выраженія составленныя изъ мнимыхъ экспоненціаловъ; такимъ образомъ можно вывести ихъ производныя изъ производныхъ показательныхъ функцій» [3]).

$(1+\omega)^m = 1 + \omega Fm + \ldots$. Лагранжъ умножаетъ это равенство на $(1+\omega)^n = 1 + \omega Fn + \ldots$ и находитъ т. о. что $F(m+n) = F(m) + F(n)$, и по этому условію опредѣляетъ форму ф-іи Fm —: $F(m+i) + F(n-i) = Fm + Fn$, а по разлож. $F(m+i)$ и $F(n-i)$ въ ряды по восх. степ. i и отдѣленіи незав. колич.: $F'm = F'n$, или $F'm = a$, откуда $Fm = am + b$; изъ условій $F0 = 0$ и $F1 = 1$, находимъ что $Fm = m$.—Ср. II. с. въ прим. 2 на стр. 267.

[1]) *Th. d. f. a.* N. éd. Ch. III, 11 — 12, *O. de L.* t. IX, pp 35 — 37. *Calc. d. f.* Leç. IV, *O. de L.* t. X, pp. 26—31.

[2]) *Ibid. resp.* art. 13, pp 37—38 & pp. 31—33.

[3]) *Th. d. f. a.* N. éd. Ch. III, art. 14, *O. de L.* t. IX, p. 38. Формулы Эйлера Л. доказ. въ гл. IV, art. 21 — 22, *O. d. L.* t. IX, pp. 50 - 54.

Отъ разсмотрѣнія аналитическихъ функцій въ общемъ случаѣ, когда онѣ разлагаются въ рядъ по формулѣ Тейлора, Лагранжъ переходитъ къ особымъ случаямъ, когда эта формула неприменима (est en défaut) — что можетъ быть только для опредѣленныхъ изолированныхъ значеній перемѣнной [1]). Онъ останавливается прежде всего на функціяхъ содержащихъ радикалы и изслѣдуетъ значенія такой функціи при тѣхъ величинахъ перемѣнной, при которыхъ одинъ или нѣсколько радикаловъ исчезаютъ въ самой функціи и ея производныхъ. Тутъ различаетъ онъ два случая: когда подрадикальная функція обращается въ 0, и когда исчезаетъ множитель при радикалѣ. Въ первомъ случаѣ, при данномъ значеніи a перемѣнной x, радикалъ исчезаетъ какъ въ самой функціи, такъ и во всѣхъ ея производныхъ, и разложеніе $f(a+i)$, какъ уже было раньше доказано, можетъ быть вѣрнымъ только при допущеніи въ немъ соотвѣтственныхъ дробныхъ степеней i. Во второмъ случаѣ радикалъ снова появляется въ одной изъ послѣдовательныхъ производныхъ $f'a$, $f''a$.... и Лагранжево доказательство Тейлорова разложенія сохраняетъ всю свою силу; такъ напримѣръ, если радикалъ ф-іи fx умноженъ на $(x-a)^m$,

---

Въ V урокѣ о ф-іяхъ Л. выводитъ произв. *Cos x* и *Sin x* непосредственно; *O. de L.* pp. 40–45.

[1]) *Th. d. f. anal.* N. éd. Pr. p. Ch. V, art. 21. O. de L. t. IX, p. 57, *Calc. d. f.* Leç. 8-me, O. de L. t. X, p. 68: «.... ce développement ne peut contenir que des puissances entières et positives de la quantité dont la variable est augmentée, tant que cette variable demeure indéterminée....». Въ этихъ выраженіяхъ опять проявляется тотъ алгебраическій взглядъ на природу функцій, о которомъ мы говорили въ прим. 2 на стр. 325: Алгебрическія преобразованія функцій выведенныя изъ общихъ соображеній, безъ вниманія къ ихъ конкретнымъ особенностямъ, вѣрны вообще («nous avons déduit de cette forme les lois de la dérivation des fonctions»; ср. конецъ 8-го урока о ф.) и въ особыхъ случаяхъ дѣлаются *недостаточными* (en défaut) лишь по тому, что соотвѣтств. формулы становятся *призрачными* (illusoires), не имѣющими опредѣленнаго смысла; съ такой точки зрѣнія понятно, что Л. a priori могъ прійти къ своей теоремѣ art. 30 первой части *Th. d. f. an.*—Ср. еще III на стр. 321.

и гдѣ m цѣлое положительное число, и самъ не обращается въ 0 при $x=a$, то онъ исчезаетъ въ функціяхъ fa, $f'a, \ldots$ $f^{(m-1)}a$, но появляется снова въ $f^{(m)}a$ и во всѣхъ слѣдующихъ производныхъ, и формула Тейлора продолжаетъ давать (въ окрестности точки a) значенія fx для *всѣхъ* ея вѣтвей.

Разложеніе функціи $f(a+i)$ можетъ, такимъ образомъ, содержать i подъ радикалами только въ томъ случаѣ, когда въ ней исчезаетъ, при $x = a$, какая нибудь подрадикальная функція. Чтобы изслѣдовать ближе этотъ случай, Лагранжъ прежде всего замѣчаетъ, что функціи $f'(x+i)$, $f''(x+i), \ldots$ суть равнымъ образомъ производныя отъ $f(x+i)$ и по x и по i, и слѣдовательно, допустивъ, что разложеніе $f(a+i)$ содержитъ членъ Ai^m, гдѣ A—функція отъ a, а m не есть цѣлое положительное число, мы должны предположить, что разложенія $f'(a+i)$, $f''(a+i), \ldots$ содержатъ члены mAi^{m-1}, $m(m-1)Ai^{m-2}, \ldots$ Отсюда слѣдуетъ, что если m отрицательное число, то всѣ функціи fx, $f'x$, $f''x \ldots$ дѣлаются безконечно большими при $x=a$. Если же m положительное, но не цѣлое число и $n=Em+1$, то членъ $m(m-1)\ldots(m-n+1)Ai^{m-n}$ и всѣ слѣдующіе при $i=0$ дѣлаются безконечно большими, а всѣ предъидущіе — обращаются въ нули, такъ что при $x = a$ производныя n-го и всѣхъ слѣдующихъ порядковъ безконечно велики.

Такимъ образомъ, если n указатель порядка первой изъ послѣдующихъ производныхъ обращающихся въ ∞ при $x=a$, то разложеніе $f(a+i)$ должно содержать членъ вида Ai^m гдѣ m число заключенное между $n-1$ и n. Если $n=o$, т. е. сама

функція fa безконечно велика, то разложеніе $f(a+i)$ должно содержать отрицательныя степени i [1].

«Слѣдуетъ примѣнять къ логариѳмамъ заключенія сдѣланныя относительно дробныхъ степеней; ибо.... логариѳмы соотвѣтствуютъ дробнымъ степенямъ съ безконечно малыми показателями т. е. радикаламъ безконечно большихъ степеней, и по этой то причинѣ всякому числу отвѣчаетъ всегда безчисленное множество его логариѳмовъ» [2].

Такъ, если функція содержитъ логариѳмы, разложеніе $f(x+i)$ въ рядъ можетъ содержать, въ частномъ случаѣ $x=a$, члены вида $i^m(log i)^m$, а ея производныя $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, ... члены $i^{m-1}(log i)^n$ и $i^m(log i)^{n-1}$; $i^{m-2}(log i)^n$, $i^m(log i)^{n-1}$ и $i^m(log i)^{n-2}$; ...... и т. д. При $i=o$, $log i=\infty$, а $\left\{i^p(log i)^q\right\}_{i=0} = 0$ при m положительномъ и ∞ при p отрицательномъ для всякаго q; если одна изъ производныхъ обращается въ безконечность при $x = a$, то безконечно велики и всѣ слѣдующія [3].

«Можно, такимъ образомъ» говоритъ Лагранжъ «заключить вообще, что разложеніе $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+\&c.$ функціи $f(x+i)$ можетъ сдѣлаться ошибочнымъ (devenir fautif), для опредѣленнаго значенія x, только тогда, когда одна изъ функцій fx, $f'x$, $f''x$, $\&c.$ сдѣлается безконечно большой при этомъ значеніи x, и что это разложеніе будетъ ошибочнымъ

---

1) *Leç. s. l. calc. d. fonct.* 8-me Leç., *O. de L.* t. X, pp. 69—71, *Th. d. f. an.* N. éd. Ch. V, art. 24, 29—30, *O. de L.* t. IX, pp. 57—58, 64—65.

2) *Calc. d. f.*, l. c. p. 71, cp. Leç IV, *O. de L.* t. X, p. 36, гдѣ для выраж. *logs.* даются формулы: $\frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)$ и $\frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$, при r безкон. больш.

3) *Ibid.* Leç. VIII. *O. de L.* t. X, pp. 71, 72.

только начиная съ того члена, который обращается въ безконечность» [1]).

Когда функція fx обращается въ безконечность при значеніи a перемѣнной x представляющимъ собою корень уравненія $\frac{1}{fx}=0$ (полюсъ функціи fx)——форму разложенія ($fa+i$) легко найти: пусть $\frac{1}{fx}=\frac{(x-a)^m}{Fx}$, гдѣ Fx функція не обращающаяся ни въ 0 ни въ ∞ при $x=a$ [2]); тогда $f(a+i)=\frac{F(a+i)}{i^m}$, откуда видно, что разложеніе $f(a+i)$ будетъ содержать члены вида $\frac{1}{i^m}$, $\frac{1}{i^{m-1}}$ и т. д. [3]).

Функція fx разбивается такимъ образомъ на двѣ части, изъ которыхъ одна не обращается въ безконечность при $x=a$, а другая состоитъ изъ суммы простыхъ алгебрическихъ дробей

---

1) *Calc. d. f.* Leç VIII, *O. de L.* t. X, p. 72, *Th. d. f. an.* N. éd Pr. p. Ch. V, art. 30, *O. de L.* t. IX, pp. 65—66. Доказательство этой теоремы (въ нѣсколько иной формулировкѣ) со всей строгостью и общностью было дано впервые (какъ мы потомъ увидимъ) *П. Л. Чебышевымъ.* Объ этой т. и о добавл. которое слѣд. сдѣлать въ ея выраженіи чтобы придать ему болѣе ясности мы будемъ говорить подробно впослѣдствіи.—Прибавка: «et que ce développement ne sera fautif qu'a commencer du terme qui deviendra infini» показываетъ, что разложеніе въ рядъ и въ этомъ особ. случ. продолжаетъ давать тѣ производныя, котор. не обращ. въ безконечн.—Въ art. 31, 32 Th. d. f. (pp. 66—68) и въ соотв. мѣст. VIII ур. о функц. (pp. 72, 73) даются примѣры; въ art 25—28 (pp. 58—64) *Th. d. f. a.* Лагранжъ даетъ правила для дифф. неявн. ф-ій въ тѣхъ случаяхъ, когда радикалъ исчезаетъ изъ самой ф-іи и появляется снова въ одной изъ ея производныхъ, а также показ. способъ нахожд. ист. знач. выраженій принимающихъ неопред. видъ $^0/_0$; *Calc. d. fonct.* Leç. VIII, pp. 74 suiv

2) «En général, une fonction de x ne peut devenir nulle lorsque $x=a$, à moins qu'elle contienne un facteur $(x-a)^m$, m étant un nombre positif quelconque», VIII-me *Leç. s. le calc. d. f.* pp. 81—82 d. *O. de L.* t. X.

3) *Lec. s. le calc. d. fonct.* Leç. VIII, l. c. pp. 68—69.

$$\frac{\alpha}{(x-a)^m}+\frac{\beta}{(x-a)^{m-1}}+\frac{\gamma}{(x-a)^{m-2}}+\ldots+\frac{\mu}{x-a}$$ гдѣ коэффиціенты $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ суть функціи отъ a. Опредѣленіе этихъ коэффиціентовъ послужило предметомъ интереснаго изслѣдованія Эйлера, сообщеннаго имъ Петербургской Академіи Наукъ въ 1780 г. подъ заглавіемъ: «Новый способъ разложенія раціональныхъ дробей на простыя» [1]); въ этой работѣ *Коши* усмотрѣлъ впослѣдствіе первые зачатки своего *исчисленія вычетовъ* [2]).

Эйлеръ разсматриваетъ алгебрическую или трансцендентную однозначную функцію fx въ видѣ дроби $\frac{P}{Q}$ въ которой числитель не обращается въ 0, а знаменатель исчезаетъ при $x=o$. Разлагая P и Q въ ряды по формулѣ Тейлора и полагая $x-a=i$ [3]), мы представимъ fx въ видѣ $\frac{A+Bi+Ci^2+Di^3+\&c.}{\mathfrak{A}i+\mathfrak{B}i^2+\mathfrak{C}i^3+\mathfrak{D}i^4+\&c.}$, гдѣ A отлично отъ 0, а первые коэффиціенты знаменателя (въ конечномъ числѣ) могутъ быть равны 0, если $x-a$ кратный множитель знаменателя, или a кратный корень уравненія $\frac{1}{fx}=0$. Если a простой корень этого уравненія, то, при безконечно маломъ i, $fx=\frac{1}{i}\cdot\frac{A+Bi}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}i}=\frac{1}{i}(\alpha+\beta i)$, откуда

---

1) Nova Methodus Fractiones quascunque rationales in Fractiones simplices resolvendi. *Acta Acad. Sc. Imper. Petr.* pro Anno 1780. P. I, Petr. 1783, pp. 32—46.

2) *A. L. Cauchy*. Exercices de Mathématiques, 1827, t. II, pp. 315 suiv. *Oeur. compl. d'A. Cauchy* II-e sér. t. VII, pp. 363 suiv : Sur un Mémoire d'Euler dans lequel ce trouve le germe du calcul des résidus.

3) «Noua autem methodus, quam hic sum traditurus, huic innititur principio, quod posito $z=a$ omnes istae fractiones partiales euadant infinitae, dum reliquae omnes manent finitae magnitudinis, ideoque prae illis quasi euanescant...... Nc igitur hic consideratio infiniti moram facessat. statuamus non $z-a=0$, Sed $z-a=\omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam atque adeo ipsam euanescentem......» *Euler*. l. c. p. 34.

$\alpha=\frac{A}{\mathfrak{A}}$, $\beta=\frac{B}{\mathfrak{A}}-\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$; такимъ образомъ, мы получаемъ коэффиціентъ при $\frac{1}{x-a}$ въ разложеніи fx—: $\alpha=\left\{P:\frac{dQ}{dx}\right\}_{x=a}$ [1]).

Если $x-a$ двойной множитель знаменателя, то $\mathfrak{A}=0$, и коэффиціенты α и β получатся изъ формулы $\frac{1}{i^2}\cdot\frac{A+Bi+Ci^2}{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}i+\mathfrak{D}i^2}=\frac{1}{i^2}(\alpha+\beta i+\gamma i^2)$, откуда $\alpha=\frac{A}{\mathfrak{B}}$; $\beta=\frac{B}{\mathfrak{B}}-\frac{AC}{\mathfrak{B}^2}$; $\gamma=\frac{C}{\mathfrak{B}}-\frac{BC}{\mathfrak{B}^2}-\frac{AD}{\mathfrak{B}^2}+\frac{AC^2}{\mathfrak{B}^3}$ и т. д. [2]).

Очевидно, что въ общемъ случаѣ, когда a есть m кратный полюсъ fx, α опредѣляется по очень простой формулѣ: $\alpha=\left\{1.2.3\ldots\ldots m.\ P:\frac{d^mQ}{dx^m}\right\}_{x=a}$. — Эйлеръ примѣнилъ свой способъ къ разложенію на частныя дроби функціи $\frac{Sin\ \varphi}{tang.\varphi-Cos.\varphi}$. [3]).

Изслѣдовавъ законы разложенія аналитическихъ функцій въ безконечные ряды и развивъ общую теорію производныхъ функцій, Лагранжъ сдѣлалъ еще новое важное открытіе въ теоріи Тейлорова ряда: онъ показалъ впервые съ какой степенью точности извѣстное конечное число членовъ этого ряда выражаетъ вещественныя значенія разлагаемой (вещественной) функціи. Теорема объ «остаткѣ» играетъ значительную роль въ при-

---

[1]) *Euler*. l. c. § 3, pp. 34–35, *Casus I*, pp. 35—37.

[2]) *Ibid. Cas. II*, pp. 37—38; см. также *Cas. III*, p. 38 и зам. p. 38–39.

[3]) *Exemplum*, l. c. pp. 39—46; см. еще мемуаръ Эйлера въ его *Opuscula Analytica*, t. II, Petr. 1785, pp. 102—137: De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices, гдѣ разлагаются дроби $\frac{1}{Sin\ \varphi}$, $\frac{\varphi}{Sin\ \varphi}$, $\frac{\varphi\varphi}{Sin\ \varphi}$, $\frac{\varphi^\gamma}{Sin\ \varphi}$, при цѣл. пол. нечетн. γ, $\frac{\varphi^\delta}{Sin\ \varphi}$, при четн. δ, $Cotang\ \varphi$, $1:(Cos\ \zeta-Cos\ \varphi)$, $Sin\ \varphi:(Cos\ \zeta-Cos\ \varphi)$, $1:(Cos\ \varphi-Cos\ 2\varphi)$, $1:Sin\ \varphi^2$, $1:Sin\ \varphi^3$, $1:(tang\ \varphi-Sin\ \varphi)$.

ложеніяхъ Тейлорова ряда къ вопросамъ геометріи и механики; на нее можно смотрѣть какъ на дополненіе къ IV предложенію Арбогаста, вмѣстѣ съ которымъ она служитъ какъ бы переходомъ отъ абстрактной, чисто алгебрической теоріи аналитическихъ функцій къ теоріи этихъ функцій in concreto [1]).

Выводъ Лагранжа основанъ на леммѣ о томъ, что если первая производная $\varphi'x$ остается постоянно конечной и сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ отъ $x=a$ до $x=b$, гдѣ $b>a$ и если P — наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе этой производной между этими предѣлами, то разность величинъ первоначальной функціи для этихъ двухъ значеній перемѣнной: $\varphi b-\varphi a$ заключается между 0 и $2(b-a)P$ и слѣдовательно имѣетъ тотъ же знакъ что и $\varphi'x$ [2]); откуда вытекаетъ, что если $f'p$ наименьшее а $f'q$ наибольшее значеніе $f'x$ между данными предѣлами, то $fb-fa>f'p$ и $<f'q$ [3]). — Доказавъ эту лемму Лагранжъ замѣчаетъ, что полагая $fx=f0+xf'0+\frac{x^2}{2}f''0+\ldots+\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-2)(m-1)}f^{m-1}0+x^mR_m$, мы найдемъ что R_m есть значеніе функціи Fz при $z=1$, опредѣленной уравненіемъ $F'z=\frac{z^{m-1}}{1.2\ldots(m-2)(m-1)}f^{(m)}(x-xz)$ и исчезающей при $z=0$, иными словами

---

[1]) Ср. прим. 2 на стр. 326, *Calc. d. f.* Leç. IX, O. de L. t. X, pp. 85—86.

[2]) *Théorie. d. f. a.* N. éd. Ch. VI, art. 38, *O. de L.* t. IX, pp. 78—80, *Calc. d. f.* Leç. IX, *O. de L.* t. X, pp. 86—90; «Dans le Calc. diff., la conclusion précéd. est une suite immédiate et nécessaire de la manière dont ce Calcul est envisagé, et elle se présente même sans aucune limitation relativement aux valeurs infinies; mais nous allons voir qu'elle est souvent en défaut à cet égard, ce qui servira à montrer la nécessité d'une analyse plus rigoureuse que celle qui sert de base au Calcul diff.» *Ibid.*, p. 89; нельзя назвать слѣдующее затѣмъ замѣч. Л. справедливымъ, ибо уравненіе $y=\int\frac{dy}{dz}dz$ не имѣетъ опред. смысла когда $\frac{dy}{dz}$ станов. безк. больш. между предѣлами интеграціи.

[3]) *Calc. d. f.* Leç. IX, *O. de L.* t. X, pp. 90—91.

$$R_m = \frac{1}{1\,2 \ldots (m-2)(m-1)} \int_0^1 z^{m-1} \cdot f^{(m)}(x - xz)\,dz \ ^{1)}.$$

Приложеніе леммы къ этому виду остатка легко приводитъ къ извѣстной Лагранжевой формулѣ остаточнаго члена [2]).

«До сихъ поръ мы разсматривали производныя функціи», говоритъ Лагранжъ въ началѣ 10-го урока объ исчисленіи функцій, «только по отношенію къ образованію рядовъ, изъ которыхъ онѣ происходятъ; но эти функціи, разсматриваемыя сами по себѣ, представляютъ новую систему алгебрическихъ

---

1) *Th. d. f. anal.* N. éd., Ch. VI, art. 33, 34. (Выводъ теор. Маклор. ср. прим. 2 на стр. 318). 35—37, *O. de L.* t. IX, pp. 69--78.—Лагранжъ пришелъ такимъ образомъ къ той же теоремѣ, которая въ сущности была уже найдена *Даламбертомъ* въ 1754 году: ср. Recherches sur différens points importans du Systême du Monde, par *M. D'Alembert.* Prem. partie, Paris 1754, Ch. VIII, § II. *Où l'on enseigne à trouver la valeur analytique d'une fonction, lorsque la variable que cette fonction renferme croît ou décroit d'une petite quantité* p. 50.—Это первое доказ. Тейл. теор. поср. интегр. исчисл.—Даламб. не имѣлъ въ виду давать остат. члена, онъ у него получился бы въ такомъ видѣ: $\int_0^{h\,(m)} f^{(m)}(z+x)\,dz^m$, который кратный интегралъ, какъ извѣстно, приводится къ Лагранжевой формѣ $\frac{1}{(m-1)!}\int_0^h (h-z)^{m-1} \cdot f^{(m)}(z+x).\,dz$ или, что все равно, $\frac{1}{1.2\ldots(m-2)(m-1)}\int_0^h f^{(m)}(x+h-t)\,t^{m-1}\,dt$. Ср. мемуаръ *Ампéра* въ XIII тетр. Журнала Полит. Школы (t. VI); *Laplace.* Théorie analyt. d. probab. 3-me éd. Paris 1820, pp. 176 — 177 (Livre I, art. 44, *Remarque générale sur la converg. d. séries*), Mécanique céleste, t. I, P. 1799: p. 245; *Lacroix.* Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III, art. 1154—1157, pp. 396—402. Ср. еще Encyclop. Méth. art. *Série* въ концѣ (Condorcet назыв. здѣсь Тейл. теор.--предложеніемъ Даламберта).

2) *Th. d. f. a.* N. éd. Ch. VI, art. 39, 40, *O. de L.* t. IX, pp. 80—83, art. 40, p. 83; «D'où résulte enfin ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa géneralité,....»; въ *Calc. d. fonct.* Leç. IX данъ другой, элементарный выводъ остаточнаго члена, основанный на той же леммѣ: *O. de L.* t. X, pp. 90 95; въ *Th. d. f. a.* Л. примѣнилъ свою формулу къ ф-іи x^m, въ *Calc. d. f.* еще къ a^x, lx, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{arctang}\,x$, (pp. 95 — 99 l. c.).

дѣйствій и служатъ, такъ сказать, ключемъ для преобразованія функцій» [1]).

Предположимъ, что намъ дано уравненіе $F(x, y)=0$, связывающее перемѣнную x съ ея функціей y; взявъ производныя 1-го, 2-го и т. д. порядковъ отъ первой части этого уравненія, мы получимъ столько же новыхъ, которыя сами по себѣ и въ различныхъ комбинаціяхъ между собою и съ даннымъ уравненіемъ представляютъ *производныя уравненія соотвѣтственныхъ порядковъ*, существующія одновременно съ *первоначальнымъ* и содержащія, кромѣ перемѣнной и ея функціи, производныя различныхъ порядковъ отъ этой послѣдней. Эти уравненія играютъ въ анализѣ туже роль, что и дифференціальныя уравненія Лейбница—для преобразованія извѣстныхъ функцій и генераціи новыхъ [2]); онѣ однако имѣютъ то преимущество, что представляютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ не только въ случаѣ вещественныхъ значеній y и x, но и тогда, когда обѣ эти величины дѣлаются мнимыми [3]).

Примѣромъ такого приложенія производныхъ функцій къ теоріи функцій мнимаго перемѣннаго можетъ служить преобразованіе данное Лагранжемъ въ 10-мъ урокѣ о функціяхъ: пусть $y=Sin\,x$, $z=Cos\,x$, тогда $y'=z$, $z'=-y$, и слѣдовательно $z'+y'\sqrt{-1}=(z+y\sqrt{-1}).\sqrt{-1}$; или $(z'+y'\sqrt{-1}):(z+y\sqrt{-1})=\sqrt{-1}$, а возвращаясь къ первоначальнымъ функціямъ: $l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1}+k$, гдѣ постоянная k должна быть опредѣлена сообразно съ природой функцій y и z: при $x=o$, $y=o$, а $z=1$, слѣд. $k=l1=0$; и такъ $l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1}$ и $Cos\,x+Sin\,x.\sqrt{-1}=e^{x\sqrt{-1}}$, откуда легко получить Эй-

---

1) *Calc. d. f.* Leç. X, *O. de L.* t. X, p. 106, *Th. d. f. an.* N. éd., Pr. p. Ch. VII, art. 41, O. de L. t. IX, p. 86.

2) *Th. d. f. an. ibid.* pp. 86–87, *Calc. d. f.* X-me Leç., pp. 106–107. Ср. стр. 180–182, 184, 185.

3) Мы видимъ впрочемъ что это обстоятельство нисколько не останавливало и геометровъ пользовавшихся дифф. исчисл. ср. e. g. *Joh. Bernoulli* ll. c. на стр. 207–209.

леровы выраженія для $\cos x$ и $\sin x$ посредствомъ мнимыхъ экспоненціаловъ, «выраженія», замѣчаетъ Лагранжъ, «открытіе которыхъ можно считать однимъ изъ прекраснѣйшихъ аналитическихъ открытій сдѣланныхъ въ нашемъ вѣкѣ» [1]).

Производное уравненіе какого угодно m-го порядка съ двумя перемѣнными x и y всегда можно разрѣшить, представляя y въ видѣ безконечнаго ряда $y^0+y^{0\prime}x+y^{0\prime\prime}\frac{x^2}{2}+y^{0\prime\prime\prime}\frac{x^3}{2.3}$ $+\&c.$, гдѣ y^0, $y^{0\prime}$, $y^{0\prime\prime}$, и т. д. суть значенія функціи y и ея послѣдовательныхъ производныхъ при значеніи $x=0$ (не обращающимъ ни одной изъ нихъ въ ∞); m первыхъ величинъ этого послѣдняго ряда должны быть выбраны произвольно, или на основаніи другихъ, постороннихъ требованій задачи, и тогда всѣ остальныя могутъ быть найдены изъ даннаго производнаго уравненія и его дальнѣйшихъ производныхъ; такимъ образомъ обнаруживается, что *полное первоначальное уравненіе* производнаго уравненія m-го порядка, и слѣдовательно *полный интегралъ* [2]) дифференціальнаго уравненія m-го порядка съ 2-мя перемѣнными содержатъ m произвольныхъ постоянныхъ [3]). Способъ не-

---

[1]) *Calc. d. f.* Leç. X, *O. de L.* t. X, pp. 108—109 (ср. прим. 1 на стр. 276). Нѣсколько иначе представленъ тотъ же выводъ въ *Th. d. f. a.* N. éd. Pr. p. Ch VII, art. 44, *O. de L.* t. IX, pp. 89—91.

[2]) Лагранжъ, слѣдуя Эйлеру, всегда называлъ *intégrales complètes* или *équations primitives complètes* интегралы содержащіе полное число произвольныхъ постоянныхъ, присваивая названіе *i. générales* или *é. p. générales* только интеграламъ, содержащимъ произв. функціи; въ этомъ поступалъ онъ, быть можетъ, болѣе послѣдовательно, чѣмъ дѣлаютъ обыкновенно новѣйшіе писатели.

[3]) *Th. d. fonct. anal.* N. éd. Pr. p. Ch. VII, art. 45—48, *O. de L.* t. IX, pp. 91—96, *Calc. d. fonct.* XII-me Leç. Théorie générale des équations dérivées et des constantes arbitraires, O. de L. t. X, pp. 142—156. Ср. стр. 182, прим. 2; замѣчаніе это сдѣлано, конечно, впервые Тейлоромъ; *Method. increm.* Prop. VIII, Prob. V, p. 24; «Ubi terminorum coefficientes *c*, *c*, *c*, &c. quorum numerus est *n*, dabuntur per totidem conditiones Problematis». Propos IX, Probl. VI, Scholium, p. 36», затѣмъ повторено и окончательно разъяснено Фонтеномъ: см. Mémoires donn. à l'Acad. R. des Sciences non impr. d. leur temps par *M. Fontaine*, de cette Ac. Paris 1764: Table pp. (2)—(3); Le Calcul integral, seconde méthode (1748), Introduc-

опредѣленныхъ коеффиціентовъ является, конечно, однимъ изъ лучшихъ средствъ для интегрированія производныхъ уравненій безконечными рядами [1]). «Принципъ отдѣленія независимыхъ количествъ» бываетъ полезенъ для той же цѣли и въ связи съ другими аналитическими методами Вотъ, напримѣръ, какъ Лагранжъ находитъ полный интегралъ производнаго уравненія перваго порядка $y'=F(x, y)$ по одному частному рѣшенію $y=p$ при помощи *варіаціи произвольной постоянной* [2]): пусть $y=f(x, a)$ и h значеніе произвольной постоянной a при которомъ $y=p$; дадимъ h приращеніе i и развернемъ $f(x, h+i)$ въ рядъ расположенный по восходящимъ степенямъ i: первый членъ будетъ $f(x, h)=p$, а прочіе члены $o=qi+ri^2+\ldots.$, гдѣ q, $r\ldots.$ функціи отъ x; подставимъ въ данное производное уравненіе вмѣсто y рядъ $p+o=p+iq+i^2r+\ldots.$ и развернемъ функцію $F(x, y)$ по степенямъ i; тогда, замѣчая, что $y'=p'+q'i+r'i^2+\ldots.$ и съ другой стороны $F(x, y)=$

---

tion, pp. 84—87; Sur le mouvement de la Lune autour de la terre d'après le système de la Pesanteur, Lemme II, pp. 407—408 (Леммы I и II, pp. 404—407 содерж. въ себѣ выводъ Тейлоровой теоремы, въ котор. Фонт. слѣд. Ньютону и Тейлору [ср. прим. (1) на стр. 222]).

[1]) Здѣсь, разумѣется, не мѣсто говорить о спос. интегр. уравненій излож. Лагр. въ гл. VII теоріи ан. ф. и въ XIII урокѣ о ф-іяхъ.

[2]) «Cette méthode», замѣч. Лагранжъ, «est aussi applicable, avec l'extension convenable, aux équations des ordres supérieurs; mais... on ne pourra trouver, en général les valeurs de ces fonctions (неизв. ф-ій) que dans le cas où les coefficients seront constants.—Au reste, cette méthode est le fondement des solutions des principaux problèmes de la théorie des planetes». *Th. d. f. an.* Nouv. éd. Pr. p. Ch. VIII въ концѣ. Къ исторіи замѣч. Лагранжева способа см. Sur le mouvement des noeuds d. orbites planétaires, *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berl.*, ann. 1774, *Oeuvres de L.* t. IV, Théorie des var. sécul. des élém. d. Planètes, *ibid.* 1781, *O. de L.* T. V, Два мемуара sur la théorie génér. de la variat. d. const. arb. dans tous les Problèmes de Dynamique въ Mémoires de la Classe d. sc. math. et ph. de l'Institut за 1808 и 1809 гг. *O. de L.* t. VI и мемуаръ *Пуассона* въ XV тетр. J. de l'Éc. Pol.: Mém. sur la var. d. c. arb. dans les quest. de méc. (см. интересный разсказъ о Лагр. и Пуассонѣ у *Arago.* Biographie de Poisson, Not. biogr. t. II, pp. 654, 655); *Lagrange.* Mécanique analytique, 2-me éd. T. I, Sect. V, *O. de L.* T. XI, pp. 345—368.

$F(x,p)+oF'p+\frac{o^2}{2}F''p+\ldots$ [1]), мы получимъ, принимая во вниманіе уравненія $y'=F(x,y)$ и $p'=F(x,p)$—: $iq'+i^2r'+\ldots=$ $iqF'p+i^2[rF'p+\frac{q^2}{2}F''p]+\ldots$, а въ силу принципа отдѣленія независимыхъ количествъ: $q'=qF'p$, $r'=rF'p+\frac{q^2}{2}F''p,\ldots$, которыя уравненія послужатъ для опредѣленія неизвѣстныхъ q, $r,\ldots$; какіе нибудь частные интегралы линейныхъ уравненій перваго порядка, къ которымъ очевидно приводитъ отысканіе этихъ неизвѣстныхъ, достаточны для рѣшенія задачи. Зная, такимъ образомъ, одно частное рѣшеніе нашего уравненія $y=p$, мы найдемъ полный его интегралъ посредствомъ ряда $y=p+iq+i^2r+\ldots$, сходимость котораго зависитъ вообще только отъ величины произвольной постоянной i [2]).

Можетъ однако случиться, что при частномъ значеніи $y=p$ формула Тейлора неприменима къ функціи $F(x,p+o)$ и въ разложеніи ея должны появиться дробныя или отрицательныя степени i [3]); тогда рядъ представляющій y не можетъ сохранять той же формы, хотя первый членъ его будетъ всетаки равенъ p; но можно предположить, что второй членъ

---

[1]) Лагранжъ обозначаетъ черезъ $F'p$, $F''p\ldots$ частныя производныя $F(x,p)$ по перем. p; точно также $F'x$, $F''x,\ldots$ означали бы тоже что $F'_x(x,p)$, $F''_x(x,p)\ldots$

[2]) *Th. d. f. an.* N. éd. Pr. p. Ch. VIII, art. 57, *O. de L.* t. IX, pp. 106—108.

[3]) Тейлоръ первый далъ способъ разложенія въ ряды интеграловъ дифф. у-ій вблизи алгебрическихъ особенныхъ точекъ, распространивъ на этотъ случай правило Ньютонова параллелогр.: см. *Meth. incr.* Prop. IX. Prob. VI, pp. 28—35; p. 35 онъ замѣчаетъ: In hâc Analysi.... observandum est, quod omnes omninò coefficientes.... determinantur per comparationem terminorum. Quare series hoc modo inventae sunt omnes particulares, neque accomodari possunt ad conditiones Problematis, ob defectum coefficientium indeterminatorum»; Scholium, pp. 35—36; ср. прим. 3 на стр. 339; Ср. еще *S. Günther.* Verm. Unters. L. 1876, pp. 182—185 (l. c. въ прим. 1 на стр. 296); *Lacroix.* Tr. d. c. d. et de c. i. t. II, art. 667, pp. 426—427.

этого ряда будетъ имѣть видъ qi, ибо еслибы этотъ членъ сдѣлался равнымъ qi^n, стоило бы только дать h приращеніе $i^{\frac{1}{n}}$ вмѣсто i и онъ превратился бы въ qi. Такимъ образомъ, уравненіе опредѣляющее коеффиціенты разложенія приметъ такой видъ: $iq'+i^m r'+i^n s'+\ldots = Pi^\mu + Qi^\nu + \ldots$, гдѣ $m>1, n>m$ и т. д. ибо степени i въ рядѣ $p+o$ по предположенію возрастаютъ. При $\mu<1$ этому уравненію нельзя удовлетворить при произвольныхъ значеніяхъ i, и въ этомъ случаѣ нужно будетъ заключить, что частное значеніе p, удовлетворяющее производному уравненію, не заключается тѣмъ не менѣе въ общемъ выраженіи $f(x, a)$ представляющемъ полное значеніе y. Такъ какъ первый членъ Pi^μ въ разложеніи $F(x, p+o)-F(x, p)$ зависитъ только отъ первыхъ двухъ членовъ разложенія y т. е. отъ $p+qi$, то величина его не измѣнится если отбросить всѣ прочіе члены; отсюда слѣдуетъ, что $F(x, p+o)=F(x, p)+\frac{Po^\mu}{q^\mu}+\ldots$, что можетъ быть, при $\mu>o$ и <1, только тогда, когда $F'y$ обращается въ безконечность при $y=p$ [1]).—Мы приходимъ такимъ образомъ къ замѣчательной теоріи *особенныхъ рѣшеній* или *особенныхъ первоначальныхъ уравненій*, разработка которой въ ея элементарной, теперь классической формѣ. принадлежитъ всецѣло Лагранжу [2]).

---

[1]) *Th. d. f. anal.* N. éd. 1-re p. Ch. IX, art. 58, 59, pp. 109—111 d. t. IX d. *O. de L.*

[2]) Онъ изложилъ эту теорію въ первый разъ въ статьѣ: Sur les intégrales particulières des éq. diff. *Nouv. Mém. d. l'Ac. de Berl.* ann. 1774, *O. de L.* t. IV и затѣмъ показалъ нѣкот. ея приложенія въ *Nouv. M. d. l'Ac. d. B.* за 1779 г.: Sur. diff. questions d'Analyse relatives à la th. d. int. part. *O. de L.* t. IV; см. еще *Th. d. f. an.* N. éd. 1-re p. Ch. IX, 2-me p. Ch. III, VI. Подробно и полно изложена теорія и исторія особ. рѣш. въ XIV—XVII урокахъ о функціяхъ, *O. de L.* t. X, pp. 166—267.

Мы не будемъ останавливаться на суммованіи рядовъ, рѣшеніи уравненій третьей степени и на другихъ приложеніяхъ [1]) *прямаго* и *обратнаго* анализа функцій [2]) равно какъ и на распространеніи установленныхъ раньше понятій и методовъ этого анализа на функціи отъ двухъ или большаго числа перемѣнныхъ [3]). Не интересенъ для насъ въ настоящую минуту и выводъ знаменитаго ряда Лагранжа для выраженія функціи отъ перемѣнной z опредѣленной уравненіемъ $z = x + yfz$, — ряда, который впослѣдствіи игралъ такую важдую роль въ развитіи новой теоріи функціи [4]).

Мнѣ остается сказать еще весьма немного о геометрическихъ и механическихъ приложеніяхъ Лагранжевой теоріи [5]).

Теорія касательныхъ прямыхъ и соприкасающихся кривыхъ линій, основанная на V-мъ предложеніи Арбогаста, составляетъ первое приложеніе аналитическихъ функцій къ геометріи [6]). Она предполагаетъ что ордината $y=fx$ данной кривой вблизи точки соприкосновенія разлагается въ рядъ расположенный по восходящимъ цѣлымъ и положительнымъ степенямъ приращенія абсциссы этой точки, т. е. что всѣ производныя аналитической функціи fx въ этой точкѣ конечны. Но въ томъ случаѣ, когда

---

[1]) *Th. d. fonct. anal.* N. éd. 1-re p. Ch. X, XI, *O. de L.* t. IX, pp. 118—141.

[2]) *Ibid.* Ch. XI, art. 72, pp. 140—141.

[3]) *Ibid.* Ch. XII—XIV, XVI, pp. 142—162, 170—182, *Calc. d. fonct.* Leç. XIX, XX, *O. de L.* t. X, pp. 299—363; обозначенія употр. Л. для частн. произв. очень неудобны: онъ пользуется нижними значками (Th. d. f.) и значками съ запятыми (C. d. f.). -Распространеніе теоремы Тейлора на функціи мног. перемѣнн. было сдѣлано Лагранжемъ еще въ Берл. мем. 1772 г. упом. на стр. 318. l. c. pp. 445 suiv.

[4]) *Th. d. f. an.* N. éd. 1-re p. Ch. XV, *O. de L.* t. IX pp. 163—169. См. Исторію этого ряда въ замѣчательномъ сочиненіи *П. А. Некрасова.* Рядъ Лагранжа. Москва 1885 (*Матем. Сборн.* т. XII), стр. 5 и слѣд.; также *Reiff.* Gesch. d. un. R. pp. 140—149.

[5]) *Théorie d. f. anal.* N. éd. *Seconde partie*—прил. къ геом. *Troisième p.* —прил. къ механикѣ. Въ *Calc. d. fonct.* этому предмету посвящ. только короткія замѣч. въ концѣ 9-го урока; ср. прим. 1 на стр. 336.

[6]) *Th. d. f. an.* N. éd. 2-e p. Ch. I, II, art. 1 — 12. *O. de L.* t. IX, pp. 183—200.

разсматриваемое значеніе m этой абсциссы обращаетъ въ ∞ одну изъ производныхъ функцій $f'x$, $f''x$, $f'''x\ldots$, въ разложеніе $f(m+i)$ необходимо входятъ другія положительныя степени i, и общая теорія становится непримѣнимой. Допустимъ, что $f(m+i)$, будучи разложена по восходящимъ степенямъ i, принимаетъ видъ: $fm+Ai^{\lambda}+Bi^{\lambda+\mu}+Ci^{\lambda+\mu+\nu}+\ldots\ldots$, гдѣ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ положительныя числа. Коеффиціенты $A, B, C, \ldots$ можно найти тѣмъ же путемъ какъ и въ случаѣ цѣлыхъ показателей: $f(m+i)-fm=i^{\lambda}P$, $P=A+i^{\mu}Q$, $Q=B+i^{\nu}R, \ldots$ гдѣ $P, Q, R, \ldots$ не обращаются ни въ 0 ни въ ∞ при $i=0$; $A=\left\{\frac{f(m+i)-fm}{i^{\lambda}}\right\}_{i=0}$, $B=\left\{\frac{P-A}{i^{\mu}}\right\}_{i=0}$, и т. д.; λ есть, слѣдовательно, показатель той степени i которую можно взять общимъ множителемъ въ членахъ $f(m+i)-fm$, такъ чтобы сумма освобожденныхъ отъ этого множителя членовъ P не была равна ни 0 ни ∞ при $i=0$ [1]). Пусть ордината $F(m+i)$ другой кривой соприкасающейся съ данной разлагается въ подобный же рядъ: $F(m+i)=Fm+i.^{\rho}p$, $p=\alpha+i.^{\sigma}q$, $q=\beta+i.^{\tau}r$, $\ldots$ такъ что ρ, σ, τ, и т. д. положительныя числа, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ значенія $p, q, r, \ldots$ при $i=0$. Тогда $f(m+i)-F(m+i)=i^{\lambda}.A-i.^{\rho}\alpha+i^{\lambda+\mu}Q-i^{\rho+\sigma}.q+\ldots\ldots$ Можно будетъ назвать соприкосновеніями перваго, втораго, третьяго и т. д. порядковъ соприкосновенія такихъ двухъ кривыхъ для которыхъ первый членъ, первые два, первые три члена... этого ряда равны 0,

1) *Ibid.* Ch. II, art. 13, pp. 200—202: «On a, pour trouver les termes successifs d'une série, des méthodes plus courtes ou d'un calcul plus facile, mais la précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant que l'on veut et de donner la valeur du reste». Ср. въ *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berl.* ann. 1776 мем. Лагранжа: Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral, *O. de L.* t. IV, pp. 304 suiv., *Lacroix.* Th. d. c. d. et d. c. i. t. 1, Introduction art. 60 suiv., pp. 102 suiv. *S. Günther* l. c. въ прим. 1 на стр. 296 р. 178 и *).

или иными словами, для которыхъ въ разложеніяхъ функцій представляющихъ ихъ ординаты для абсциссы $m+i$ ——— первые два, три, четыре и т. д. членовъ равны между собой. Если двѣ линіи имѣютъ такое соприкосновеніе опредѣленнаго порядка, никакая другая кривая, проходящая черезъ точку (m, fm) не можетъ пройти между ними вблизи этой точки, не имѣя съ ними соприкосновенія по крайней мѣрѣ того же порядка. Равенства членовъ распадаются на равенства показателей и равенства коеффиціентовъ; первыя зависятъ отъ природы функцій f и F,—вторыя всегда могутъ быть удовлетворены на счетъ произвольныхъ коеффиціентовъ функціи F; простѣйшія уравненія кривыхъ имѣющихъ съ данной $(y=fx)$ соприкосновенія различныхъ порядковъ суть такимъ образомъ слѣдующія: $y=fm+A(x-m)^{\lambda}$, $y=fm+A(x-m)^{\lambda}+B(x-m)^{\lambda+\mu}$, и т. д. [1]).

Подставимъ, далѣе, въ уравненіе $y=fx$, $\frac{1}{i}$ вмѣсто x и, получивъ разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ i— : $f\frac{1}{i}=Ai^{\lambda}+Bi^{\lambda+\mu}+\ldots\ldots$, выберемъ такую функцію Fx, чтобы первые члены разложенія $F\frac{1}{i}$ были равны соотвѣтствующимъ членамъ разложенія $f\frac{1}{i}$. Таковы простѣйшія функціи $y=Ax^{-\lambda}$, $y=Ax^{-\lambda}+Bx^{-\lambda-\mu}$, и т. д.; кривая выражаемая однимъ изъ этихъ уравненій приближается постоянно и безгранично къ данной по мѣрѣ увеличенія абсциссъ x, хотя никогда ея и не достигая, такъ что, наконецъ, при достаточно большомъ значеніи x, никакая другая однородная съ ней кри-

---

[1]) *Th. d. fonct. anal.* N. éd. 2-e p. Ch. II, art. 13, *O. de L.* t. IX, pp. 202—204: «Ces courbes auront donc aussi dans le même point le cours le plus approchant de celui de la courbe proposée et pourront, par conséquent, servir à en faire connaître les propriétés comme les points singuliers, les points de rebroussement, etc., sur quoi *voir l'Analyse des lignes courbes* de Cramer». Ср. прим. 3 къ стр. 294.

вая гиперболическая или параболическая, порядокъ которой не выше ея порядка, не сможетъ быть проведена между этими двумя кривыми. «Вторая кривая есть асимптота первой», говоритъ Лагранжъ, «и это понятіе объ асимптотѣ кажется мнѣ самымъ простымъ и самымъ общимъ изъ всѣхъ которыя могутъ быть предложены и въ то же время наиболѣе способнымъ характеризовать природу приближенія кривыхъ, составляющаго истинный асимптотизмъ» [1]).

Чтобы найти общее выраженіе сегмента плоской кривой $(y=fx)$, ограниченнаго осью абсциссъ и двумя ординатами, Лагранжъ разсматриваетъ его какъ функцію Fx отъ абсциссы соотвѣтствующей конечной ординатѣ и замѣчаетъ, что при достаточно малыхъ, впрочемъ произвольныхъ значеніяхъ i, величина $F(x+i)-Fx$ заключается между предѣлами ifx и $if(x+i)$, или $iF'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j_2)$——между предѣлами ifx и $ifx+i^2f'(x+j_1)$, гдѣ j_1 и j_2 неизвѣстныя количества заключенныя между O и i Отсюда слѣдуетъ что величина $i(F'x-fx)+\frac{i^2}{2}\cdot F''(x+j_2)$ должна быть меньше $i^2f'(x+j_1)$, что, вслѣдствіи произвольной малости i, можетъ быть только при $F'x=fx$; — вопросъ приводится такимъ образомъ къ простѣйшей задачѣ *обратнаго анализа* [2]). — Мы не будемъ говорить о другихъ геометрическихъ приложеніяхъ теоріи аналитическихъ функцій: они всѣ основываются на тѣхъ же принципахъ и не даютъ поводовъ, въ изложеніи Лагранжа, ни къ какимъ интереснымъ для насъ замѣчаніямъ [3]).

---

[1]) *Th. d. f. an.* l. c. art 14, pp. 204--205. Ср. прим. 2 на стр. 294.

[2]) *Th. d. f. an.* l. c. Ch. VI, art. 27, pp. 238—240.

[3]) См. *Th. d. f. an.* N. éd. 2-e p. Ch. III, IV. — задачи о контактахъ, обертк., развертк. и пр. *O. de L.* t. IX, pp. 206—231, Ch. V—наиб. и наименьш. велич. ф ій, pp. 232 — 237, Ch. VI, pp. 240 — 247, Ch. XIV, pp. 322--335.—Квадр. кубат., комл., выпрямл.; Ch. VII - крив. двойн. крив. pp. 248—257; Ch. VIII IX, X, XI, pp. 258—295—крив. поверхн., Ch. XII, XIII, pp. 296—321—Des Questions de maximis et minimis qui se rapportent

Механическія приложенія основаны на соображеніяхъ подобныхъ тѣмъ которыя приводятъ къ теоріи соприкосновенія кривыхъ; эти соображенія должны вмѣстѣ съ тѣмъ служить образцомъ для всѣхъ приложеній теоріи аналитическихъ функцій къ однороднымъ вопросамъ другихъ конкретныхъ наукъ [1]). — Пусть уравненіе $x=ft$ выражаетъ аналитически законъ прямолинейнаго движенія точки, гдѣ t — время, а x — пространство пройденное точкой въ это время; пространство пройденное въ промежутокъ времени θ слѣдующій непосредственно за истеченіемъ опредѣленнаго времени t выражается разностью $f(t+\theta)-ft$, которая, будучи расложена въ рядъ по формулѣ Тейлора принимаетъ видъ $\theta f't+\frac{\theta^2}{2}f''t+\ldots$ и распадается такимъ образомъ на безчисленное множество частей, сообразно съ чѣмъ и данное движеніе, въ промежуткѣ времени θ, можетъ быть разложено на безчисленное множество слагающихъ его движеній, участвуя въ каждомъ изъ которыхъ точка прошла бы пространства $\theta f't$, $\frac{\theta^2}{2}f''t,\ldots$ соотвѣтственно. Первое изъ этихъ движеній равномѣрное, происходящее отъ начальной скорости ft, второе равномѣрно-ускоренное и происходитъ подъ вліяніемъ ускоряющей силы пропорціальной $\frac{1}{2}f''t$ [2]). Обозначая черезъ λ нѣкоторое неизвѣстное количество заключенное между 0 и 1, мы получимъ для пространства $f(t+\theta)-ft$ конечное выраженіе

à la méthode des variations, тоже подробнѣе въ 21-мъ и 22-мъ урокахъ о функціяхъ (*O. de L.* t. X, pp. 364—451), о чемъ намъ еще придется упомянуть ниже.

[1]) См. у *M. Marie.* Hist. d. sc. m. et ph. T. V, pp. 184—185 интересное замѣчаніе о сравнит. достоинств. методовъ Лейбница, Ньютона и Лагранжа для рѣшенія конкретныхъ задачъ.

[2]) *Th. d. fonct. an.* N. éd. 3-me p. Ch. I, art. 4. *O. de L.* t. IX, pp. 340—341: «A l'égard des autres, comme ils ne se rapportent à aucun mouvement simple connu, il ne sera pas nécessaire de les considérer en particulier, et nous allons faire voir qu'on peut en faire abstraction dans la détermination du mouvement au commencement du temps θ».

$\theta f' t + \frac{\theta^2}{2} f'' t + \frac{\theta^3}{2.3} f'''(t+\lambda\theta)$, изъ котораго видно, что можно выбрать θ настолько малымъ, чтобы движеніе состоящее изъ первыхъ двухъ слагаемыхъ приближалось къ дѣйствительному болѣе чѣмъ всякое другое, состоящее изъ равномѣрнаго и равномѣрно ускореннаго движеній. Изъ этихъ соображеній легко вывести то заключеніе, что «если-бы силы, препятствующія данному движенію быть равномѣрнымъ, внезапно прекратили свое дѣйствіе въ моментъ t,—движеніе продолжалось-бы, начиная съ этого момента, равномѣрно со скоростью $f't$, и что если-бы дѣйствіе этихъ силъ, не прекращаясь, стало постояннымъ, то движеніе сдѣлалось-бы равномѣрно-ускореннымъ — подъ дѣйствіемъ силы постоянной и пропорціальной $f''t$.—Многія явленія природы, и въ особенности результаты различныхъ опытовъ придуманныхъ для изслѣдованія паденія тѣлъ, вполнѣ подтверждаютъ справедливость нашего заключенія, которое должно быть разсматриваемо какъ основной принципъ всей теоріи движенія»[1]). —«Отсюда видно», прибавляетъ Лагранжъ, «что первая и вторая производныя появляются совершенно естественно въ механикѣ, гдѣ онѣ имѣютъ опредѣленные значеніе и смыслъ; это и побудило Ньютона къ тому, чтобы положить въ основаніе Исчисленія Флюксій понятіе о движеніи»[2]).

Не смотря на всѣ недостатки и промахи, которые можетъ усмотрѣть современный читатель въ разобранныхъ сочиненіяхъ Лагранжа со стороны строгости и общности его изслѣдованій и заключеній, сочиненія эти имѣютъ огромное историческое значеніе[3]). Работы Лагранжа утвердили впервые ту

---

[1]) *Ibid.* pp. 341 - 342; ср. art. 1—3, pp. 337—340 и *Mécan. anal.* 2-e éd. Sec. partie, Sect. première, art. 1, 2, *O. de L.* t. XI, pp. 237—241.

[2]) *Th. d. f. an.* l. c. art. 5, p. 343, ср. стр. 197, 198.

[3]) Ср. *Méray.* Leç. nouv. 1-re p., préface p. XIV n. (9).

истину, что *понятія* и *законы* алгебрическаго анализа [1]) даютъ возможность, независимо отъ какихъ бы то ни было посторонних началъ, построить теорію функцій—настолько обширную, чтобы обнять всѣ главнѣйшіе факты добытые математическимъ анализомъ и всѣ важнѣйшія его приложенія. Развитіе такой теоріи *аналитическихъ* функцій при помощи чисто алгебрическихъ *методовъ* можетъ представить непреодолимыя трудности; тогда придется разсмотрѣть объекты теоріи съ другой посторонней точки зрѣнія, выразить чисто аналитическія понятія въ логически эквивалентныхъ терминахъ, заимствованныхъ изъ области другихъ представленій, или, какъ говорятъ, *реализовать* ихъ въ образахъ этой области. Новые образы должны быть конечно логически вполнѣ равносильны прежнимъ, такъ чтобы всегда возможенъ былъ обратный переходъ къ области прежнихъ представленій, но наглядныя свойства этихъ новыхъ образовъ дадутъ поводъ къ синтетическимъ построеніямъ, могущимъ оказаться болѣе плодотворными чѣмъ тѣ, которыя мы можемъ усмотрѣть непосредственно [2]). Во всякомъ случаѣ, такое разнообразіе методовъ не разрушаетъ единства основныхъ принциповъ теоріи, придающаго ей ту точность и ясность, которыя мы видимъ въ работахъ новѣйшихъ ея послѣдователей, начиная съ замѣчательныхъ трудовъ *Мэрэ* и *Вейерштрасса* [3]).—

---

[1]) Чтобы видѣть какъ Лагранжъ смотрѣлъ на эти понятія и законы слѣдуетъ прочесть его Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques, *Journ. de l'Éc. Pol.*, VI-e Cah. therm. an. VII, *O. de L.* t. VII, pp. 325—328; «A proprement parler», говоритъ онъ (p 327), «l'Algèbre n'est en général que la théorie des fonctions».

[2]) Лагранжъ, конечно, чувствовалъ въ извѣстн. мѣрѣ значеніе подобныхъ соображеній: ср. Avertissement de la deux. éd. de la Mécanique analyt. *O. de L.* t. XI, p. XIV; *Carnot.* Réfl. art. 157 pp. 158—159, art. 166, pp. 165—166, art. 171, 172, pp. 169—171. Ему однако было еще совершенно невозможно подойти къ новой, геометрической теоріи функцій. О пристрастіи математиковъ второй половины прошлаго вѣка къ исключительно алгебрическимъ методамъ ср. *Chasles.* Aperçu hist. Ch. IV, quatr. ép. § 22, pp. 168—169.

[3]) Ср. Предисловіе и сочин. упом. въ прим. 2 на стр. 266, въ особенн. *Méray* Leç. nouv. Préface, pp. VII—XXV, Principales public. du

Таковы истинное значеніе и характеръ ученія объ аналитическихъ функціяхъ. Съ другой стороны, существуютъ несомнѣнно вопросы математическаго анализа абстрактные и конкретные, главнымъ предметомъ которыхъ служатъ функціи, и которые, тѣмъ не менѣе, совершенно выходятъ изъ области этого ученія; лучшимъ, если не единственнымъ средствомъ для рѣшенія такихъ вопросовъ остаются понятія и методы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Съ такой точки зрѣнія не смотрѣли еще однако на теорію Лагранжа ни самъ ея авторъ ни его современники и ближайшіе послѣдователи; она была задумана и понята главнымъ образомъ какъ средство совершенно вытѣснить изъ математическаго анализа исчисленіе безконечномалыхъ [1]).

Въ разсматриваемый нами періодъ вопросъ о началахъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій уже не служитъ предметомъ горячихъ споровъ какъ въ эпоху ихъ открытія, но сохраняетъ еще весь свой интересъ, по крайней мѣрѣ на континентѣ: англійскіе математики продолжаютъ строго и упорно держаться своихъ прежнихъ воззрѣній. У континентальныхъ геометровъ—сторонниковъ этихъ исчисленій сохраняются еще два

même auteur, pp. XXVI—XXVIII, Avertissement de la première partie, pp. XXIX—XXXII.

1) И въ *Th. d. f. a.* и въ *Calc. d. f.* Лагранжъ начинаетъ съ критики началъ этого исчисленія; тоже дѣлаетъ онъ и въ Disc. s. l'obj. de la th. d. f. a.: «....tandis que cet édifice s'élevait à une hauteur immense», говоритъ онъ о Высшемъ Анализѣ въ концѣ 18-го ур. о ф., «l'entrée en demeurait toujours mal éclairée.... Pour lever tous les scrupules et dissiper tous les nuages, il ne faut rien faire évanouir ni rien négliger: c'est ce qu'on obtient par la considération des fonctions dérivées». *O. de L.* t. X, p. 298.—Такой взглядъ на теорію Лагранжа сохранился у нѣкоторыхъ математиковъ и въ наше время; ср. Méray l. c. въ предъид. прим. Теорія анал. ф-ій была однако очень скоро забыта и вытѣснена другими методами; послѣднее выдающееся сочиненіе написанное подъ вліяніемъ идей Лагранжа есть Traité du c. diff. et d. c. int. Лакруа; ср. Préface въ 1-мъ томѣ этого трактата; она снова возродилась въ новѣйшей теоріи функцій.

главныхъ ученія соотвѣтственно двумъ первоначальнымъ направленіямъ созданнымъ Ньютономъ и Лейбницемъ [1]).

Даламбертъ, достойный послѣдователь великаго англійскаго геометра въ своихъ блестящихъ работахъ по натуральной философіи [2]), впервые сдѣлалъ попытку положить Ньютоново ученіе о предѣлахъ въ основаніе дифференціальнаго исчисленія. Онъ помѣстилъ въ своей «Энциклопедіи» [3]) статью о *Дифференціалѣ*, которая долго служила образцовымъ введеніемъ въ исчисленіе безконечно малыхъ. «Ньютонъ», говоритъ Даламбертъ, «никогда не смотрѣлъ на дифференціальное исчисленіе какъ на исчисленіе безконечно-малыхъ количествъ, но какъ на методъ первыхъ и послѣднихъ отношеній т. е. какъ на методъ отысканія предѣловъ. Поэтому онъ никогда не дифференцировалъ количествъ, но только уравненія; ибо всякое уравненіе содержитъ всегда отношеніе двухъ перемѣнныхъ количествъ, и

---

[1]) О различныхъ сочиненіяхъ относящихся къ этому предмету см. въ словарѣ Клюгеля-Грунерта (V Th. Erst. Bd.) статью Unendlich, pp. 507—514 (Historisches), 536, 537.

[2]) *Jean Le Rond D'Alembert* род. въ 1717 г.—ум. въ 1783 г. О его жизни и матем. работахъ см. въ особ. *Marie*. Hist. d. M. t. VIII, pp. 172—236. также *Éloge de D'Alembert* par *Condorcet*, напеч. м. п. въ *Oeuvres de D'Alembert*, T. I, 1-re p. Paris 1821. pp. (I)—XXVIII; тамъ же: *Mémoire de D'Alembert par lui même* (pp. 1-8); *Portrait de l'auteur* fait par lui même et adressé, en 1760, à Madame ***; далѣе *D'Alembert*, par *Joseph Bertrand*. Paris 1889 (Les grands écrivains fr. éd. Hachette et C-ie) съ портр. Дал. и небольш. замѣтку *Cournot* въ Dictionnaire d. Sc. Philos. *Франка*. Переписка *Дал.* съ Лагранжемъ помѣщ. въ t. XIII O. *de L.* представляетъ не мало интереса для ист. мат. — *Ch. Henry* опубликовалъ въ *Bull. Bonc.* t. XVIII Sept.-Déc. 1885 неизданную переписку *Дал.* съ Крамеромъ, Лесажемъ, Клэро, Тюрго, Кастильономъ, Бэгленомъ и др. съ интересн. предисл. о жизни и матем. работахъ *Дал.*; см. Extr. Rome 1886, pp. 3—6—біогр. свѣд. 7—10—Liste des travaux mathématiques inédits de D'Alembert. (въ Библ. Франц. Инст.). Между этими неизд. трудами слѣд. замѣтить: 23. Sur les principes du calcul diff. (Ms. R. 240* 6. 8°, f°. 335—339); 29. Sur les quant. logarithm. et expon. (Ms. R. 240* 7. 8°, f° 344—359).

[3]) *Encyclopédie* ou Dictionnaire raisonné des sciences, arts et métiers, par une société de gens de lettres, mis en ordre par *Diderot* et quant à la partie mathématique par *Dalembert*—была напечатана въ первый разъ въ Парижѣ въ 17 томахъ in-f° 1751—1765 съ 11 томами таблицъ 1762—1772; математич. статьи Энциклопедіи вошли также въ математ. отдѣлъ Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières; я пользовался этимъ послѣднимъ словаремъ Nouv. éd. Padoue 1787—1790 въ 4-хъ частяхъ съ однимъ томомъ таблицъ.

дифференцированіе уравненій состоитъ только въ отысканіи предѣла отношенія конечныхъ разностей этихъ двухъ количествъ» [1]. Такимъ образомъ «Дифференціальное исчисленіе состоитъ только въ томъ, чтобы опредѣлить алгебрически предѣлъ отношенія, который уже выраженъ въ линіяхъ, и приравнять другъ другу эти два предѣла, что даетъ возможность найти одну изъ этихъ линій. Это опредѣленіе, быть можетъ, самое точное и ясное изъ всѣхъ опредѣленій дифференціальнаго исчисленія; но оно можетъ быть хорошо понятно только тому, кто уже освоился съ самымъ исчисленіемъ, ибо часто истинное значеніе опредѣленія науки замѣтно лишь тѣмъ, кто ее изучилъ» [2]. Интегральное исчисленіе Даламбертъ разсматривалъ какъ обратное дифференціальному [3]. Сохраняя Лейбницевы обозначенія, Даламбертъ не даетъ все-таки «точнаго и яснаго» опредѣленія дифференціала, основаннаго на принятыхъ имъ началахъ, хотя изъ его разсужденія и видно, что подъ dy и dx разумѣетъ онъ лишь двѣ величины, отношеніе которыхъ равно предѣлу отношенія соотвѣтствующихъ конечныхъ разностей [4].

Португальскій математикъ *Да Кунья*, слѣдуя тѣмъ же принципамъ, что и Даламбертъ, даетъ уже точное формальное опредѣленіе дифференціала въ своемъ сочиненіи «Начала Ма-

---

[1]) *Enc. Méth.* art. Différentiel, T. I. P. II, p. 525*a*. Нѣсколько выше (p. 524*b*.) Д. говоритъ: Ce qu'il nous importe de traiter ici c'est la métaphysique du calcul *différentiel*.– Cette métaphysique dont on a tant écrit, est encore plus importante, & peut être plus difficile à déveloper que les regles même de ce caleul:....» и затѣмъ переходитъ къ критикѣ Лейбницевой теоріи. См. также: Élémens de philosophie, XV. Géométrie и § XIV. Éclaircissement sur les principes métaphysiques du calc. infinités. *Oeuvres de D'Al.* T. I, 1-re p., pp. 275–276, 288–293.

[2]) *Ibid.* p. 526*a*: Souvent la vraie définition d'une science ne peut être bien sensible qu'a ceux qui ont étudié la science».

[3]) *Encycl. méth.* art. *intégral* (первая статья).

[4]) *Enc. méth.* T. I, P. II, p 525*b*. Это опредѣленіе было потомъ формально введено *Коши*: *Exercices d'Analyse et de Ph. math.* t III, pp. 5 suiv., — Mémoire sur l'Analyse infinitésimale; pp. 50 suiv.,—Mém. sur le calcul des variations.

тематики», опубликованномъ въ 1787 году [1]). Сохраняя подобно Даламберту обозначенія Лейбница, онъ однако придерживается наименованій Ньютона и называетъ дифференціалы флюксіями, а интегралы флюэнтами. Я приведу здѣсь нѣкоторыя изъ интересныхъ опредѣленій XV-ой книги «Началъ» [2]).

II. Перемѣнная величина, допускающая значенія постоянно превосходящія всякую данную величину, *безконечно-велика;* перемѣнная же, значенія которой могутъ быть сдѣланы постоянно меньшими всякой предложенной величины, называется *безконечно-малой.* III. Если величина выраженія A зависитъ отъ величины другаго выраженія B, A называется *функціей* отъ B, а B *корнемъ* A.—IV. Выберемъ величину однородную съ корнемъ x и, назвавъ ее *флюксіей* этого корня обозначимъ черезъ dx.—Обозначаютъ черезъ $d\Gamma x$ и называютъ флюксіею функціи Γx, величину, которая дѣлаетъ отношеніе $\frac{d\Gamma x}{dx}$ постояннымъ, а разность $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx}-\frac{d\Gamma x}{dx}$ безконечно-малой или нулемъ, при безконечно-маломъ dx и при томъ предположеніи, что всѣ величины независящія отъ dx остаются постоянными.

Почти одновременно съ сочиненіемъ Да Куньи появились еще двѣ работы посвященныя началамъ высшаго анализа и принадлежащія *Симону Люилье* и аббату *Caluso.*

Берлинская Академія Наукъ предложила дать въ 1786 году премію за «ясную и точную теорію математической безконечности»: премія была присуждена женевскому математику *L'Huilier*, представившему сочиненіе подъ заглавіемъ «Элемен-

[1]) *Da Cunha*, профессоръ матем. въ Коимбрскомъ унив. род. въ 1744, —ум. въ 1787 г.; см. Principes Mathématiques de feu Joseph-Anastase da Cunha trad. littéralement du portugais par *J. M. D'Abreu.* Bordeaux 1811. pp. (I)—VIII—Avertissement du traducteur. Объ этой замѣчательной книгѣ, представляющей собою первый опытъ строго-формальнаго изложенія *всей* математики (на 299 стр. in-8°!) мы еще упомянемъ впослѣдствіи.

[2]) *Princ. math.*, pp. 196—197.

тарное изложеніе началъ высшихъ исчисленій»[1]). Работа эта имѣетъ цѣлью доказать, по словамъ ея автора, «что *методъ древнихъ, извѣстный подъ названіемъ Метода Истощенія, соотвѣтственнымъ образомъ распространенный, достаточенъ для прочнаго установленія началъ новыхъ исчисленій*»[2]). Сообразно съ этимъ, Люилье постарался изложить свою теорію со всей строгостью древнихъ геометровъ, на основаніи ихъ ученія о величинахъ[3]). Давъ опредѣленія *предѣла* перемѣннаго количества[4]) и перемѣннаго отношенія[5]), онъ доказываетъ главнѣйшія теоремы объ этихъ предѣлахъ[6]) и переходитъ къ изслѣдованію

---

[1]) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* par *M. L'Huilier*. Berlin.—*Simon Antoine Jean Lhuilier* род. въ 1750 г.—ум. 1840 г.; см. *Marie*. H. d. M. t. X. pp. 107—109.

[2]) *Expos. élém.*, Introd. p. 6.

[3]) Люилье учился въ Варшавѣ и Тюбингенѣ у *Пфлейдерера*, замѣчательнаго знатока древней геометріи, знаменитаго комментатора Евклида.

[4]) *Expos. élém.* Ch. premier. *Sur les Limites de Quantités & des Rapports variables, ou prem. princ. d. Calcule Sup.* § 1, 1-re *Déf.* p. 7. — Ср. *Newt.* l. c. на стр. 236; *Encycl. Méthod.*, Art. Limite (*Dargenville* и *Dalembert*)—всѣ эти опредѣленія предполагаютъ монотонное приближеніе къ предѣлу.—Опредѣленіе предѣла было дано въ первый разъ *Григоріемъ à S. Vincentio*; Opus geometr. Lib. II, *def.* 3, p. 55: «Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato propiùs ad eum accedere poterit». Ср. *Explicatio*, pp. 55—56: этимъ опред. и объясн. Гр. де С. В. положилъ начало теоріи сходимости безк. рядовъ. Ср. прим. 3 на стр. 266. См. еще *Wallis* l. c. въ прим. 1) на стр. 142 и въ прим. 2) на стр. 243. «Aber man wird ebensowenig Wallis das Verdienst absprechen», говоритъ М. Канторъ, «*die heute noch übliche Form des Grenzübergangs erfunden zu haben*. Das Wort, der Unterschied werde kleiner als jeder nur angebbare, *quavis assignabili minor*, hat erst das Verständniss einer Grenze als eines Werdenden zu erzeugen vermocht, u. s. w.» *Cantor*. Vorl. t. II, pp. 823—824.

[5]) *Expos. élém.* Ch. I, p. 7., 2-me *Déf.* (конецъ 1 §, pp. 7—10 содерж. примѣры); это опред. относ. опять таки къ монот. измѣн. отнош.; ср. опред. данн. въ прим. 1) на стр. 236, которое легко обобщить такъ: *Ratio variabilis* d. quant. $(x:y)$ s. lim. appropinquant. ad C, D. resp., rationem *constantem* (A: B) pro limite habere dicitur, cum etc. [(A: B)=(C: D), siquidem quantitates C, D finitae s.].

[6]) *Expos. élém.* Ch. I, §§ II—VI, pp. 10—21.

предѣловъ безгранично убывающихъ «одновременныхъ измѣненій» величинъ простѣйшихъ алгебраическихъ выраженій и входящей въ нихъ перемѣнной [1]); эти предѣлы называетъ онъ *дифференціальными отношеніями.* «Для сокращенія и облегченія вычисленій», говоритъ онъ «условились обозначать $lim. \frac{\triangle P}{\triangle x}$, предѣлъ отношенія одновременныхъ измѣненій P и x черезъ $\frac{dP}{dx}$; такъ что $lim. \frac{\triangle P}{\triangle x}$ и $\frac{dP}{dx}$ обозначаютъ одно и тоже». —«Дифференціальное исчисленіе занимается отысканіемъ дифференціальнаго отношенія двухъ перемѣнныхъ количествъ.... Я назову *интегральнымъ* ихъ *отношеніемъ*, отношеніе существующее между этими двумя количествами поскольку оно выведено изъ ихъ дифференціальнаго отношенія. Отысканіемъ таких интегральныхъ отношеній занимается интегральное исчисленіе» [2]). Дифференціальныя отношенія могутъ быть, конечно, и различныхъ высшихъ порядковъ, и для нихъ Люилье тоже сохраняетъ обозначенія Лейбница. Затѣмъ доказываетъ онъ теорему Тейлора, переходя подобно Тейлору, отъ отношеній конечныхъ разностей къ ихъ предѣламъ [3]), показываетъ главнѣй-

[1]) *Expos. élém.* §§ VII—XIII, pp. 21—31. См. прибавл. къ pp. 18 & 24, помѣщ. pp. 203—206 *Expos.*

[2]) *Ibid.* § XIV, pp. 32, 31; «On regardera avec plus de raison tout ce qui est contenu dans les Chapitres précédents», говоритъ Люилье въ 11 главѣ (§ LXVIII, p. 167), «comme le développement des idées sur les principes des calculs supérieurs, que Mr. d'Alembert n'a fait qu'ébaucher & comme proposer dans l'article différentiel de l'Encyclopédie & dans ses Mélanges.

[3]) *Expos. élém.* Ch. III, §§ XXI-XXIII, pp. 43-51; Ср. поправку pp. 207—208 и autre démonstr. pp. 208—210. О другихъ доказательствахъ Тейлоровой теоремы основанныхъ на тѣхъ же принципахъ см. *Klügel-Grunert's* Wört. I Abth. V Th. Erst. Bd., *Taylors Lehrsatz*, § 6; Beweise d. T. Lehrs. pp. 11 sqq.; я прибавлю еще къ указ. тамъ соч. статью *Гурьева*: Observations sur le théorème de Taylor, av. sa démonstr. par la méthode des limites Par *Mr. S. Gourieff* (Trad. du russe) *Nova Acta Ac. Sc. I. Petr.* T. XIV, ad ann. 1797 et 1798, Petr. 1805, pp. 306 — 335 (Ср. *Ibid.* Hist. Extr. p. 74); (*Семенъ Емельяновичъ Гурьевъ* род. въ 1762 г.—ум. въ 1813 г. Академикъ съ 1798 г.). Всѣ эти выводы предполагаютъ, конечно, безъ доказ., сходимость Тейлорова ряда.

тія приложенія дифференціальнаго исчисленія къ анализу и геометріи и распространяетъ его на простѣйшія трансцендентныя функціи [1]). Въ особой главѣ подвергаетъ онъ разбору и критикѣ понятіе о безконечности и различныя изложенія началъ высшихъ исчисленій [2]). Въ этой главѣ Люилье возстаетъ противъ понятій объ актуальныхъ безконечно-большихъ и малыхъ величинахъ и показываетъ, къ какимъ противорѣчіямъ и неясностямъ приводитъ допущеніе этихъ понятій въ геометріи и ариѳметикѣ [3]). «Я полагаю», говоритъ онъ далѣе, «что въ дифференціальномъ исчисленіи не слѣдовало бы и произносить словъ дифференціальное количество; или выраженіямъ этихъ количествъ не соотвѣтствуетъ ничего, въ безусловномъ ихъ смыслѣ, и слѣдовательно это вовсе не количества; или же выраженіе называемое дифференціаломъ функціи не даетъ дѣйствительнаго измѣненія происшедшаго въ функціи, какъ бы ни былъ малъ дифференціалъ dx перемѣннаго количества, и слѣдовательно это выраженіе должно всегда оставлять сомнѣніе въ законности выводимыхъ изъ него заключеній . . . . . [4]). Равнымъ образомъ не слѣдовало бы употреблять словъ интегральная сум-

---

[1]) *Expos. élém.* Ch. II, §§ XVI—XX, pp. 34—42 — о касат., Ch. IV, §§ XXIV—XXX, pp. 52—65—о *max.* и *min.*, Ch. V, §§ XXXI—XXXIII, pp. 65—77—о точк. перег., возвр., рад. крив. и разверт., Ch. VI—Sur les Logarithmes, §§ XXXIV—XXXIX, pp. 77—85, Ch. VII--о квадр. кривыхъ, §§ XL—XLVI, pp. 85—99; Ch. VIII, §§ XLVII—LI, pp. 100—105—о выпр. кривыхъ, § LI, pp. 103—105—дифф. тригон. ф-ій и ихъ разл. въ б. ряды, Ch. IX, §§ LII—LVI, pp. 105—113, Ch. X, §§ LVII—LX, pp. 105—121—о размѣрахъ тѣлъ вращенія.

[2]) *Expos. élém.* Ch. XI, §§ LXI—LXIX, pp. 121—176: *Sur l'Infini & sur les différentes expositions des Principes des Calculs supérieurs.*

[3]) *Ibid.* §§ LXI—LXIII, pp. 121—133; возраженія Люилье направлены м. п. противъ *Фонтенеля* (Élem. de la Geom. de l'Inf.; ср. прим. 1) на стр. 238) и *Л. Бертрана* (Développement nouveau de la partie élém. des math. prise dans toute son étendue; par *Louis Bertrand*, T. II, Genève 1778, pp. 4, 5; допустивъ въ своихъ разсужд. такую акт. безкон. Бертранъ пришелъ къ доказат. Евклидова постулата о паралл. линіяхъ: Prem. P. Ch. I, Prop. IX, pp. 19—21); §§ LXIV suiv. содержатъ критику теоріи б. мал.

[4]) *Expos. élém.* § LXVI, pp. 141—142.

ма, но замѣнить ихъ какъ я это сдѣлалъ въ предшествующемъ изложеніи, выраженіемъ «интегральное отношеніе».[1]) Люилье предпочитаетъ также, при разсужденіяхъ о предѣлахъ отношеній безконечно-малыхъ или безконечно-большихъ величинъ, называть эти величины *способными дѣлаться безконечно-малыми* или *безконечно-большими* (*infiniblement petits* или *infinibles*)[2]). Сочиненіе Люилье заканчивается простѣйшими приложеніями теоріи предѣловъ и дифференціальнаго исчисленія къ механикѣ[3]); дифференціальное выраженіе $\frac{ds}{dt}$ для скорости онъ выводитъ совершенно также какъ выводится подобное же выраженіе $\frac{ds}{dx}$ для площади плоской кривой какъ функціи абсциссы: очевидно, что отношеніе пространства пройденнаго въ промежутокъ, времени, слѣдующій за даннымъ моментомъ и настолько малый чтобы въ теченіи его скорость постоянно возрастала или убывала,—къ величинѣ этого промежутка—заключается между величинами скоростей въ его началѣ и концѣ. Откуда слѣдуетъ, что безгранично уменьшая продолжительность этого промежутка, мы получимъ въ предѣлѣ разсматриваемаго отношенія скорость движенія въ данный моментъ. «Какъ ордината кривой есть показатель дифференціальнаго отношенія площади и ея абсциссы, такъ и скорость тѣла въ непрерывно перемѣнномъ движеніи

---

[1]) *Expos. élém.* p. 144. «Cependant, comme l'usage de ces mots est établi, nous ne devons par espérer que ces derniers en prennent la place; mais si les premiers doivent être tolérés, etc.». Терминъ «rapport intégral» во всякомъ случаѣ едвали выбранъ удачно.

[2]) *Ibid.* p. 147.

[3]) *Ibid.* Ch. XII, pp. 176—196, §§ LXX—LXXVII—*Légère ébauche des Applications à la Physique des calculs supérieurs*; стр. 176—189 содержатъ въ себѣ интересныя и здравыя разсужденія о нѣкот. вопрос. философіи природы; въ замѣткѣ къ p. 188 напечат. p. 210 Люилье говоритъ: «Les réflexions physiques contenues dans ce Chapitre sont tout particulièrement le fruit des instructions que j'ai eu le bonheur de recevoir de ce profond Philosophe (*Le Sage*);...» см. еще кромѣ этой замѣтки *Addition à la Note sur* Mr Le Sage, p. 211.

есть показатель дифференціальнаго частнаго проходимаго этимъ тѣломъ пространства ко времени употребленному на его прохожденіе, или предѣлъ отношенія одновременныхъ измѣненій этого пространства и этого времени (представленныхъ какими нибудь однородными количествами)». Точно также выводится и выраженіе для ускоренія [1]).

Признавая понятіе о скорости интуитивнымъ и первоначальнымъ, какъ это дѣлаетъ Люилье, можно, слѣдуя Ньютону, положить само это понятіе въ основаніе высшаго анализа [2]); такъ поступаетъ между прочимъ и аббатъ *Caluso* въ интересномъ мемуарѣ представленномъ Туринской Академіи Наукъ въ 1787 году [3]).—Подобно тому какъ движеніе—непрерывное измѣненіе мѣста въ пространствѣ происходитъ въ зависимости отъ истеченія времени, такъ непрерывное измѣненіе всякой величины какой бы то ни было природы можетъ происходить въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія другой величины. «Слѣдуетъ перейти», говоритъ Caluso, «къ болѣе общей идеѣ какого бы то ни было измѣненія и тогда можно сказать что *текущая величина* или *флюэнта* есть измѣняющаяся величина,

---

[1]) *Expos. élém.* Ch. XII, § LXXIV, pp. 189–190.

[2]) Ср. превосходныя замѣчанія, котор. дѣл. Carnot о методѣ флюксій Ньютона, Réfl. art. 140, 141, p. 144; «....car, a-t-on dit, c'est introduire dans la Géométrie, qui appartient aux Math. pures, la notion des vitesses, qui n'appartient qu'aux Mathématiques mixtes, et définir une idée qui doit être simple par une autre qui est complexe —Mais cette objection est assez frivole, car la véritable chose à considérer est de savoir si la théorie est plus facile à saisir de cette manière que d'une autre. Le classement que nous faisons des sciences est assez arbitraire....». Возраженіе Лагранжа въ *Th. d. f. an.* Introd. *O. de L.* t. IX, p. 17 сдѣланн. съ точки зрѣнія чисто алгебрической теоріи ф-ій имѣетъ больше значенія.—Въ новѣйшее время теорія флюксій послужила основаніемъ высшаго анализа въ замѣч. книгѣ *Ламарля*: Exposé géométrique du calcul différ. et intégr. précédé de la cinématique du point, de la droite et du plan etc. par *Ernest Lamarle*, 2 vols, Paris 1861–1863.

[3]) Des différentes manières de traiter cette partie des mathématiques que les uns appellent calcul différentiel et les autres méthode des fluxions. Par *M. L'Abbé de Caluso. Mémoires de l'Acad. Royale d. Sc.* Ann. 1786—87. Turin 1788, pp. 489-590.

а ея *флюксія* есть скорость съ которой она измѣняется.... Вотъ истинное отвлеченное и общее понятіе къ которому мы приходимъ, исходя изъ разсмотрѣнія частнаго случая линіи, длина которой растетъ или уменьшается болѣе или менѣе скоро вслѣдствіе движенія одной изъ ограничивающихъ ея точекъ» [1]). Caluso исключаетъ изъ высшаго анализа все что относится къ представленіямъ о безконечно-малыхъ или дифференціалахъ и удерживаетъ, съ небольшими измѣненіями, самыя обозначенія Ньютона и его школы [2]).

Таковы главнѣйшія воззрѣнія геометровъ разсматриваемаго періода на ученіе Ньютона. Гораздо меньше вниманія удѣляли математики прошлаго вѣка идеямъ Лейбница; разбросанныя въ разныхъ мѣстахъ его обширной переписки и въ нѣ-

---

[1]) *Des diff. manières etc.* art. 3, l. c. pp. 493—494.—Здѣсь опять (ср. прим. 2 на стр. 289) интересно сравнить зарождающіяся новыя воззрѣнія у геометровъ XVIII вѣка съ аналогичными воззрѣніями средневѣковыхъ ученыхъ. Схоластики смотрятъ на движеніе и скорость съ той-же общей (аристотелевской) точки зрѣнія какъ и Caluso; законъ движенія изображаютъ они графически, плоской кривой, и замѣчаютъ такимъ образомъ, что наибольшему значенію (maxim.) измѣняющейся величины соотвѣтствуетъ самое медленное ея измѣненіе (*N. Oresme*, см. *Curtse* въ Zeitschr. f. M. u. Ph. B. XIII, Supplementheft, p. 96). «Oresme's Augen offenbarte sich die Wahrheit des Satzes» говоритъ M. Канторъ (Vorl. üb. G. d. M. Bd. II, p. 120), «den man 300 Jahre später in die Worte kleidete, an den Höhen—und Tiefenpuncten einer Curve sei der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse Null; dass er ihn bewiesen, nur nach einem Beweise sich umgethan hätte, davon ist keine Spur zu entdecken», и прибавляетъ слѣдующее замѣчаніе которое могло бы служить лозунгомъ новой математики: «und erst mit dem Beweise wurde das scharfsinnige Sehen zum tiefsinnigen Verstehen». Ср. *Aristot.* Phys. (Op. ed. Ac. Bor.) III, 1, p. 201a, 10; VII, 2, p. 243a. 8; IV, I, p. 208a, 31 (различіе между *Κίνησις* и *φορά*).

[2]) Я упомяну здѣсь объ одной небольшой диссертаціи, написанной еще въ 1730 г. которая содерж. въ себѣ критику Фонтенелева ученія и написана въ томъ же духѣ какъ и статья Caluso. Она принадл. *A. Trembley* изъ Женевы (1700—1784), извѣстному въ свое время естествоиспытателю, дядѣ знамен. матем. *J. Trembley*; ср. *Hoeffer.* Hist. de la Zoologie Paris 1873, p. 248, Histoire d. Mathém. P. 1886, p. 557.—Th. Math. de Infinito et Calculo infinitesimali, quas D. F. Sub Praesidio D. D. *Joh. Lud. Calandrini* Math. Profess. publ. tueri conab. *Abrahamus Trembley*, Genev. Author & resp. Genevae 1730; ср. Cap. IX—XI, pp. 22—28; Trembley сохран., впрочемъ, Лейбницевы обозначенія.

которыхъ изъ его небольшихъ замѣтокъ, изложенныя случайно, безъ всякой связи, съ разныхъ точекъ зрѣнія и притомъ очень кратко, мысли Лейбница могли быть хорошо разобраны лишь очень внимательнымъ и проницательнымъ изслѣдователемъ. Даже послѣ изданія полнаго собранія его сочиненій, сдѣланнаго *Дютеномъ* въ 1768 году [1]), эти мысли остались почти неизвѣстными [2]). Единственными изложеніями началъ высшаго анализа болѣе или менѣе сообразными съ идеями Лейбница можно считать, съ одной стороны «теорію компенсаціи погрѣшностей или исключенія неопредѣленныхъ количествъ» знаменитаго французскаго геометра *Карно* [3]), съ другой—Эйлерову теорію Дифференціальнаго Исчисленія. Ни одна изъ этихъ теорій не обнимаетъ, однако, Лейбницева ученія во всей его полнотѣ; онѣ представляютъ лишь двѣ различныя стороны этого ученія.

Еще въ 1734 году знаменитый англійскій философъ *Берклей* [4]), возражая противъ законности выводовъ дѣлаемыхъ посредствомъ дифференціальнаго анализа, старался объяснить причину, по которой неточныя, по его мнѣнію, разсужденія приводятъ къ завѣдомо правильнымъ результатамъ,—обстоятельство выставлявшееся защитниками новаго исчисленія какъ сильный

---

1) *Gothofredi Guillelmi Leibnitii* etc. Opera omnia nunc primum collecta etc. studio *Ludovici Dutens.* Genevae ap. fratres de Tournes 1768, 6 vv. in 4°; Tomus III contin. Opera Mathematica; это изданіе, правда, менѣе полно чѣмъ Герхардтово, которымъ я пользовался при изложеніи Лейбницева ученія.

2) Люилье признается въ этомъ въ прим. (*) p. 134 Expos.—Даламбертъ, который такъ справедливо судитъ объ участіи Лейбница въ открытіи д. исч. и Лагранжъ, который такъ превосходно судитъ о немъ какъ математикѣ (см. *Encycl. méth.* art. Diff. l. c. pp. 529—530; *Leç. sur le calc. d. fonctions.* Leç. XVIII-me, *O. de L.* t. X, p. 298) повидимому совсѣмъ не знаютъ его философіи безконечно-малыхъ.

3) *Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot* род. въ 1753 г.—ум. въ 1823 г. Великолѣпную картину жизни и дѣятельности этого великаго человѣка написалъ *Араго*: *Carnot.* Biogr. lue en s. publ. de l'Ac. d. Sc. le 21 Août 1837. Not. biogr. t. I, pp. 511—633.

4) Въ сочиненіи *The Analyst*; ср. прим. 1) на стр. 244.

аргументъ въ его пользу [1]). Берклей замѣтилъ, и обнаружилъ это на частномъ примѣрѣ, что ошибка, дѣлаемая при переходѣ отъ геометрическихъ величинъ къ ихъ аналитическимъ выраженіямъ посредствомъ дифференціаловъ, компенсируется тѣми ошибками, которыя дѣлаются при нахожденіи этихъ дифференціаловъ изъ уравненій задачи по правиламъ дифференціальнаго исчисленія. Такъ напримѣръ, выражая подкасательную плоской кривой формулой $y\frac{dy}{dx}$ (разумѣя подъ dy и dx конечныя малыя разности) мы получаемъ величину превосходящую истинную на $y\overset{''}{y}\frac{dx}{2}+y\overset{'''}{y}\frac{dx^2}{6}+\&c.$ Вычисляя же $y\frac{dy}{dx}$ по уравненію кривой, сообразно съ правилами дифференціальнаго исчисленія, мы отбрасываемъ отъ этой величины сумму $y\overset{''}{y}\frac{dx}{2}+y\overset{'''}{y}\frac{dx^2}{6}+\&c.$ какъ разъ равную сдѣланной ошибкѣ и такимъ образомъ исправляемъ нашу погрѣшность [2]). Подобное же замѣчаніе сдѣлалъ позднѣе (въ 1761 году) и Лагранжъ: «въ методѣ безконечно-малыхъ», говоритъ онъ, «исчисленіе исправляетъ само по себѣ ошибки происходящія отъ ложныхъ предположеній этого метода. Воображаютъ себѣ, напримѣръ, что кривая есть многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ малыхъ сторонъ, каждая изъ которыхъ будучи продолжена представляетъ собою касательную къ кривой. Въ дѣйствительности это предположеніе ложно;.... но сдѣланная ошибка уничто-

1) *The Analyst*, art. 19, 20, Works ed. *Fraser*, Vol. III, pp. 269, 270: «I shall endeavour.... to explain why this may come to pass, and show how error may bring forth truth, though it cannot bring science». Подобныя же идеи высказывалъ еще *Rolle* (ср. прим. 1 на стр. 233); см. *Montucla*. Hist. d. M. t. III, p. 117.

2) *Ibid.* art. 21—24, pp. 270–274; *Weissenborn* l. c. § 13. Die Compensation d. Fehler, pp. 155—158; Берклей разбираетъ способъ нахожд. подкас. къ обыкн. параболѣ. Ср. замѣчаніе Эйлера въ *Inst. calc. diff.* Praefat pp. LIX—LX; *Weissenborn*. l. c. p. 158.

жается другой ошибкой, которую вводятъ въ исчисленіе, полагая равными 0 количества, которыя по предположенію безконечно малы. Вотъ въ чемъ состоитъ, какъ мнѣ кажется, Метафизика исчисленія безконечно малыхъ даннаго Лейбницемъ»[1]). Берклей и Лагранжъ приводили свои замѣчанія только въ объясненіе того факта, что методъ Лейбница, не смотря на кажущуюся неправильность своихъ предположеній, приводитъ къ точнымъ результатамъ.—Карно, напротивъ, воспользовался тѣми же соображеніями, чтобы строго обосновать дифференціальный методъ, не лишая его въ тоже время, какъ это дѣлали Даламбертъ и Люилье, его непосредственности и простоты[2]): этому предмету онъ посвятилъ особое сочиненіе, вышедшее въ свѣтъ въ 1797 году подъ заглавіемъ: «Размышленія о метафизикѣ исчисленія безконечно-малыхъ»[3]).

Карно разсматриваетъ дифференціальное исчисленіе какъ особый искусственный пріемъ, служащій для преобразованія аналитическихъ уравненій, а дифференціалы—какъ вспомогательныя неопредѣленныя количества или «ключи» этого исчисленія[4]), которые въ концѣ его должны совершенно исключаться, оставляя въ преобразованныхъ уравненіяхъ лишь вполнѣ опредѣленныя величины[5]). Сообразно съ этимъ онъ раздѣляетъ всѣ входящія въ высшій анализъ величины на два рода: 1) на

---

[1]) Примѣчаніе къ статьѣ: De l'Infini Absolu considéré dans la Grandeur par le *P. Gerdil*, Barnabite, *Miscell. Taur.* T. II, 1760—1761, P. II, pp. 1—45, *Ibid.* p. 18, *O de L.* t. VII, p. 598; ср. *Woodhouse* l. c. p. XI.

[2]) Ср. *Réflex.* art. 171, pp. 169—170; art. 37, pp. 40—41 (въ нов. издан).

[3]) Réflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitésimal. Paris 1797; также въ Oeuvres mathématiques du citoyen *Carnot*. A. Basle 1797, p. 125—204—Я цитир. по 5-му изд. Paris 1881, воспроизвод. издан. 2-ое (P. 1813) испр. и дополн самимъ Карно.

[4]) Ср. слова Лагранжа прив. на стр. 338—339, *Cauchy* пошелъ еще далѣе въ томъ же направленіи въ мем. Sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques, *Comptes rend.* 1853. 2-e sem. pp. 36, 57.

[5]) *Réflex.* art. 15, pp. 21—22; ср. остроумныя и глубокія разсужденія *Конта*: Cours de philos. positive par *M Auguste Comte*. T. I, Paris 1830, pp. 191—193.

опредѣленныя количества (*quantités désignées*)—постоянныя и перемѣнныя, которымъ можно придавать опредѣленные размѣры, имѣющія въ данномъ вопросѣ опредѣленное значеніе какъ искомыя или данныя, и 2) на *неопредѣленныя количества* (*quantités non désignées*), болѣе или менѣе независимыя отъ первыхъ и остающіяся перемѣнными и неопредѣленными даже когда величины перваго рода принимаютъ опредѣленныя значенія [1]). Эти количества втораго рода могутъ быть *безконечно-малыми*, т. е. разсматриваться какъ убывающія и способныя быть сдѣланными какъ угодно малыми безъ того, чтобы для этого пришлось измѣнять величины перваго рода; единица раздѣленная на безконечно-малое количество есть то, что называютъ *безконечнымъ*, или *безконечно-большимъ количествомъ*.[2]).

«*Анализъ безконечно малыхъ* есть ничто иное какъ искусство вспомогательнаго употребленія безконечно малыхъ количествъ для розысканія соотношеній существующихъ между предложенными количествами»[3]).

«Я называю», говоритъ далѣе Карно, «*несовершеннымъ уравненіемъ* всякое уравненіе, строгая точность котораго не доказана, но о которомъ извѣстно, что погрѣшность, если она только существуетъ, можетъ быть предположена сдѣланной какъ угодно малой, такъ чтобы для превращенія уравненія въ совершенно точное достаточно было подставить вмѣсто всѣхъ входящихъ въ него количествъ, или нѣкоторыхъ изъ нихъ, другія количества, отличающіяся отъ нихъ безконечно мало».[4]) Установивъ эти понятія, можно легко доказать слѣдующую *теорему*, въ которой заключается, по мнѣнію Карно, вся теорія безконечности: чтобы быть увѣреннымъ въ необходимой и строгой точности полученнаго уравненія достаточно

---

[1]) *Réflex*. art. 17, p. 23; къ сожалѣнію я не могъ подъискать въ русскомъ языкѣ двухъ словъ, которыя хорошо выражали бы различіе нятій опред. терм. déterminé и désigné.

[2]) *Ibid*. art. pp. 20–21.

[3]) *Ibid* въ концѣ art. 14.

[4]) *Ibid*. art. 35 p. 37.

убѣдиться въ томъ, что 1°. оно выведено изъ истинныхъ, или по крайней мѣрѣ несовершенныхъ уравненій, посредствомъ преобразованій не лишающихъ ихъ характера по крайней мѣрѣ несовершенныхъ уравненій; что 2°. оно не содержитъ больше безконечно малыхъ количествъ, но только опредѣленныя количества перваго рода.[1]) Такимъ образомъ, Анализъ безконечно-малыхъ приводится къ образованію точныхъ или несовершенныхъ уравненій или предложеній, выражающихъ условія предложеннаго вопроса и къ преобразованіямъ этихъ уравненій или предложеній въ другія, того же характера, преобразованіямъ, имѣющимъ окончательной цѣлью полное исключеніе изъ результатовъ вычисленія безконечно малыхъ количествъ и ихъ функцій. Эта возможность замѣнятъ точныя уравненія несовершенными значительно упрощаетъ процессы ихъ образованія и преобразованія и составляетъ главную силу и преимущество исчисленія безконечно-малыхъ.[2]).

Таковъ смыслъ опредѣленія Карно, по которому «Анализъ безконечно малыхъ есть ничто иное какъ исчисленіе компенсованныхъ погрѣшностей»[3]).

Чтобы выразить условія задачи въ терминахъ исчисленія безконечно-малыхъ, мы должны прежде всего представить себѣ систему опредѣляющихъ рѣшеніе ея постоянныхъ и перемѣнныхъ количествъ въ какомъ нибудь опредѣленномъ состояніи, которое мы разсматриваемъ какъ неизмѣнное или неподвижное. Всѣ величины этой неподвижной системы суть *количества опредѣленныя.*[4]) Разсмотримъ затѣмъ предложенную систему въ другомъ, отличномъ отъ перваго состояніи, въ которомъ мы

---

[1]) *Réflex.* art. 34, pp. 38—39; «toute la théorie de l'infini peut être regardée comme renfermée dans le théorème suivant». (конецъ art. 33, p. 38).
[2]) *Ibid.* art. 33, pp. 37—38; cp. art. 167, pp. 166—167.
[3]) *Ibid.* art. 148, p. 150.
[4]) *Ibid.* art. 22 p. 27.

будемъ называть ее *вспомогательной системой*[1]). Представимъ себѣ, наконецъ, что эта вспомогательная система приближается постепенно къ неподвижной, такимъ образомъ, что всѣ составляющія ее перемѣнныя *вспомогательныя количества* приближаются одновременно къ опредѣленнымъ количествамъ, отвѣчающимъ имъ въ неподвижной системѣ, такъ что можно предположить всѣ ихъ соотвѣтственныя разности одновременно какъ угодно малыми. Эти безконечно-малыя разности и суть *дифференціалы* соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ количествъ—неопредѣленныя количества, которыя должны быть исключены изъ окончательнаго результата[2]).

Вмѣсто того чтобы представлять себѣ систему перемѣнныхъ количествъ въ двухъ послѣдовательныхъ состояніяхъ, неподвижномъ и вспомогательномъ, можно разсматривать ее въ одномъ неподвижномъ и нѣсколькихъ вспомогательныхъ состояніяхъ, безконечно-мало отличающихся другъ отъ друга, такъ что всѣ вспомогательныя системы, приближаясь къ неподвижной, совпадаютъ съ ней одновременно, и всѣ дифференціалы одной изъ нихъ по отношенію къ другой одновременно исчезаютъ. Разности значеній какого нибудь количества въ опредѣленной системѣ и въ различныхъ вспомогательныхъ различны между собой, и дифференціалъ этого количества можетъ, поэтому, самъ быть разсматриваемъ какъ перемѣнное количество. Подобно тому какъ dx—первый дифференціалъ отъ x—выражаетъ количество, на которое измѣняется x при переходѣ отъ неподвижной системы къ первой вспомогательной, ddx есть второй дифференціалъ отъ x, выражающій измѣненіе dx при переходѣ отъ первой вспомогательной системы ко второй, d^3x, или третій дифференціалъ отъ x—измѣненіе ddx при переходѣ отъ второй вспомогательной системы къ третьей

---

[1]) *Système auxiliaire*... «attendu que ce nouvel état n'est imaginé que pour trouver plus facilement les relations des quantités qui composent le premier,...». *Ibid.*

[2]) *Réflex.* art. 22, p. 27 и art. 46, p. 52; ср. art. 49, pp. 54—55, art. 50, pp. 55—56.

и т. д.[1]) Такимъ образомъ возникаетъ Лейбницевъ алгориемъ дифференціальнаго исчисленія[2]).

Когда исключеніе вспомогательныхъ количествъ—дифференціаловъ можетъ быть выполнено съ помощью лишь обыкновенныхъ алгебрическихъ преобразованій, производимыя при этомъ дѣйствія относятся къ дифференціальному исчисленію; но когда это исключеніе можетъ быть исполнено только съ помощью дѣйствія обратнаго дифференцированію, является новое, *интегральное* исчисленіе. Количество, дифференцированіе котораго даетъ данный дифференціалъ, называется его *интеграломъ*; это есть сумма всѣхъ послѣдовательныхъ безконечно-малыхъ приращеній составляющихъ рядъ, котораго предложенный дифференціалъ есть общій членъ[3]). Знакъ $\int$, какъ относящійся къ дѣйствію надъ *неопредѣлеными количествами*, долженъ быть также исключенъ изъ результата вычисленія, какъ и знакъ дифференціала. Уравненіе дающее площадь полуотрѣзка параболы (отнесенной къ оси и касательной въ вершинѣ): $S = \int \frac{2y^2 dy}{p}$ — *несовершенно*, равно какъ и уравненіе $\int \frac{2y^2 dy}{p} = \frac{2}{3} xy$. Точное уравненіе $S = \frac{2}{3} xy$ мы получимъ, исключая интегралъ[4]).

Таковы основныя положенія теоріи Карно; она въ сущности, ничего не прибавляетъ къ объясненіямъ Лейбница. Имѣя

---

[1]) *Réflex.* art. 68, pp. 71—73.

[2]) Карно посвящаетъ заключительные параграфы своей книги (Conclusion générale, art. 159—174. pp. 160—182, см. въ особ. § 164 pp. 164—165) защитѣ Лейбницевой методы и выясненію ея преимуществъ предъ другими «par lesquelles on peut suppléer à l'Analyse infinitésimale»,—истощенія, недѣлимыхъ, первыхъ и послѣднихъ отношеній или предѣловъ, флюксій, исчезающихъ количествъ, аналитическихъ функцій или производныхъ. Эти методы онъ излагаетъ въ главѣ III своего сочиненія (art. 106—158, pp. 111—160). См. еще Géométrie de position par *L. N. M. Carnot.* Paris 1803, art. 19, 20, pp. 16—19; объ этомъ послѣднемъ сочиненіи Карно намъ придется еще говорить впослѣдствіи.

[3]) *Réflex.* art. 77, 78, pp. 82, 83.

[4]) *Ibid.* art. 79, 80 pp. 84—87.

передъ ними несомнѣнное преимущество по своей ясности и точности, она однако совершенно оставляетъ въ сторонѣ ту идею Лейбница, что исчисленіе безконечно-малыхъ есть *анализъ трансцендентныхъ величинъ.*[1]) Неопредѣленные вспомогательные дифференціалы Карно, непремѣннымъ условіемъ законнаго существованія которыхъ является исчезновеніе ихъ изъ конечныхъ опредѣленныхъ результатовъ, не могутъ быть введены какъ элементы выраженій *sui generis* для такихъ результатовъ въ области трансцендентныхъ величинъ безъ существенныхъ измѣненій въ самыхъ принципахъ теоріи Карно: «... невозможно было бы установить наше исчисленіе трансцендентныхъ величинъ», говоритъ Лейбницъ, «не прибѣгая къ исчезающимъ разностямъ, гдѣ мы беремъ сразу несравненно малыя количества, вмѣсто безгранично убывающихъ, какъ угодно малыхъ»[2]). Для выясненія этой стороны Лейбницева ученія, не входящей въ теорію Карно, и имѣетъ значеніе Эйлерова теорія дифференціальнаго исчисленія. Съ другой стороны она примыкаетъ и къ Ньютоновой теоріи, основываясь точно также, до нѣкоторой степени, на ученіи о предѣлахъ. Болѣе строгое, послѣдовательное и обстоятельное развитіе и приложеніе этого ученія восполняетъ недостатки различныхъ теорій дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и соединяетъ ихъ въ одну строгую и точную современную теорію, окончательнымъ установленіемъ которой мы обязаны работамъ *Коши* и *Дюгамеля*[3])

---

[1]) Ср. стр. 181, 184, 186, 189, 232.

[2]) См. стр. 232 и соотв. примѣч. Карно, напротивъ, говоритъ: «...en leur qualité de simples auxiliaires, toutes ces quantités dites infinitésimales et leurs fonctions quelconques doivent nécessairement se trouver exclues des résultats du calcul....» *Réfl.* art. 15, p. 21.

[3]) *Cauchy.* Résumé des leçons données á l' École royale Polytechnique Sur le calcul infinitésimal. Paris 1823. Leç. 1—4. — Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829. — Excercices de Math. t. I. p. 145 — Sur les divers ordres de quantités inf. pet.—Excerc. d'An. et de phys. math. t. II, p. 188, t III p. 5 (ср. прим. 4 на стр. 352 ; Comptes Rend. 1843, 2-e sem. p. 275.—Dei Metodi Analitici. Roma 1843, pp. 24 sqq. — *Duhamel.* Cours d' analyse de l' École polytechnique. Paris 1840—41; новыя изданія этого носятъ заглавіе: Élements de calcul infinitésimal; ср. 4-e éd. notée par J. Bertrand. P. 1896, préface и t. I, art. 33—37 (pp. — (176 pp. 227—230).

Изложенію основаній своей теоріи Эйлеръ посвящаетъ все Введеніе въ свои «Начала дифференціальнаго исчисленія»[1]). Прежде всего онъ говоритъ о томъ, что дифференціальное исчисленіе занимается разсмотрѣніемъ перемѣнныхъ величинъ и ихъ функцій и даетъ опредѣленіе функціи болѣе общее чѣмъ данное во «Введеніи»: «Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae haurm functiones appellari solent: quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur».[2]). —«Дифференціальное исчисленіе есть методъ опредѣленія отношенія исчезающихъ приращеній, которыя принимаютъ какія нибудь функціи, когда перемѣнная величина, отъ которой онѣ зависятъ получаетъ исчезающее приращеніе».[3]) «Интегральное исчисленіе есть ничто иное, какъ методъ нахожденія функцій по данному отношенію ихъ приращеній»[4]). Эти приращенія, лишенныя величины (incrementa quantitate destituta), и потому называемыя безконечно-малыми—и суть дифференціалы соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ[5]). Такъ какъ эти дифференціалы —абсолютные нули, то не слѣдуетъ дѣлать относительно ихъ никакихъ заключеній, кромѣ тѣхъ, которыя имѣютъ въ виду ихъ отношенія, приводящіяся во всякомъ случаѣ къ конечнымъ количествамъ»[6]). «Слѣдуетъ разсматривать сначала эти приращенія какъ конечныя и даже, если это нужно для уясненія предмета, представлять ихъ въ конечномъ видѣ на чертежахъ; затѣмъ эти приращенія мыслятся постоянно уменьшающимися, такъ что отношеніе ихъ постоянно все болѣе и болѣе прибли-

---

[1]) Ср. стр. 260, прим. 2) и прим. на стр. 258; *Inst. Calc. Diff.*, Praefatio, pp. LV—LXIV.

[2]) *Ibid.* p. LVI sub fin.; ср. 259, 261.

[3]) *Ibid.* pp. LVII—LVIII.

[4]) *Ibid.* p. LVIII.

[5]) *Ibid.*; cp. art. 114 p. 81.

[6]) *Ibid.* p. LIX.

жается къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, котораго однако достигнетъ лишь тогда, когда приращенія совершенно исчезнутъ. Этотъ предѣлъ, представляющій какъ бы послѣднее отношеніе приращеній и есть истинный объектъ Дифференціальнаго Исчисленія»[1]). «Онъ выражается нѣкоторой новой функціей, и сравненіе исчезающаго ея приращенія съ другими приводитъ насъ къ дифференціалу второго порядка; такимъ образомъ слѣдуетъ понимать происхожденіе и другихъ высшихъ дифференціаловъ, такъ что на самомъ дѣлѣ всегда имѣются въ виду конечныя количества, а знаки дифференціаловъ употребляются лишь для болѣе удобнаго ихъ представленія»[2]).

Согласно правилу: «incrementa primum ut finita considerare», Эйлеръ посвящаетъ первыя двѣ главы своего трактата теоріи конечныхъ разностей. Здѣсь въ первой главѣ, излагаются правила конечнаго дифференцированія и интегрированія[3]), и результаты того и другаго дѣйствія, въ приложеніи къ простѣйшимъ алгебрическимъ и трансцендентнымъ функціямъ, даются въ конечномъ видѣ и въ видѣ безконечныхъ рядовъ[4]). Вторая глава носитъ заглавіе: «De usu differentiarum in doctrina serierum»: формулы для выраженія суммъ одинаковыхъ степеней неопредѣленнаго числа натуральныхъ чиселъ:

---

1) *Inst. c. diff.* p.LXI.

2) *Ibid.* p. LXIII Ср. замѣчанія объ Эйлеровой теоріи безконечно малыхъ у *Mansion*. Equisse de l'histoire du calc. inf. ch. III art. 5. II, pp. 21—22, art. 6, XII, p. 31. Зачатки ея находятся у Лейбница: см. p. 228, прим, 2)-

3) *Inst.c. diff.* P.I. Cap. I.De Differentiis finitis, pp.3—32. Объ исторіи исч. конечн. разн. см. *Gustaf Eneström*. Differenskalkylens historia, I. Upsala 1878; *Montucla* H. d. M. Part. V. L. I., XIII, t. III., pp. 243—258; *Klügel*. Math. Wört. Erste Abth. Erst. Th., pp. 803—809—Geschichte der Differenzenrechnung. Ср. также *Lacroix*. Traité du c. d. et. duc. i. t. III, pp. VIII et suiv., 1—321—полное изложеніе разностнаго исчисленія—сводъ трудовъ геометровъ прошлаго вѣка.

4) *Inst. Calc. diff.* P. I. Cap. I, art. 17, 19—22, 30.

$\mathrm{S}x^n$, а равно и суммъ факторіаловъ: $\mathrm{S}(x+n)^{m/1}$ и $\mathrm{S}\frac{1}{(x+n)^{m/1}}$, служитъ для суммованія болѣе сложныхъ рядовъ конечныхъ и безконечныхъ[1]). Формулы обратнаго исчисленія разностей представляются при этомъ съ новой точки зрѣнія, къ которой впослѣдствіи Эйлеръ возвращается: онѣ служатъ для *превращенія числовыхъ функцій въ аналитическія*[2]).

Въ третьей главѣ «De infinitis atque infinite parvis» Эйлеръ подробно излагаетъ свою теорію безконечныхъ количествъ, намѣченную въ предисловіи. Послѣ философскаго введенія о метафизическомъ смыслѣ и значеніи безконечности[3]), онъ переходитъ къ математической теоріи безконечно-малыхъ: «Quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas evanescens, ideoque revera erit$=0$», вотъ первое положеніе всей теоріи[4]). Чтобы воспользоваться этимъ положеніемъ и сдѣлать возможнымъ различеніе и сравненіе безконечно-малыхъ, Эйлеръ устанавливаетъ еще одно основное положеніе: «ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero geometrica», что видно, по словамъ Эйлера, изъ пропорціи $2:1=0:0$, или изъ равенства $n.\ 0=0$ (гдѣ n какое нибудь цѣлое число), дающаго пропорцію $n:1=0:0$. Съ цѣлью различенія въ геометрическомъ отношеніи нулей—безко-

---

[1]) *Inst. calc. diff.* P. I. Cap. II, art. 60—64, pp. 46—51; art. 65—71, pp. 51—56.

[2]) Ср. *Ibid.* art. 52, 53, pp. 42—43; мы разберемъ впослѣдствіи подробнѣе работы Эйлера по интерполяціи рядовъ.

[3]) *Inst. calc diff.* P. I. Cap. III, art. 72—82, pp. 57—62. Эйлеръ видитъ основаніе всего ученія о безконечности въ положеніи: «*omnem quantitatem in infinitum augeri posse*». (art. 72). Онъ не отвергаетъ актуальной безконечности въ математикѣ (art. 82), но считаетъ ходячія метафизическія теоріи безконечности опутанными столькими противорѣчіями и трудностями, «ut qua se extricarent, nulla via pateret». (art. 74—81). Эйлеръ былъ горячимъ противникомъ современнаго ему вольфіанства, въ частности монадологіи. См Lettres à une pr. d'All. (ср. стр. 258, примѣчан. 1) Lettres 76, 123—132 (Nov. 1760, Avr. et Mai 1761) *H. Cohen.* Das Princip d. Inf. Meth. u. seine Gesch., pp. 54—55, 91—92. Въ томъ же сочиненіи см. исторію разл. ученій о безк. въ XVIII вѣкѣ.

[4]) *Inst. c. diff.* art, 83, P. I. pp. 63—64.

нечно-малыхъ, вмѣсто однообразнаго обозначенія 0 принимаются новыя: dx, dy,.. указывающія на ихъ происхожденіе, отъ котораго, впрочемъ, въ третьей главѣ «Основаній дифференціальнаго исчисленія» — общей теоріи безконечно-малыхъ — символы эти разсматриваются совершенно независимо [1]). Изъ перваго положенія вытекаетъ непосредственно правило, «canon ille maxime receptus, quod *infinite parva prae finitis evanescant, atque adeo horum respectu reiici queant*», что обнаруживается равенствами $a+ndx-a=0$ (въ ариѳметическомъ отношеніи) и $\frac{a+ndx}{a}=1$ (въ геометрическомъ отношеніи), справедливость которыхъ обусловливается положеніемъ $ndx=0$ [2]). Равнымъ образомъ, изъ равенствъ $dx+dx^n-dx=0$ и $\frac{dx+dx^n}{dx}=1+dx^{n-1}=1$, «manifestum est prae infinite parvis primi ordinis evanescere infinita parva altiorum ordinum» ....«atque in genere infinite parva cuiusque ordinis superioris evanescere prae infinite parvis ordinis inferioris»..: $adx^m+bdx^n=adx^m$, (при $n>m$) что справедливо даже и для дробныхъ показателей: $a\sqrt{dx}+bdx=a\sqrt{dx}$ [3]).

Безконечно большое количество, знакъ котораго есть ∞ опредѣляется равенствомъ $\frac{a}{dx}=\infty$ (гдѣ a конечное число неравное 0), такъ что дроби $\frac{a}{0}$ и $\frac{a}{\infty}$ служатъ знаменателями одна для другой; эти дроби очевидно не могутъ представлять конечныхъ величинъ [4]). «Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$», прибавляетъ Эйлеръ, «imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis cuius numerator est finitus, de-

---

[1]) *Inst. calc. diff.* art. 84—86, pp. 63—64.

[2]) *Ibid.* art. 87, pp. 64—65. Ср. *L'Hospital.* Anal. d. inf. p. Paris 1696, Prem. p. sect. pr., I Demande ou Supposition, pp. 2—3, или *Varignon.* Eclaircissemens s. l'An. d. i. p. Paris. 1725, p. 2: *Mutatio indefinitè parva, mutatio nulla.*

[3]) *Inst. c. diff.* P. I. art. 88—89, pp. 65—66. Ср. стр. 254.

[4]) *Inst. c. diff.* P. I. art. 90, 91, p. 66—67.

nominator vero imaginarius, neque infinite magnus, neque infinito parvus esse potest»[1]) Будучи разсматриваемы съ такой точки зрѣнія, безконечно-большія количества могутъ быть различаемы и сравниваемы, подобно безконечно-малымъ, между собою, съ этими послѣдними и съ конечными величинами въ ариѳметическомъ и геометрическомъ отношеніяхъ[2]).

Эйлеръ дополнилъ впослѣдствіи теорію безконечныхъ величинъ особымъ изслѣдованіемъ, напечатаннымъ въ Актахъ Петербургской Академіи Наукъ за 1778 г., подъ заглавіемъ: De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum. Прежде чѣмъ закончить изложеніе третьей главы «Дифференціальнаго Исчисленія», будетъ умѣстно передать вкратцѣ содержаніе этого замѣчательнаго мемуара. Эйлеръ разбираетъ здѣсь болѣе подробно понятіе о порядкахъ безконечныхъ величинъ. Не только цѣлыя положительныя степени основной величины заключающіяся въ формулѣ x^m, замѣчаетъ онъ, даютъ безконечный рядъ различныхъ порядковъ, но и формула $x^{\frac{m}{n}}$ также доставляетъ безчисленное множество безконечно-большихъ или малыхъ величинъ. занимающихъ промежуточныя мѣста въ ряду 1, x, x^2, x^3......[3])· «Высшій анализъ доставляетъ сверхъ того безчисленные другіе порядки, какъ безконечно-большихъ, такъ и безконечно-малыхъ, которые никакимъ образомъ не могутъ быть включены въ число тѣхъ, о которыхъ мы только что говорили, сколь много бы мы ихъ ни брали. Эти новыя безконечно-малыя или большія величины оказываются всегда безконечно бóльшими или меньшими всѣхъ упомянутыхъ раньше величинъ»[4]). Такія количества, встрѣчающіяся въ Высшемъ Анализѣ, могутъ быть раздѣлены на два класса, логариѳмовъ и показательныхъ количествъ.

---

[1]) *Inst. calc. diff.*. art 91, sub fin.
[2]) *Ibid.* art. 92—97, pp 67--71.
[3]) *Acta Ac. Sc. Imp. Petr.* pro anno 1778, pars prior, Petr. 1780, pp. 102—104.
[4]) *Ibid.* § 6. p. 104.

Можно доказать, во-первыхъ, что $x^{\frac{1}{n}}$ всегда будетъ безконечно-больше lx, при $x = \infty$, каково бы ни было цѣлое положительное число n. Вотъ какъ разсуждаетъ Эйлеръ: дробь

$$v = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{lx} = \frac{p}{q} \left(\text{гдѣ } p = \frac{1}{lx}, \ q = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right), \text{ при } x = \infty$$

принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, и истинное значеніе ея, по правилу Лопиталя, найдется по формулѣ $v = \frac{dp}{dq} = \frac{nx^{\frac{1}{n}}}{(lx)^2}$; съ другой стороны дано, что $vv = \frac{x^{\frac{2}{n}}}{(lx)^2}$; раздѣляя это равенство почленнно на предъидущее, получимъ $v = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}}$ — безконечно бульшую величину при $x = \infty$, «иными словами lx есть всегда величина безконечно меньшая чѣмъ $x^{\frac{1}{n}}$, если даже мы будемъ принимать для n сколь угодно большія значенія»[1]). По этой причинѣ приходится установить совершенно новый порядокъ безконечно большихъ величинъ, соотвѣтствующій положенію логариѳма lx, и къ которому степень $x^{\frac{1}{n}}$ безгранично приближается по мѣрѣ возрастанія числа n; $x^{\alpha} lx$ (гдѣ α цѣлое число), безконечно меньше чѣмъ $x^{\alpha + \frac{1}{n}}$ и по своему порядку занимаетъ промежуточное положеніе между порядками x^{α} и $x^{\frac{1}{n}}$. «Cum igitur lx constituat quasi gradum in-

[1]) *Acta Petr.*, 1778. §§ 7—10, pp.104—106 Cp. *Inst c. d.* P. II. Cap. XV, Exempl. VI, p. 598 и примѣч. издателя Сперони, pp. 812—814 съ ссылкой на сочин. Disquisitiones Phys.—Math. (*Disquis.* XIII de infinito logarithmico). *Gregorii Fontanae*, по совѣту и указаніямъ котораго выполнено изданіе *Фердинанда Сперони*.

fimum omnium quantitatum infinite magnarum», замѣчаетъ Эйлеръ, «euidens est, hinc numerum graduum supra constitutorum, qui iam erat infinitus, insuper in infinitum augeri debere»[1]).

Но этимъ еще не исчерпывается все множество различныхъ порядковъ безконечно-большихъ величинъ. Такъ какъ llx безконечно меньше чѣмъ lx, то ясно что изъ этой формулы и ея степеней $(llx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ можно образовать безчисленное множество новыхъ порядковъ безконечно-большихъ количествъ, сочетая ее со степенями и самаго x и его логориѳма lx; тѣ же соображенія можно распространить и на болѣе сложныя формулы $lllx$, $llllx$ и т. д.[2]).

Можно сказать еще, что при $a > 1$, a^x безконечно больше чѣмъ x^n, при $x = \infty$, какъ бы великъ ни былъ показатель n; отсюда не трудно заключить, что при α и β положительныхъ формула $a^{\alpha x^{\beta}}$ доставляетъ безконечно-большія количества порядковъ безконечно высшихъ чѣмъ какъ угодно высокія степени x. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что какъ угодно малое увеличеніе основанія a безконечно повышаетъ порядокъ a^x; ибо, при $b > a$, отношеніе a^x къ b^x равно отношенію 1 къ $\left(\frac{b}{a}\right)^x$, т. е. 1 къ безконечности безконечно-высокаго порядка. Показательную формулу безконечности можно всегда привести къ виду $e^{\alpha x^{\beta}}$. Формула $e^{e^{\alpha x^{\beta}}}$ и другія подобныя даютъ безчисленное множество дальнѣйшихъ порядковъ безконечно-большихъ величинъ[3]). — Обратныя величины даютъ соотвѣтственные порядки безконечно-малыхъ[4]).

---

[1]) *Acta Petr.* 1778. § 11, p. 106.
[2]) *Ibid.* §§ 12—14, pp. 106.—108.
[3]) *Ibid.* §§ 15—18, pp. 108—111. Cp. *Inst. c. diff.* P. II. Cap. XV, Ex. VII, p. 599.
[4]) *Acta Petr.*, 1778, §§ 14, 19, pp. 108, 111.

Эйлеръ различаетъ, такимъ образомъ, три класса безконечно-малыхъ, получаемыхъ изъ основнаго безконечно-малаго количества x.

Къ *первому* — принадлежатъ количества доставляемыя формулой x^α (гдѣ $\alpha > 0$).

Ко *второму*,—количества образуемыя изъ безконечно-малой $\frac{1}{u}$, гдѣ $u = l\frac{1}{x}$. Къ этому классу принадлежитъ *во первыхъ* формула $\frac{1}{u^\alpha}$, *во вторыхъ* формула $\frac{x^\alpha}{u^\beta}$, смѣшанная изъ количествъ перваго и второго классовъ, *въ третьихъ* формулы убывающихъ порядковъ $\frac{1}{llu}$, $\frac{1}{lllu}$ и т. д., и *въ четвертыхъ* порядки, образованные сочетаніемъ всѣхъ упомянутыхъ выше формулъ безконечно-малыхъ. Слѣдуетъ замѣтить еще, что хотя количество $u = l\frac{1}{x}$ и безконечно-велико, но произведенія $x^n u^\alpha$ всѣ безконечно-малы, при $n > 0$ и при всякомъ α.

Къ *третьему* классу принадлежатъ безконечно-малыя количества, доставляемыя показательными формулами. Подобно тому, какъ безконечно-малыя второго класса принадлежатъ къ порядкамъ ниже тѣхъ, которые составляютъ первый классъ, простѣйшая формула третьяго класса $e^{-\frac{1}{x}}$ даетъ безконечно-малую величину какъ бы наивысшаго порядка, т. е. количество безконечно-меньшее всѣхъ величинъ перваго класса. Тоже можно сказать и о болѣе общей формулѣ $e^{-\frac{\alpha}{x^\beta}}$[1])

---

[1]) *Acta Petr.*, 1778, §§ 19—22, pp.111—113 Эйлеровы трансц. порядки безкон.-больш. колич. играютъ главную роль въ новѣйшихъ изслѣдованіяхъ о признакахъ сходимости и расходимости б. рядовъ съ положительными членами: см. въ особ. *P. Du Bois Reymond.* Eine neue Theorie d. Convergenz und Divergenz v.Reihen mit positiven Gliedern. *Borch. Journ.* Bd. 76. Berl. 1873. pp. 61—91. Тотъ же математикъ изслѣд. логариом. и по-

Не трудно видѣть, что, если числовымъ элементамъ въ формулахъ Эйлера придавать раціональныя значенія, то совокупность ихъ доставитъ намъ систему порядковъ безконечно-малыхъ, принадлежащую, по номенклатурѣ Георга Кантора, ко второму классу безконечныхъ системъ[1]).

Эйлеръ заканчиваетъ разобранный мемуаръ попыткой приложить свою классификацію безконечно-малыхъ къ нѣкоторымъ высшимъ трансцендентнымъ функціямъ выражаемымъ интегралами. Онъ показываетъ, что интегралы

$$\int_0^x t^\beta \left(l\frac{1}{t}\right)^m dt\,,\quad \int_0^x t^n e^{-\frac{\alpha}{t^\beta}} dt,\quad \int_0^x t^k \left(l\frac{1}{t}\right)^m . e^{-\frac{\alpha}{t^\beta}} dt$$

исчезающіе одновременно съ x, отличаются отъ величинъ

$$\frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1}\left(l\frac{1}{x}\right)^m,\ \frac{1}{\alpha\beta} x^{n+\beta+1} e^{-\frac{\alpha}{x^\beta}},\ \frac{1}{\alpha\beta}.x.^{k+\beta+1}\left(l\frac{1}{x}\right)^m_. e^{-\frac{\alpha}{x^\beta}}$$

каз. безконечности съ точки зрѣнія особаго, имъ же введеннаго исчисленія см. его статьи: Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. *Annali di Matem. pura ed appl.* Ser. II, T. IV, Milano 1870—1871, pp. 338-353; Théorème général concernant la gr.rel.d. inf. d.f.et de leurs dérivées. *Borchardt's Journal für die reine u. angew. Math.* Bd. 74, Berl. 1872, pp. 294-304; Ueber die Paradoxen des Infinitär—Calcüls, *Mathem. Annalen* Bd. 11, 1877, pp.149—1 7. Подобныя же соображ. находятъ себѣ мѣсто въ теоріи признаковъ различенія особыхъ рѣшеній дифф. ур. 1-го пор. по самому диффер. уравненію. Ср. способъ *P.-N. Blanchet* (*Hoüel.* Cours de calc. infinit. art. 860, 861, T. II, pp. 390—394).

[1]) Ср. *G. Cantor.* ll. cc. въ прим.2 на стр. 309; *Acta Math.* t. II, pp. 385—383. P. Du Bois Reymond первый показалъ возможность построенія функціи возрастающей до безконечности медленнѣе чѣмъ логариѳмич. функціи сколь угодно высокихъ порядковъ и непринадлежащей слѣд. къ Эйлерову классу: см. прибавленіе къ статьѣ о сход. рядовъ съ пол. членами цитир. въ пред. прим., l. c. pp.88—91: Ueber die Tragweite der logarithmischen Criterien Методъ Дю Буа Реймона можетъ быть распространенъ на прогрессивное построеніе еще новыхъ типовъ безконечно возрастающихъ функцій сообразно съ открытыми Г. Канторомъ законами образованія безконечныхъ системъ. Ср. *Du Bois Reymond*, Math. Ann. t. 11, 1877, *Pincherle*, Memor. dell' Accad. di Bologna, ser. IV, t. 5, 1884; *J. Ha*

соотвѣтственно, на количества безконечно-малыя относительно этихъ величинъ; α и β при этомъ > 0[1]).

Мы вернемся теперь къ дальнѣйшему изложенію третьей главы Эйлерова «Дифференціальнаго исчисленія».

«Какъ безконечно-малыя, такъ и безконечно-большія величины», продолжаетъ Эйлеръ, «особенно часто встрѣчаются при разсмотрѣніи числовыхъ рядовъ; и такъ какъ при этомъ онѣ встрѣчаются наравнѣ съ конечными числами, это разсмотрѣніе ясно покажетъ, какимъ образомъ, по законамъ непрерывности, происходитъ переходъ отъ конечныхъ количествъ къ безконечно-большимъ и безконечно-малымъ». Ряды &c. $-4-3-2-1+0+1+2+3+4+$ &c. &c. $+16+9+4+1+0+1+4+9+16+$&c. и &c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+$ $+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+$&c., общіе члены которыхъ суть соотвѣтственно x, x^2 и $\sqrt{x}$, показываютъ, что 0 служитъ для перехода

damard. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes. *Acta Math.* t. 18, 1894, pp. 319—336 и Note Additionnelle, p. 421. *Borel* установилъ, вопреки мнѣнію D. B.-R., что полная система безконечно возрастающихъ функцій равносильна сплошной системѣ; см. *Em. Borel.* Leçons sur la Théorie des Fonctions. Paris 1898, pp. 114—119: La formation d'une échelle de types croissants. Ср. *Du Bois Reymond.* Die allgemeine Functionentheorie. Erst. Th Tübingen, 1882, Cap. V, 69, pp. 278—284; Ueber den monotonen Endverlauf der Functionen und die infinitäre Pantachie.—*A. Pringsheim.* Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz—Grenze und eine besondere Form der Convergenz—Bedingung für unendliche Reihen». Sitz.—Ber. d. Münch. Ak. 1897, pp. 303—317.—«Dans un Mémoire récent», говоритъ объ этой статьѣ Borel, «M. Pringsheim a fait aux idées de Paul du Bois-Reymond sur ce sujet, des objections que je n'ai pu arriver à comprendre».

[1]) *Acta Ac. Sc. Imp.* pro ann. 1778, p. I, §§ 23—30, pp. 113—118. Выводы Эйлера основаны на соображеніяхъ лишенныхъ точности и строгости. Строгое доказательство тѣхъ же результатовъ не представляетъ, впрочемъ, никакой трудности. Мы разсмотримъ для примѣра исчезающій интегралъ $\int_0^x t^{\beta}\left(l\frac{1}{t}\right)^m dt = \lambda$ и безконечно-малую $\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}\left(l\frac{1}{x}\right)^m = \mu$: представляя μ въ видѣ опредѣленнаго интеграла $\int_0^x \left(l\frac{1}{x}\right)^m t^{\beta} dt.$, мы

отъ убывающихъ положительныхъ чиселъ съ возрастающимъ (по абсолютной величинѣ) отрицательнымъ, или отъ убывающихъ положительныхъ къ возрастающимъ положительнымъ, или даже отъ вещественныхъ количествъ къ мнимымъ, что можно изобразить геометрически, разсматривая x, x^2 и $\sqrt{x}$ какъ ординаты точекъ кривыхъ соотвѣтствующія абсциссѣ x. Равнымъ образомъ, въ рядахъ встрѣчаются и безконечно-большіе члены; въ строкахъ &c. $-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{0}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ &c., &c. $+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{0}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+$ &c. и &c. $+\frac{1}{\sqrt{-3}}+\frac{1}{\sqrt{-2}}+\frac{1}{\sqrt{-1}}+\frac{1}{0}+\frac{1}{\sqrt{1}}+$

найдемъ, что $\frac{\mu-\lambda}{\mu}=(\beta+1)\int_0^x t^{\beta}\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^m-\left(l\frac{1}{t}\right)^m}{x^{\beta}\left(l\frac{1}{x}\right)^m}\frac{dt}{x}$; вводя новую перемѣнную $y=\frac{t}{x}$ и обозначая lx черезъ $-1:\varepsilon$ мы будемъ имѣть: $\frac{\mu-\lambda}{\mu}=(\beta+1)\int_0^1 y^{\beta}\left\{1-(1-\varepsilon l y)^m\right\}dy=(\beta+1)\int_0^1\varphi(y,\varepsilon),\ dy$; предѣлы функціи $\varphi(y,\varepsilon)$ при $y=0$ и $\varepsilon=0$ оба равны нулю. Разбивая интегралъ $\int_0^1\varphi(y,\varepsilon)\,dy$ на два слагаем.: $\int_0^{\alpha}\varphi(y,\varepsilon).\,dy+\int_{\alpha}^1\varphi(y,\varepsilon).\,dy$, мы можемъ всегда выбрать α, а затѣмъ ε, настолько малыми, чтобы каждое изъ слагаемыхъ было, по абс. вел. $<\frac{\delta}{2(\beta+1)}$, а слѣд. абс. велич. ихъ умнож. на $(\beta+1)$, или $\left|\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right|<\delta$, какъ бы мала ни была полож вел. δ; .... слѣд. $\lim\limits_{x=0}\frac{\mu-\lambda}{\mu}=0$, Q. E. D. О логариѳм. безк. ср. еще *L. Euleri*. Opuscula Analytica, t. II, Petr. 1785: De summa seriei ex numeris primis formatae $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}$ etc. § 1, pp. 240–241.—О сравн. логариѳм. и гармонич. безкон. см. *L. Euleri* de Summis ser. recipr. *Comm. Ac. Petr.* T. VII, ad annos 1734—35. Petr. 1740, § 6, p. 153, § 12 p. 157.

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, коихъ общіе члены суть соотвѣтственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, эти безкон.-большіе члены служатъ, какъ и безконечно-малые въ предъидущихъ рядахъ, для перехода отъ положительныхъ величинъ къ отрицательнымъ, отъ положительныхъ къ положительнымъ, или отдѣляютъ вещественные члены отъ мнимыхъ. «Наконецъ можетъ быть переходъ отъ вещественныхъ членовъ къ мнимымъ, коихъ предѣлъ не есть ни 0 ни ∞, напримѣръ, если общій членъ выражается формулой $1+\sqrt{x}$. Въ этихъ, однако, случаяхъ, когда, вслѣдствіе ирраціональности выраженія, каждый членъ имѣетъ двойное значеніе, въ предѣлѣ между вещественными и мнимыми членами эти два значенія всегда совпадаютъ въ одно. Но всякій разъ, когда члены, бывшіе прежде положительными, становятся отрицательными, переходъ происходитъ всегда черезъ предѣлъ, или безконечно-малый, или безконечно-большой. Все это обнаруживается яснѣе изъ закона непрерывности, который мы усматриваемъ въ кривыхъ линіяхъ» [1]).

Прохожденіе аналитической функціи черезъ безгранично-убывающія и возрастающія значенія всегда можетъ быть сдѣлано соотвѣтствующимъ *реально* непрерывному измѣненію независимой перемѣнной, и для сохраненія опредѣленнаго *взаимнаго* соотвѣтствія между всѣми значеніями независимой и зависимой перемѣнныхъ приходится допустить въ число значеній послѣдней и особыя *фиктивныя* безконечно-малыя и безконечно-большія

---

[1]) *Inst. calc. diff.* P. I. Cap. III, art. 98-101, pp. 71—73. Эйлеръ разсматриваетъ здѣсь безк. строки какъ ряды значеній функцій представляющихъ ихъ *общіе члены* безъ отношенія къ вопросу объ ихъ суммованіи; подробнѣе объ этомъ я буду говорить ниже. Соединяя члены ряда знаками сложенія и вычитанія, Эйлеръ употребляетъ обычное въ то время обозначеніе, хранящее слѣды историч. происхожд. рядовъ и указыв. кромѣ того на знаки членовъ, ихъ постоянство или перемѣну. Въ другихъ мѣстахъ Эйлеръ раздѣляетъ члены ряда запятыми; ср. II. сс. въ прим. 3) на стр. 278.

величины; онѣ являются звеньями въ цѣпи послѣдовательныхъ значеній перемѣнной величины, необходимыми для сохраненія непрерывности въ ея измѣненіи[1]). Эйлеръ примѣняетъ къ области аналитическихъ функцій Лейбницевъ законъ непрерывности и кладетъ такимъ образомъ этотъ законъ въ основаніе всего высшаго анализа; при этомъ ссылается онъ однако, на область геометрическаго значенія функцій какъ на такую, въ которой этотъ законъ усматривается всего яснѣе. Въ этомъ слѣдуетъ онъ Ньютону и повторяетъ его замѣчаніе о переходѣ отъ вещественныхъ значеній многозначной функціи къ мнимымъ значеніямъ черезъ совпадающія[2]).

Другой областью ученія о безконечныхъ рядахъ, въ которой примѣненіе закона непрерывности особенно интересно, является теорія ихъ суммованія. «Теорія суммованія безконечныхъ рядовъ», продолжаетъ Эйлеръ, «тоже даетъ намъ многое, чѣмъ мы можемъ здѣсь воспользоваться для уясненія ученія о безконечности, и вмѣстѣ съ тѣмъ уничтожить нѣкоторыя сомнѣнія, возникающія при разсмотрѣніи этой теоріи»[3]).

Сумма безконечнаго ряда, состоящаго изъ равныхъ членовъ $1+1+1+$&c., безъ всякаго сомнѣнія больше какого угодно числа и слѣдовательно безконечно велика, на что указываетъ и происхожденіе этого ряда отъ разложенія дроби $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, при $x=1$. Полагая, однако, въ той-же формулѣ $x=2$, 3, &c., мы получимъ равенства совершенно несовмѣстимыя съ принятыми воззрѣніями: сумма безконечнаго числа положительныхъ чиселъ оказывается отрицательной.

---

[1]) Ср. стр. 226 и соотв. прим.

[2]) Ср. прим. 2) на стр. 251. *Newton.* Arithm. Univ. Cant. 1707, pp. 238—240; мы вернемся впослѣдствіи къ вопросу, какъ о самомъ законѣ непрерывности, такъ и о роли его и соотв. геометр. предст. въ теоріи мним. велич. у геометровъ XVIII вѣка.

[3]) *Inst. calc. diff.* P. I. Cap. III, начало art. 102, p. 73.

Точно также, полагая въ равенствѣ $\sum_1^\infty nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $x = 2$, мы приходимъ къ парадоксальному выводу $1+4+12+12+32+80+\&c.=1$.

Причина полученныхъ парадоксовъ состоитъ, какъ указалъ на то уже Яковъ Бернулли[1]), въ томъ, что мы пренебрегаемъ остаточными членами разсматриваемыхъ рядовъ, которые при допущенныхъ нами значеніяхъ x дѣлаются безконечно-большими при безконечномъ продолженіи этихъ рядовъ, и самые ряды—расходящимися. Тоже можно сказать и о равенствѣ $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+$ &c., вторая часть котораго представляетъ расходящійся рядъ при $x=1, 2, 3$ &c.[2]).

«Эти соображенія», говоритъ Эйлеръ, «приводятъ къ заключенію, что подобнаго рода ряды называемые расходящимися, вовсе не имѣютъ суммъ; ибо дѣйствительное суммованіе членовъ не приближаетъ насъ ни къ какому предѣлу, который можно было бы считать суммой ряда продолженнаго до безконечности...., что, конечно, совершенно вѣрно. Между тѣмъ противъ этого мнѣнія съ полнымъ правомъ можно возразить, что упомянутыя суммы, хотя, повидимому, совершенно не согласуются съ истиною, однако никогда не вводятъ и въ заблужденіе; и даже скорѣе, допущеніе ихъ ведетъ ко многимъ прекраснымъ открытіямъ, которыхъ мы были бы лишены, еслибы вовсе отбросили эти суммованія.»[3]) Чтобы разрѣшить эти недоумѣнія, Эйлеръ останавливается на понятіи о суммѣ безконечнаго ряда и расширяетъ его такъ, чтобы придать опредѣленный ясный смыслъ полученнымъ парадоксальнымъ результатамъ и всѣмъ прочимъ равенствамъ подобнаго рода, относя-

---

[1]) Ср. стр. 241—242.

[2]) *Inst. calc. diff.* P. I, Cap. III, art. 102-108, pp. 73—77.

[3]) *Ibid.* art. 109, pp. 77—78.

щихся къ расходящимся рядамъ. «Если понимать слово *сумма* ряда, по обыкновенію, въ смыслѣ аггрегата всѣхъ его членовъ, дѣйствительно сложенныхъ вмѣстѣ, то нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что можно найти суммы только сходящихся безконечныхъ рядовъ, которые безгранично приближаютъ насъ къ извѣстной и опредѣленной величинѣ по мѣрѣ того, какъ мы дѣйствительно собираемъ вмѣстѣ все большее и большее число членовъ. Ряды же расходящіеся, вслѣдствіе ли того, что члены ихъ не убываютъ (все равно, сохраняются ли при этомъ одни и тѣже знаки, или чередуются знаки + и —), или по какой либо иной причинѣ, вовсе не имѣютъ суммъ, если только принимать это слово въ смыслѣ аггрегата всѣхъ членовъ». Но слову сумма можно придать и другое, отличное отъ общепринятаго, значеніе. «Мы будемъ говорить, что *сумма* всякаго безконечнаго ряда есть конечное выраженіе, отъ разложенія котораго произошелъ этотъ рядъ. Въ этомъ смыслѣ истинная сумма безконечнаго ряда $1+x+x^2+x^3+\&c.=\frac{1}{1-x}$, ... каково бы ни было число x. Такимъ образомъ, если рядъ сходящійся, это новое опредѣленіе слова сумма совпадаетъ съ обыкновеннымъ; а такъ какъ расходящіеся ряды не имѣютъ суммъ собственно такъ называемыхъ, то новое опредѣленіе и въ этомъ случаѣ не представитъ никакихъ, неудобствъ. Наконецъ, съ помощью этого опредѣленія мы сможемъ усмотрѣть пользу расходящихся рядовъ и защитить ихъ отъ всѣхъ несправедливыхъ приговоровъ»[1]). Мы скоро вернемся къ этимъ воззрѣніямъ Эйлера на безконечные ряды и постараемся разсмотрѣть, насколько оправдываются высказанныя имъ въ вышеприведенныхъ словахъ ожиданія.

---

[1]) *Inst. c. diff.* art. 110–111, pp.78—79. Ср. стр. 220 и прим. 2) тамъ же. Эйлеръ изложилъ свою теорію суммованія рядовъ еще въ мемуарѣ «De Seriebus divergentibus», представленномъ Петерб. Ак. Наукъ одновременно съ выходомъ въ свѣтъ «Основ. дифф. исч.» См. *Novi Commentarii Ac.*

Дифференціальное исчисленіе по мысли Эйлера, какъ и по мысли Лейбница[1]**, есть ничто иное какъ частный случай общаго исчисленія разностей, сообразно съ чѣмъ формулы его** должны быть выведены изъ общаго выраженія, къ которому, согласно Эйлеру, можетъ быть приведена разность всякой функціи отъ x—: $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c$, гдѣ $\omega = \Delta x$[2]. При безконечной малости ω, отбросивъ безконечно-малыя высшихъ порядковъ, мы получаемъ $\Delta y = P\omega$, или въ обозначеніяхъ Лейбница: $dy = P.dx$,—основную формулу всего дифференціальнаго исчисленія. «Если приращеніе ω», говоритъ далѣе Эйлеръ, «сдѣлается чрезвычайно малымъ (vehementer parvum), такъ что въ выраженіи $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ члены $Q\omega^2 \& R\omega^3$, и тѣмъ болѣе всѣ остальные станутъ столь малыми, что могутъ быть пренебрежены въ сравненіи съ первымъ $P\omega$ въ вычисленіи, при которомъ не соблюдается совершенная точность; тогда, зная дифференціалъ Pdx можно воспользоваться имъ для приближеннаго вычисленія разности: $P\omega$; что дѣлаетъ дифференціальное исчисленіе весьмо плодотворнымъ въ приложеніи къ рѣшенію практическихъ вопросовъ»[3]. Эйлеръ полагаетъ, такимъ образомъ, въ основаніе дифференціальнаго исчисленія,

---

Sc. Imp. Petr. T. V ad. Ann. 1751 et 1755, Petr 1760, pp. 205 sqq. Эйлеръ высказывалъ тѣже идеи еще раньше въ письмахъ къ *Ник. Бернулли* (плем. Я. и И.) и Гольдбаху: см. *Corresp. math. & ph.* t. II. Н. Б. къ Эйлеру Bas. 6 Apr. 1743, pp. 701--702, Basil 29 Nov. 1743, pp. 708 – 710. *Ibid.* t. I. Эйлеръ къ Гольдб. Berl. 7 Aug. 1845, pp. 323—324: «...so habe ich diese neue Definition von der Summen einer jeglichen seriei gegeben: Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae ex cujus evolutione illa series oritur». Ср. *Reiff* Gesch., d. un. R. pp. 121--124.

[1]) Ср. стр. 178—180 и соотв. прим. и прим. 3) къ стр. 221.

[2]) *Inst. Calc. diff.* P. I. c. IV, art. 112, p. 80: «In capite primo vidimus, si quantitas variabilis x accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusvis functionis ipsuis x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3$ &c. sive haec expressio sit finita sive in infinitum excurrat». Ср. Cap. I, art. 20, 22, pp. 18, 20. Это заключеніе есть только обобщеніе результатовъ, полученныхъ въ рядѣ частныхъ случаевъ; оно есть, слѣдовательно, у Эйлера, какъ и у другихъ современныхъ ему математиковъ, лишь своего рода постулатъ.

[3]) *Instit. Cal. diff.* P. I, Cap. IV, art 113, 121—123, pp. 80—81, 84—86.

какъ мы уже имѣли случай это замѣтить, тѣ же, въ сущности, принципы, которые послужили впослѣдствіи Арбогасту и Лагранжу для обоснованія теоріи аналитическихъ функцій[1]).

Исчисленіе дифференціаловъ высшихъ порядковъ тоже легко поставить въ связь съ теоріей конечныхъ разностей, разсматривая эти дифференціалы какъ безконечно-малыя разности данной функціи, различныхъ порядковъ. Принимая для выраженія разности втораго порядка формулу $P\omega^2+Q\omega^3+R\omega^4+\&c.$, мы найдемъ, что $ddy=Pdx^2$ и т. д.[2]). «Въ первой главѣ», говоритъ затѣмъ Эйлеръ, «мы уже замѣтили[3]), что нельзя опредѣлить вторыя и слѣдующія разности, не принимая какого нибудь извѣстнаго, впрочемъ произвольнаго закона смѣны послѣдовательныхъ значеній самого x; всего проще предположить, что эти значенія составляютъ ариѳметическую прогрессію», что соотвѣтствуетъ тому предположенію, что всѣ высшіе дифференціалы x равны 0. «Высшіе дифференціалы зависятъ, такимъ образомъ отъ произвольнаго закона управляющаго дифференціалами перемѣннаго x; откуда возникаетъ огромная разница въ способахъ нахожденія дифференціаловъ перваго и слѣдующихъ порядковъ»[4]). Выбирая простѣйшій законъ смѣны послѣдовательныхъ значеній x,—въ ариѳметической прогрессіи[5]), мы находимъ простѣйшую зависимость между дифференціалами различныхъ порядковъ, выражаемую двойнымъ рядомъ формулъ: $dp=qdx$, $dq=rdx$, $dr=sdx$, $ds=t.dx$, $\&c.$;

---

[1]) Ср. стр. 321, и прим. 1), также стр. 326, 336.

[2]) *Inst. Calc. diff.* P. I, art. 124, 125, pp 86—87, cp. *ibid.* art. 22, p. 20. Cp. *Weissenborn.* Die principien d. höh. An. § 12, pp. 153—155: Euler's Begründung der Differenzialrechnung.

[3]) *Inst. Calc. diff.* P. I, art. 9, p. 7.

[4]) *Ibid.* art. 128, pp. 87—88.

[5]) Въ art. 9, p. 7 приводятся соображенія, заставляющія предпочесть ариѳм. прогрессію: она позволяетъ пройти черезъ всѣ возможн. веществ. значенія перемѣнной x. «.... contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negativos nullus aditus patuisset».

$dy = p.dx$, $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$, $d^4y = sdx^4$, $d^5y = tdx^5$, *&c.*,[1]), которыя даютъ намъ возможность легко установить Лейбницевъ *трансцендентный законъ однородности*[2]).

Зная алгориѳмъ дифференціальнаго исчисленія установленный въ томъ предположеніи, что dx величина постоянная, мы можемъ распространить затѣмъ правила кратнаго дифференцированія и на тотъ случай, когда выбирается другой законъ для смѣны послѣдовательныхъ значеній перемѣнной x; стоитъ только воспользоваться тѣмъ замѣчаніемъ, что основная формула дифференціальнаго исчисленія $dy = pdx$ независитъ отъ этого выбора и предположить x функціей новаго перемѣннаго съ постояннымъ дифференціал. Такимъ образомъ возникаетъ задача *о дальнѣйшемъ дифференцированіи дифференціальныхъ формулъ*, или объ измѣненіи независимой перемѣнной въ дифференціальныхъ выраженіяхъ[3]).

Когда разности перемѣнной дѣлаются безконечно-малыми, конечныя суммы этихъ разностей превращаются въ интегралы — функціи, дифференціалы коихъ даны[4]). Ихъ можно тоже помѣстить въ скалу величинъ различныхъ порядковъ: пользуясь тѣмъ замѣчаніемъ, что величина интеграла независитъ отъ закона смѣны послѣдовательныхъ значеній перемѣнной, по которой производится интеграція, можно легко вывести, что по-

---

[1]) *Inst. Calc. Diff.* P. I, art. 129 - 133, pp. 88 - 90.

[2]) *Ibid.* art. 134—137, pp. 90—92. Ср. стр. 180, прим. 2).

[3]) Рѣшенію этой задачи посвящена гл. VIII 1-й части *Осн. Дифф. Исч.*, art. 242—280, pp. 166—196: De formularum differentialium ulteriori differentiatione. На значеніе измѣненія перем. незав. въ дифф. уравненіяхъ указывалъ еще Лейбницъ; ср. ст. 187, прим. 1). Нѣкот. дальн. элемент. замѣчанія наход. у *Agnesi*. Instit. anal. t. II art. 29, pp. 466—470. Какъ пользовались этимъ аналит. пріемомъ старые аналисты до Эйлера въ теоріи дифф. уравненій см. въ Traité d. calc. intégr. pour servir de suite à l'Anal. d. Inf. P. de M. le Marquis de L'Hôpital p. M *De Bougainville*. Paris 1756, II Part. Sect. II. pp. 151 suiv.

[4]) *Inst. Calc. diff.* P. I, art. 140, 141, pp. 93—94, ср. *ibid.* Cap. I, art. 25—26, pp. 22—23.

рядокъ интеграла на единицу меньше, чѣмъ порядокъ подъинтегральнаго дифференціала.

Такъ: $\int d^n u = du^{n-1} \int \frac{d^n u}{du^n} . du$; $\int u$, гдѣ u конечная величина, функція отъ x, есть тоже, что $\frac{1}{dx} \int u dx$ = безконечно-большой величинѣ; $\int \frac{u}{d^n v} = (dv)^{-n-1} \int (u : \frac{d^n v}{dv^n}) \, dv$ и т. д.[1])

Анализъ безконечно-малыхъ распадается на двѣ части, занимающіяся, соотвѣтственно, нахожденіемъ дифференціаловъ различныхъ функцій и интеграловъ данныхъ дифференціальныхъ выраженій. Большое количество различныхъ спеціальныхъ пріемовъ интегрированія и приложеній ихъ къ рѣшенію различнаго рода задачъ саставляетъ выдѣлить эту часть высшаго анализа въ особое самостоятельное ученіе—интегральное исчисленіе[2]) Эйлеръ послѣдовалъ въ этомъ примѣру своего учителя Ивана Бернулли[3]), и утвердилъ, такимъ образомъ, классическое раздѣленіе анализа безконечно-малыхъ на его двѣ главныя вѣтви Но Эйлеру принадлежитъ еще и другая, болѣе важная заслуга въ методикѣ высшаго анализа. Онъ включилъ въ изложеніе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій Бернулліево «показательное исчисленіе»[4]) и распространилъ

---

[1]) *Inst. c. diff.*, art. 142—143, pp 94—95.

[2]) *Ibid.* art. 148, pp. 96—97. «Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in solvendis varii generis problematibus, deteguntur, ut ob haec nova inventa, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte describi atque explicari possit». Эйлеръ считаетъ однако нужнымъ въ самомъ началѣ дифф. исчисленія сопоставить его съ интегральнымъ и ввести простѣйшія понятія и обозначенія этого послѣдняго, которыми онъ впослѣдствіи и пользуется.

[3]) Ср. стр. 193.

[4]) Ср. прим. 2) на стр. 185; «Celeb. Ioh. Bernoulli», говоритъ Эйлеръ, «cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyseos infinitorum aeternas debemus gratias». *L. Hospital* въ An. d. inf. p. не даетъ вовсе мѣста показ. исчисл. *Varignon* въ своихъ Edaircissemens излагаетъ его въ особомъ приложеніи; ср. прим. 4) на стр. 268. Показ. исч. въ Instit. *Agnesi*,

алгорнемъ высшихъ исчисленій на нихъ же впервые введенныя въ анализъ тригонометрическія функціи. «Utrumque calculum», говоритъ онъ, «ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam transcendentes accomodare constitui»[1]).

Главы V—VIII первой части «Основаній дифференціальн. исчисленія» посвящены его теоріи; послѣдняя, IX глава— трактуетъ о дифференціальныхъ уравненіяхъ[2]). Вторая часть открывается приложеніями разностнаго и дифференціальнаго исчисленій къ теоріи рядовъ, и лишь въ IX главѣ Эйлеръ переходитъ къ другимъ приложеніямъ дифференціальнаго исчисленія, основаннымъ отчасти на установленной имъ въ предъидущемъ изложеніи теоремѣ Тейлора[3]),—къ рѣшенію уравне-

---

изложено въ IV главѣ III книги посвящ. интегр.функцій, t. II, pp. 818—844. Bougainville излагаетъ во введеніи во своей «трактатъ объ инт. исчисл.» показательное исчисленіе, аналитическую тригонометрію и теорію мнимыхъ величинъ; T. 1. Paris 1754, Introduction, pp. 1--62. Насколько «показат. исчисленіе» было мало извѣстно и несчиталось необходимой частью дифф. исчисленія въ 1-й половинѣ прошлаго столѣтія, можно судить по письмамъ Дан. Бернулли и Гольдбаха: Берн. къ Гольдб. Petr. d. 18 Martii 1728 Petr. d. 19 Apr. 1728, Г. къ Б. Moscuae d. 10 Maii 1728.*Corr.m.& ph.* t. II, pp. 255, 257—258, 259 (по поводу д. ур. Риккати).

[1]) *Inst. cal. diff.* P. I, art. 149, p. 97. Эйлеръ заканчиваетъ гл. IV (art. 151, p. 98) обѣщаніемъ дать во второй части своего трактата изложеніе геометрич. приложеній дифф. исчисл. Обѣщанія этого, однако, онъ исполнить не успѣлъ и изложеніе геом прилож. осталось не только не напечатаннымъ, но, повидимому, и неоконченнымъ. Въ числѣ изданныхъ Фуссомъ посмертныхъ сочиненій Эйлера мы находимъ только четыре первыя главы и начало пятой главы этой дополнительной части «Осн. дифф. исч.», содержащія приложенія къ геометр. лишь дифф. 1-го пор. См. *L. Euleri* Opera postuma math. et phys. anno 1844 detecta ed. *P. H. Fuss* et *Nicolaus Fuss.* Petr. 1862, XVIII, Institutionum Calc. diff. Sectio III, pp. 342—402.

[2]) Cap. V. De differentiatione functionum algebr. unicam var. involv., art, 152—177, pp. 99—121; Cap. VI. De diff. functionum transc., art. 178—207, pp. 122—144; Cap. VII, De diff. funct. duas pluresve var. involv., art. 208-241, pp. 145—165. Cap. VIII, De formularum diff. ulteriori diff., art. 242—281, pp, 166—196; Cap. IX, De Aequationibus differentialibus, art. 281—327, pp. 197—224.

[3]) См. *Inst. Calc. diff.* P.II, Cap.III, art. 44—69, pp. 267—287, De inventione differentiarum finitarum; art. 45—48. pp. 267—270 содержатъ вы-

ній[1]), разысканію «maxima» и «minima»[2]), истинныхъ значеній неопредѣленныхъ выраженій[3]), разложенію раціональныхъ функцій на частныя дроби[4]). Двѣ главы, XVI,—De differentiatione functionum inexplicabilium, и XVII,—De interpolatione serierum»,—посвящены упомянутому уже вопросу объ *обращеніи числовыхъ функцій въ аналитическія*[5]). Мы остановимся потомъ подробно на работахъ, какъ самого Эйлера, такъ и его современниковъ, по теоріи рядовъ, теперь же сдѣлаемъ нѣсколько краткихъ замѣчаній объ изложенной имъ въ «Основаніяхъ» теоріи дифференціальнаго исчисленія и его простѣйшихъ приложеній[6]), Наши замѣчанія будутъ трояваго рода, а именно объ общихъ методахъ, о частныхъ методахъ доказательствъ и о нѣкоторыхъ содержащихся въ приложеніяхъ диф-

---

водъ этой теоремы (безъ остат. члена), сходный съ выводомъ самого Тейлора; прочіе art. этой главы содержатъ приложенія ея къ теоріи конечн. разн.—Въ главѣ IV, De conversione.functionum in series, art- 70—102, pp. 288—320 теорема Тейлора прилагается къ разложенію функцій въ б. ряды.

1) Cap. IX, art. 227—249, pp. 434—458. De usu calculi differentialis in aequationibus resolvendis: разложеніе въ рядъ корня f уравненія $y=o$, гдѣ $y=Fx$, по формулѣ: $f=x-\frac{ydx}{dy}+\frac{y^2ddx}{2dy^2}-\frac{y^3d^3x}{6\,dy^3}+\frac{y^4d^4x}{24dy^4}-$ &c. art. 245—249, pp. 454—458 —замѣчанія о случ. кратн. корн. Cap. XII, art. 294—312, pp. 522—547, De usu differentialium in investigandis radic. real. aequationum,—о числѣ вещ. корней уравн.—теорема Ролля и ея прилож. —Cap. XII, art. 313—336, pp. 548—565, De criteriis radicum imaginariarum.

2) Cap. X, art, 250—272, pp. 459—492, De Maximis et Minimis Cap. XI, art. 273- 293, pp. 493—522, De Maximis et Minimis functionum multiformium pluresque variab. complect.

3) Cap. XV, art. 355—366, pp. 586—610, De valoribus functionum, qui certis casibus videntur indeterminati.

4) Cap. XVIII, art. 403—422, pp. 668—700, De usu calculi differentialis in resolutione fractionum. Ср стр. 281, прим. 3) и стр. 334—335.

5) *Inst. Calc. diff.* P. II, Cap. XVI, art. 367—388, pp. 611—640, Cap. XVII, art. 389—402, pp. 641—667, ср. стр. 370 прим. 2)

6) Краткій обзоръ всего содержанія *Inst. calc. diff.* читатель можетъ найти въ только что законченномъ третьемъ томѣ Vorles. üb. Gesch. d. Math. *Морица Кантора*: 113. Kapitel.—Euler's Differentialrechnung. Vorl. Bd.III (Schluss Band) Lpzg. 1898, pp. 724—748.

ференціальнаго исчисленія понятіяхъ и методахъ, относящихся къ вопросамъ теоріи функцій.

Прежде всего заслуживаетъ вниманія общее правило дифференцированія сложныхъ функцій данное Эйлеромъ въ ст. 170 I-й части (гл. V)[1]), которое затѣмъ, въ ст. 215, онъ разсматриваетъ какъ частные случай правила дифференцированія функцій со многими перемѣнными[2]). При этомъ вводитъ онъ понятіе о частномъ дифференцированіи и, по поводу вопроса объ интегрируемости дифференціальныхъ выраженій вида $Pdx+Qdy+\ldots$, развиваетъ алгориомъ частныхъ производныхъ[3]). Нѣкоторый интересъ представляетъ еще глава IX—о дифференціальныхъ уравненіяхъ[4]); здѣсь дифференціальныя уравненія являются не только результатомъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ, но дифференцированіе разсматривается еще какъ средство исключать изъ данныхъ соотношеній ирраціональныя и трансцендентныя количества[5]). Эта послѣдняя точка зрѣнія на дифференціальныя уравненія отвѣчаетъ Лейбницевой идеѣ о дифференціальномъ исчисленіи, какъ общемъ трансцендентномъ анализѣ, какъ средствѣ изслѣдовать трансцендентныя соотно-

---

1) *Inst. calc. diff.* P. I. art. 170, pp. 115—116; доказательства этого правила Эйлеръ тутъ не даетъ, предполагая представить его ниже въ art. 215. Эйлеръ первый оцѣнилъ значеніе этого правила въ методикѣ дифф. исчисленія.

2) Ср. *Inst. c. d.* P. I., Cap. VII, art. 212—215, pp. 146—148.

3) *Ibid.* art. 231—241, pp. 153—165; Эйлеръ обознач. частн. произв. функцій двухъ перем. формулами $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, ... Ср. предъидущ. art. той же главы. NB, art. 220—225, pp. 151—155 — выводъ извѣстнаго Эйлерова предложенія объ однородныхъ функціяхъ, открытаго имъ, для случая двухъ перемѣнныхъ, еще въ 1736 году, (см. *L. Euleri* Mechanica sive Motus Scientia analytice exposita. Petr. 1736, t. II, Prop. 14, § 106; ср. *M. Cantor.* Vorl. üb. Gesch. d. Math. Bd. III, pp. 733—734). Объ исторіи исчисл. частн. произв. мы будемъ говорить ниже.

4) *Inst. calc. diff.* P. I, Cap. IX, art 281—327, pp. 197 — 224, De aequationibus differentialibus—дифференцированіе неявныхъ функцій, образованіе и преобразов. дифф. уравненій.

5) *Ibid.* art. 292—295, pp. 203—207.

шенія помощью алгебрическихъ формулъ[1]). Лейбницу, однако, не было еще извѣстно, что существуютъ функціи не могущія быть разсматриваемы какъ интегралы алгебрически-дифференціальныхъ уравненій, и что, поэтому, его идея не можетъ обнимать собою непосредственно всѣ возможные классы трансцендентныхъ функцій. Эйлеръ первый открылъ и изслѣдовалъ такого рода, такъ сказать, *ультратрансцендентныя функціи*; но и онъ еще не могъ разсматривать ихъ какъ таковыя, и только въ новѣйшее время предприняты работы, должное направленіе которыхъ приведетъ къ построенію полной классификаціи всѣхъ трансцендентныхъ функцій, къ выполненію великой идеи Лейбница[2]). Впрочемъ Эйлеръ, по самому свойству своего генія. всегда направлявшаго свои усилія на рѣшеніе по преимуществу конкретныхъ, близко стоящихъ вопросовъ, не былъ способенъ усвоить и развить высоко парящія, абстрактныя идеи Лейбница[3]).

Изъ числа спеціальныхъ методовъ мы обратимъ вниманіе

---

[1]) См. стр. 181, 182, 185—184; ср. *Inst. c. d.* P. I, art. 296—298, pp. 207—208.

[2]) Въ 1886 году *O. Hölder*, въ Гёттингенѣ, доказалъ впервые ультратрансцендентность Эйлеровой функціи Γx; см. Mathem. Annalen. Bd. XXVIII, 1887, pp. 1—13: Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. Въ 1889 году *A. Hurwitz* въ статьѣ «Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équat. diff. algébrique» (Annales scient. de l'Éc. Norm. Sup. 3-e série, t. 6, pp. 327—332), доказалъ теорему служащую какъ бы обобщеніемъ извѣстнаго предлож. *Эйзенштейна* о рядахъ предст. функціи удовл. алг. ур. и обнаружилъ такимъ образомъ ультратрансцендентность ряда $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n^n)!}$. Съ своей стороны, *Eliakim Hastings Moore* изъ Чикаго дополнилъ изслѣдованія, Гёльдера и нашелъ двѣ новыхъ ультратр. функціи; см. *Mathem. Annal*, Bd. 48 Lpzg. 1896, pp 49—74: Concerning Transcendentally Transcendental Functions; статья эта содержитъ также интересныя общія положенія.—Въ подобномъ же порядкѣ идей сдѣланы нѣкоторыя замѣчанія уже Эйлеромъ въ статьѣ упом. въ прим. 2 на стр. 268.

[3]) Ср. *H. Hankel*. Die Entw. d. Mathem in d. letzten Jahrhunderten, pp. 16—17.

лишь на одинъ, а именно на выводъ дифференціала отъ $Asinx$, основанный на томъ замѣчаніи, что эта функція выражается также формулой $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\cdot(\sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1})$. «Quamvis,.... logarithmus propositus imaginaria involvat», замѣчаетъ еще при этомъ Эйлеръ, «tamen eius differentiale fit reale». Онъ прибавляетъ и другой выводъ тогоже дифференціала основанный на формулѣ $Sin\,(y+dy) = Siny.Cos\,dy + Sin\,dy\;Cos\,y = Sin\,y + dy\,Cos\,y$ [1]).

Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ анализу содержатъ въ себѣ не безинтересныя замѣчанія о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ многозначныхъ функцій, значеній отличныхъ отъ обыкновенныхъ, «generis diversi», которыя суть таковыя не «ratione valorum antecedentium & consequentium in serie cohaerentium; sed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum» [2]). Такого рода критическія значенія соотвѣтствуютъ точкамъ вотврата изображеній даннымъ уравненіемъ ($y=fx$) кривой [3]). Эйлеръ разбираетъ, какъ примѣръ, функцію $y=p\pm(f-x)^{\frac{2n+1}{2m}}q$, гдѣ p и q функціи отъ x недѣлящіяся на $f-x$, и $2n+1>2m$. Изслѣдованіе этой функціи, получающей особаго рода наибольшія и

---

[1]) *Inst. calc. diff.* P. I, art. 195, 195, pp. 133–135; ср. art. 182, VII, p. 125, гдѣ Эйлеръ, найдя дифференціалъ $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})$, посредств. замѣны $x\sqrt{-1}=s$, и замѣчаетъ: «Quamvis ergo logarithmus propositus imaginaria involvat, tamen eius differentiale fit reale». О значеніи этихъ формулъ въ теоріи мнимыхъ логарифмовъ мы будемъ говорить впослѣдствіи.

[2]) «Datur vero insuper in functionibus alia species maximorum ac minimorum; quae methodo hactenus tradita non invenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari potest. *Inst. calc. diff.* P. II, art. 278, p. 500.

[3]) Ср. *ibid.* art. 282, p. 504 и ll. c. въ прим. 3) къ стр. 294.

наименьшія значенія при $x = f$, помощью Тейлорова разложенія, не представляетъ никакихъ трудностей[1]).

Въ своемъ изложеніи дифференціальнаго исчисленія Эйлеръ почти никогда не пользуется геометрическими образами[2]) и не употребляетъ выраженій заимствованныхъ изъ геометріи. Приведенныя нами только что слова Эйлера могутъ служить образцомъ того, какъ выражаетъ онъ геометрическія понятія, связанныя съ представленіемъ о непрерывности, избѣгая въ тоже время употребленія геометрическихъ выраженій. Это однако, не мѣшаетъ ему прибѣгать, хотя и очень рѣдко, къ разсужденіямъ, основаннымъ на законѣ непрерывности[3]). Въ числѣ такихъ разсужденій слѣдуетъ отмѣтить выводъ связи существующей между числомъ дѣйствительныхъ корней цѣлой алгебрической функціи и корней ея производной — группы предложеній, извѣстныхъ подъ именемъ предложеній Ролля[4]).

---

[1]) *Inst. calc. diff.* P. II, art. 279—282, pp. 500—505;—о функціяхъ многозначныхъ Эйлеръ говоритъ въ art. 283, p. 505: «Inventionem vero maximorum ac minimorum secundae speciei sequenti sectioni reservamus(т.е 3-ьей части «Основ. д. и.» посвящ. геом. прилож. [ср. прим. 1-е на стр. 387].

[2]) Такіе образы Эйлеръ сохранялъ, повидимому, для третьей части своего сочиненія; ср. пред. прим. и art. 286, P. II *Inst. c. d.*, p. 510: «Quae praeterea supersunt de natura maximorum ac minimorum exponenda; ea in sequentem sectionem reservamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraesentari atque explicari possunt». Считая методъ геометрическихъ образовъ полезнымъ для раскрытія новыхъ свойствъ функцій, Эйлеръ задался, однако, цѣлью изложить въ двухъ первыхъ отдѣлахъ своего трактата лишь то, что могло быть представлено легко и удобно безъ посредства этого метода.

[3]) «Wir sehen aus dem Vorigen, dass Euler ebenso wie es Taylor vor ihm gethan hatte, rein arithmetische Principien zu Grunde legt, während fast alle Uebrigen dieselben an geometrischen Gebilden etwickelt hatten». *Weissenborn.* Die Princip. d. h. An. p. 155. Ср. предъид. прим. к стр. 380.

[4]) См. *Inst. Calc. diff.* P. II, cap. XII (ср. прим. 3 къ стр. 387) art. 294 sqq., pp. 523 sqq. — О *Роллѣ* (Michel Rolle, 1652—1719; Traité d'Algèbre. Paris. 1690) и его Méthode des Cascades см. *Cantor*. Vorl. üb. G. d. M. Bd. III, pp. 98, 115—119, Traité d'Algébre, pp. 125 suiv.

Намъ остается еще упомянуть о содержаніи XIV главы второй части «Основаній». Мы уже не разъ замѣчали, что несмотря на разницу въ воззрѣніяхъ на природу дифференцінаго исчисленія у Лагранжа и Эйлера, оба они пользуются, въ сущности, одними и тѣми же основными аналитическими положеніями[1]). Это можно замѣтить и въ упомянутой нами главѣ Эйлеровыхъ «Основаній», носящей заглавіе «De differentialibis functionum in certis tantum casibus» и соотвѣтствующей VIII уроку о функціяхъ Лагранжа, посвященному разложенію функцій въ ряды въ тѣхъ случаяхъ, когда формула Тейлора неприменима (est en défaut)[2]). Эйлеръ, впрочемъ, разсматриваетъ этотъ вопросъ въ другомъ порядкѣ идей, довольно своеобразно и его разсужденія по общности и ясности остаются далеко позади Лангранжевыхъ.

Дифференціалъ функціи, какъ мы уже видѣли[3]), есть для Эйлера ничто иное, какъ ея безконечно-малое приращеніе, соотвѣтствующее таковому же приращенію перемѣнной, причемъ, въ силу общаго основного правила теоріи безконечно-малыхъ, въ выраженіи этого дифференціала можетъ быть оставленъ лишь тотъ членъ, въ сравненіи съ которымъ безконечно-мала совокупность всѣхъ прочихъ, которые поэтому и отбрасываются. Въ общемъ случаѣ, когда этотъ дифференціалъ можетъ быть разложенъ въ рядъ Тейлора, расположенный по восходящимъ цѣлымъ степенямъ дифференціала перемѣнной, онъ является, въ силу упомянутаго правила, пропорціональнымъ этому послѣднему дифференціалу, и коеффиціентъ перваго члена разложенія есть

---

[1]) Ср. стр. 321 и 384.

[2]) Ср. стр. 330—333.—*Inst. calc. diff.* P. II, Cap. XIV, art. 337—354, pp. 566—585.

[3]) Ср. стр. 383. «Erit ergo Analysis infinitorum,.... nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum...., qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumtae, statuantur infinite parvae». *Inst. calc. diff.*, P. I, Cap. IV, art. 114, p 81.

конечная величина—новая функція перемѣнной, производная первоначальной[1]). Въ особенныхъ случаяхъ разложеніе Тейлора ставится призрачнымъ, вслѣдствіе того, что коефиціенты его, начиная съ извѣстнаго члена дѣлаются безконечно-большими; тогда, хотя бы коефиціентъ перваго члена и оставался конечнымъ, нельзя, безъ дальнѣйшихъ разсужденій, считать совокупность прочихъ членовъ безконечно-малою относительно перваго, и истинное значеніе дифференціала, въ смыслѣ Эйлерова опредѣленія, остается неизвѣстнымъ[2]). Приращеніе разсматриваемой функціи можетъ быть тогда разложено по другому закону, напримѣръ, по восходящимъ цѣлымъ степенямъ корня какой нибудь степени изъ приращенія перемѣнной[3]) и, согласно Эйлеру, дифференціаломъ функціи въ этомъ особомъ случаѣ, или для разсматриваемаго особеннаго значенія перемѣнной, будетъ, опять таки, первый членъ разложенія, въ сравненіи къ которымъ совокупность всѣхъ прочихъ безконечно-мала[4]). Такъ,

---

[1]) *Inst. c. d.* P. II, art. 337—340, pp. 566—569 (ср. стр. 383 и прим. 2). По исчезновеніи, при $x = a$, $n - 1$ послѣд. произв., диффер. функціи дѣлается пропорц. n-ой степени dx: ср. art. 341—344, pp. 569—571.

[2]) Ср. *Ibid.* art. 350, 348, 345, pp. 574, 572—573, 571.

[3]) Эйлеръ разсматриваетъ лишь простѣйшіе примѣры явныхъ иррац. функцій уже располож. по дробн. степ. приращенія.

[4]) «Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis», говоритъ Эйлеръ въ art. 348 «quorum singuli sint divisibiles per $x - a$, constet, ita ut sit $y = (x-a)^m P + (x-a)^n Q + C$, tum eius differentiale casu $x = a$ erit $dy = P\,dx^m + Q\,dx^n$; in qua expressione, si fuerit $n > m$, terminus secundus prae primo evanescit,ita ut tantum prodeat $dy = P\,dx^m$. Sin autem n sit fractio denominatorem habens parem, tum etiamsi $Q\,dx^n$ prae $P\,dx^m$ evanescat, tamen omnino negligi non potest. Ex eo enim appret, si capiatur dx negative, valorem ipsius dy fieri imaginarium, quod ex solo termino primo $P\,dx^m$ non patet,......, erit functio y casu $x = a$ vel minimum vel maximum secundae speciei. *Inst. c. d.* P. II, art. 348, pp. 572—573. «Interim casus ante (348) memoratus non est negligendus,........, quoniam $Q\,dx^n$ si sit dx

дифференціалъ отъ $y=(x-a)^{3/2}+a\sqrt{a}$, при $x=a$ есть $dx\sqrt{dx}$[1]) Эйлеръ, однако, сравниваетъ всѣ получаемыя безконечно-малыя величины съ одной основной dx — приращеніемъ перемѣнной, и, въ силу этого, онъ говоритъ, что $dy=o$, какъ безконечно-малая высшаго порядка въ сравненіи съ dx[2]). Такимъ образомъ, вопросъ, поставленный Эйлеромъ, на языкѣ современнаго анализа можетъ быть выраженъ такъ: найти $\lim\limits_{dx=o}\ \lim\limits_{x=a} \frac{f(x+dx)-fx}{dx}$, въ тѣхъ случаяхъ, когда a соотвѣтствуетъ особенной точкѣ разсматриваемой функціи fx. Этотъ предѣлъ совпадаетъ съ $\lim\limits_{x=a} f'x$, или $f'a$, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда fx и $f'x$ функціи непрерывныя вблизи точки a.

Въ связи съ этими разсужденіями Эйлеръ въ ст. 351 и 352 второй части «Основаній», показываетъ, что, «existente ω quantitate infinite parva,.. . si exponens n sit infinite parvus....$-\frac{1}{l\omega}$ homogeneum erit cum ω^n ... Ita, si fuerit $y=-\frac{1}{lx}$, differentiale ipsius y casu $x=o$ erit$=\frac{1}{ldx}=dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcumque ipsius dx potesta-

---

negativum, fit imaginarium, hoc membrum Qdx^n reliqua omnia, prae quibus evanescit, quoque transmutat in imaginaria; cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda». Art. 350, p. 574.

[1]) *Inst. c. diff.* P. II, art. 345, p. 571.

[2]) *Ibid.* sub. fin.; ср. стр. 371; ср. также art. 338—339, P. II, pp. 367—368. Въ art. 340, p. 568 Эйлеръ, однако, замѣчаетъ: «Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saerenumero eius veram expressionen nosse iuvat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat max mum vel minimum». Ср. прим. 4) на стр. 394 (предъид.) и стр. 391—392.

tem tenebit rationem infinitam:....»[1]). Равнымъ образомъ, при $a > 1$ « ...differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ casu $x = 0$ ....$dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$, adeoque infinities minus est quam potestas quantumvis alta ipsius dx»[2]). Прилагая эти послѣднія замѣчанія къ отысканію дифференціала функціи $y = xx - \frac{1}{lx}$ при $x = 0$, Эйлеръ замѣчаетъ, что «erit.... casu $x = o$ functio y minimum, sed neque ad primam, neque ad secundam speciem pertinens.... sic itaque prodit tertia species maximorum minimorumve, quae in functionibus logarithmicis & transcendentibus tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam occurit; de qua in sequente parte de lineis curvis fusiusa getur»[3]). Для кривой, уравненіе коей есть $y = x^2 - \frac{1}{lx}$, начало координатъ есть, въ самомъ дѣлѣ, точка остановки (point d'arrêt).

Мы перейдемъ теперь къ исторіи того замѣчательнаго отдѣла анализа, который, какъ по обширности, такъ и по важности, занимаетъ одно изъ первыхъ мѣстъ въ ряду многочисленныхъ отраслей математической науки, завоеванныхъ могучимъ геніемъ Эйлера. Послѣ теоріи чиселъ и интегральнаго исчисленія первое мѣсто въ работахъ Эйлера принадлежитъ

---

[1]) *Inst. calc. diff.* P. II, Cap. XIV, art. 351, pp. 578—579; ср. стр. 373.

[2]) *Inst. calc. diff.* P. II, art. 352, p. 579, art. 353, p. 580; ср. стр. 374.

[3]) *Inst. calc. diff.* Cap. XIV art. 353, Exemplum I, p. 580; ср. *L. Euleri* Opuscula Analytica t. II, Petropoli 1785, p. 79, § 5, о чемъ мы еще будемъ говорить ниже.—См., далѣе, въ *Inst. c. d.* P. II, Cap. XIV, art. 353 Exempla II—IV, pp. 581—583, другіе примѣры трансц. функцій, art. 354, pp. 583—585—диффер. высшихъ порядковъ certis t. casibus.

безконечнымъ рядамъ[1]). Мало того, среди всѣхъ многочисленныхъ изслѣдованій посвященныхъ рядамъ въ прошломъ столѣтіи[2]), Эйлеровы труды занимаютъ, безспорно, первое мѣсто. Онъ разсмотрѣлъ безконечные ряды со всѣхъ возможныхъ, доступныхъ тому времени точекъ зрѣнія и нашелъ не мало общихъ и частныхъ методовъ ихъ изслѣдованія, изъ которыхъ одни сдѣлались общеизвѣстными, другіе были забыты и впослѣдствіи найдены независимо отъ него другими геометрами, иные же до сихъ поръ не получили должной оцѣнки и развитія[3]). Несмотря, однако, на все разнообразіе работъ Эйлера о рядахъ, можно резюмировать главное ихъ значеніе въ одномъ короткомъ предложеніи: Эйлеръ установилъ связь теоріи рядовъ съ разностнымъ и интегральнымъ исчисл.ніями. Предшественниками и соперниками его въ этомъ дѣлѣ были англійскіе геометры, изъ которыхъ въ особенности слѣдуетъ упомянуть о *Яковѣ*

---

[1]) Изъ всѣхъ существ. списковъ Эйлеровыхъ трудовъ (ср. стр. 258, прим. 1) лучшимъ и наиболѣе полнымъ является въ наст. время списокъ *Гагена:* Index Operum Leonardi Euleri confectus a *Ioanne G. Hagen* S. J. Berolini 1896 (см. дополн. къ нему въ статьѣ: Beitrag zur Bibliographie der Euler'schen Schriften von *G. Valentin* in Berlin, *Bibliotheca Mathematica*, N. F. Bd. 12, 1898, № 2, pp. 41—49). По Гагенову списку число отдѣльныхъ мемуаровъ Эйлера по теоріи чис.лъ — 86, по интегральному исчисл. (включая сюда и 2 мем. по варіац. исч.) — 108; по теоріи рядовъ — 78: *Series in genere* — №№ 98—109; *Series in specie* (Series geometricae, recurrentes, harmonicae, trigonometricae etc., Producta infinita) — №№ 110 — 149; *Series particulares* (Quadratura circuli, Quadrata magica etc.) — №№ 150—175. Сюда слѣдуетъ причислить еще *Fractiones* (Continuae et partiales) №№ 176—189 и нѣсколько мемуаровъ, посвящ. приложенію рядовъ къ другимъ областямъ матем. анализа: №№ 198, 199, 202, 203, 211, ...

[2]) Объ исторіи рядовъ въ прошл. столѣтіи см. *R. Reiff*. Gesch. d. un. Reihen, pp. 88—159; *M. Cantor*. Vorl. üb. G. d. M. Bd. III, 109. Kapitel. Reihen bis 1736, pp. 619—643, 110. Kap. Reihen seit 1737, pp. 643—676, 112. Kap. Reihen 1749—1754, pp. 698—713; *Montucla*. H. d. M. T. III, P. V, Liv. I, XXI, pp. 214—243. *Klügel*. Math. Wört IV Th. «Reihe», ss. 291, 292.

[3]) Таковы, напр., съ одной стороны, изслѣд. о сходимости рядовъ, съ пол. член. и о прибл. выч. ихъ суммъ помощ. опред. интеграловъ, съ другой — теорія и употребл. расходящихся рядовъ — о чемъ мы будемъ говорить подробн. впослѣдствіи.

Стирлингъ[1]). Ходъ мыслей у Эйлера былъ при этомъ самый простой и естественный.

Главной задачей всей теоріи безконечныхъ рядовъ является ихъ суммованіе. Согласно съ общепринятымъ до Эйлера воззрѣніемъ, сумма безконечнаго ряда: $f1 + f2 + f3 + \&c. \ldots (1)$, есть значеніе суммы n первыхъ членовъ его $\sum_1^n fk$ при n безконечно-большомъ[2]); если мы будемъ знать общее аналитическое выраженіе этой суммы $\sum_1^n fk = Fn$, задача сведется къ болѣе простому вопросу о нахожденіи предѣльнаго значенія $F\infty$ данной аналитической функціи Fn. Такимъ образомъ мы приходимъ прежде всего къ врпросу о *конечномъ суммованіи функцій*: рядомъ съ данной строкой возникаетъ

---

[1]) Ср. стр. 219—220 и прим. 5) къ той-же стр.; *Cantor*. Vorl. üb. G. d. M. Bd. III, pp. 625—630; Канторъ, однако, не оцѣниваетъ надлежащимъ образомъ разбираемаго имъ замѣчательнаго труда Стирлинга о рядахъ. Полное заглавіе этого сочиненія: Methodus differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum.—Auctore *Iacobo Stirling*, R. S. S. Londini MDCCXXX. Стирлингу принадлежитъ мысль разсматривать законъ, опред. послѣдовательное образов. член. б. ряда въ формѣ разностн. уравненія (aequatio differentialis ad seriem). По этому уравненію составляется новое, относ. къ сумм. ряда. Интегр. этого уравненія даетъ «valorem Termini quantumvis distantis, per seriem convergentem.... hoc Problemate generaliter soluto, non latuit casus ejius facillimus, utpote inventio Termini infinito intervallo distantis a principio; quae quidem aequipollet Summationi Serierum». Такимъ путемъ Стирлингъ достигаетъ замѣны медленно сходящ. рядовъ рядами быстро сходящ., дозволяющими приближ. суммованіе первыхъ. Интегрир. per seriem convergentem сводится къ особаго рода гиперболич. интерполированію, подобному параболич. интерполир. Ньютона. Ср. Praefatio и pp. 3—5, 18—20, 142—144. Отсюда видно, насколько несправедливы слова М. Кантора l. c. p. 625, ll. 10—16 Предшественникомъ Стирлинга въ примѣненіи разн. исчисл. къ суммов. рядовъ слѣдуетъ считать Тейлора: ср. Method. increment., Prop. XIV, Prob. IX, pp. 56—58, Prop. XXVII, Prob. XXII. pp. 112—114; ср. *Eneström* Diff. Historia, pp. 54—56.

[2]) Ср. пред. прим. и стр. 240—243.

другая $f1$, $\sum_1^2 fk$, $\sum_1^3 fk$, $\sum_1^4 fk$ *&c.*; требуется найти *общій членъ* (terminum generalem) этой строки,—аналитическую функцію Fn, которая при $n = 1, 2, 3, 4$ &c. принимала бы значенія равныя соотвѣтствующимъ членамъ ряда. Эта функція Fn есть *суммующій членъ* (terminus summatorius) предложеннаго ряда *(1)*[1]). Главная задача теоріи безконечныхъ рядовъ приводится значитъ, къ отысканію ихъ общихъ членовъ, къ *интерполяціи числовыхъ функцій*. Въ этомъ направленіи сдѣланы первыя и многія послѣдующія работы Эйлера о рядахъ, начиная съ изслѣдованія «De progressionibus transcendentibus», предпринятаго въ 1729—1730 гг.[2]) по поводу возбужденнаго *Гольдбахомъ*[3]) вопроса о нахожденіи общаго члена «гипергеометрическаго» ряда: 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c. Занимаясь этой задачей, Эйлеръ вспомнилъ, что еще Валлисъ разсматривалъ подобнаго рода вопросъ въ связи съ вопросомъ о квадратурѣ круга, и самъ сталъ искать рѣшенія болѣе общей задачи въ изслѣдованіи опредѣленныхъ квадратуръ. Въ самомъ общемъ

---

[1]) Cp. De Summatione innumerabilium pregressionum. Auct. *L. Eulero. Comm. Ac. Sc. Imp. Petr.* ad annos 1730 et 1731, Petr. 1738, §§ 1, 2, 3, pp. 91—92; *Stirling* и *Taylor* ll. c. въ прим. 1 на пред. стр.

[2]) См. письма Эйлера къ Гольдбаху Petrop. 13 Oct. 1729 и Petrop. 8 Jan. 1730, Гольдбаха къ Эйлеру Moscuae 1 Dec. 1729 и Moscuae 22 Maii 1730; *Corresp. Math. et Ph.* T. I, pp. 3—20 (ср. прим. 3 на стран. 278).—De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. Auct. *L. Eulero. Comm. Ac. Sc. I. Petr.* T. V. Ad. ann. 1730 et 1731, Petr. 1838, pp. 36—57. Къ этому мемуару примыкаетъ упом. въ предъид. прим. мемуаръ De Summ. inn. pr., помѣщ. въ томъ-же томѣ *Comm. Ac. Sc. I. P.*, pp. 91—105.

[3]) *Cristian Goldbach* (1690—1764); для сужденія о его научн. дѣятельности см. переписку его съ *Даніиломъ Бернулли* (1723—1730) и его старшимъ братомъ *Николаемъ* (1721—1725), сыновьями Ивана Бернулли; *Corr. math. et phys.* T. II, pp. 171—406, 95—170, также переп. съ Эйлеромъ (1729—1763) въ томѣ *Corr. m. & ph.*. Первыя работы Гольдбаха объ интерполяціи рядовъ относятся еще ко времени предш. 1722 году, какъ видно изъ письма его къ Н. Бернулли Vindob. 2 Jan; 1722, l.c. p. 128; въ письмѣ Venetiis d. 11. Aprilis 1722 Н. Бернулли (l. c. p. 146) говоритъ о полученномъ имъ отъ Гольд. мем. *de interpolandis serierum terminis* etc. (повид.

видѣ задача формулирована была Эйлеромъ такъ: найти функцію p отъ перемѣнныхъ n и x, такую, чтобы значеніе исчезающаго при $x = o$ интеграла $\int pdx$, при x равномъ какой нибудь постоянной величинѣ, выражало общій членъ предложеннаго ряда[1]) Эйлеръ приложилъ этотъ методъ къ интерполяціи однихъ рядовъ и суммованію другихъ и, обобщая далѣе изслѣдованія Валлиса нашелъ выраженія получаемыхъ такимъ образомъ опредѣленныхъ интеграловъ въ формѣ произведеній безконечнаго числа множителей. Такъ положено было основаніе, съ одной стороны, теоріи этого новаго, замѣчательнаго

въ рукописи), Особенно много про свои первыя работы о рядахъ пишетъ Гольдбахъ Даніилу Бернулли: объ интерпол. рядовъ и ихъ суммъ см. письма Dan. B. Venet. 18 Dec. 1723, p. 189, Goldb. Vind 2 Febr. 1724, p. 193, D. Bern. S. Pét. 30 janv. 1728, pp. 247—248, S. Pét. 20 fév. 1728, p. 252, въ особ. Goldb Mosc. 18 nov. 1728, pp. 273—274. D. Bern. S. Pét. 18 nov. 1728 pp. 276—278, Goldb. Mosc. 31 janv. 1729, pp. 282—283, Mosc. 21 févr. 1729, p. 285. Въ 1728 году Гольдбахъ сообщилъ Пет. Ак. мемуаръ De terminis generalibus serierum; *Comm. Ac. Sc. I. Petr.* T. III. Petr. 1732, pp. 164—173: *общій членъ* опредѣляется по *закону ряда* (lex progressionis)—тоже что aequatio ad seriem Стирлинга. Ср. замѣчанія объ этомъ мемуарѣ Д. Бернулли и отвѣты на нихъ Гольдбаха: письма Dan. Bern. S. Pét. 28 avr. 1729, pp. 302—304, Goldb. Mosc. 26 mai 1729, pp. 307—308, Dan. B. St. Pét. (съ утрач. датой), pp. 310—311, Goldb. Mosc. 18 août 1729, pp. 313—315, Dan. B. S. Pét. 22 Sept. (3 oct.) 1729, p. 323; см. еще ll. c. въ прим. 3) на стр. 278.—*Даніилъ Бернулли*, съ своей стороны, сообщилъ въ 1728-же году, Пет. Академіи мемуаръ подъ заглавіемъ: Observationes de seriebus quae formantur etc. (ср. прим. 6) на стр. 281), въ которомъ тоже говорится о нахожд. общаго члена ряда по его закону; ср. замѣчанія объ этомъ мемуарѣ въ письмахъ Dan. Bern. St. Pét. (1728), pp. 270—271, Goldb. Mosc. 18 nov. 1728 p. 274, Dan Bern. S. Pét. 18 nov. 1728, pp. 276—279. S. Pét. 20 (31) mars 1729, pp. 291—292.—Таковы были работы математиковъ Петербургской Академіи объ общихъ членахъ б. рядовъ, предшествовавшія работамъ Эйлера о томъ же предметѣ, съ которыми онъ былъ несомнѣнно знакомъ. Съ другой стороны, совершенно несомнѣнно, вопреки Кантору (Gesch. d. M. Bd. III, p. 630), что на первыя изслѣдованія его, начатыя уже въ 1729 году, не могла оказать никакого вліянія книга Стирлинга, вышедшая въ 1730 году.

[1]) *De progr. transc.* §§ 6, 7, l. c.pp. 39—40. О Валлисѣ см. стр. 164—166. *L. Euler.* De progr. transc., l. c. pp. 38—39. Ср. *Laplace.* Th. an. des probab. Addition I.

вида безконечныхъ выраженій[1]) съ другой—теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.

Къ концѣ своего мемуара «De progressionibus transcendentibus», Эйлеръ воспользовался найденнымъ имъ методомъ интерполяціи для рѣшенія одного интереснаго вопроса, затронутаго еще Лейбницемъ, а именно вопроса о распространеніи понятія о дифференціалѣ на случай дробнаго указателя порядка дифференцированія[2]).

«Coronidis loco adhuc aliquid», говоритъ онъ, «curiosum id quidem magis quam utile adiungam». Онъ замѣчаетъ, что при n цѣломъ отношеніе дифференціаловъ $d^n(z^e)$ и dz^n выражается формулой $\frac{1.2.3.\ldots.e.}{1.2.3.\ldots(e-n)}\, z^{e-n}$. Факторіалы стоящіе въ числителѣ и знаменателѣ коеффиціента при z^{e-n} могутъ быть выражены соотвѣтственно опредѣленными интегралами

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^e \cdot dx \text{ и } \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{e-n} \cdot dx, \text{ такъ что}$$

$$d^n(z^e) = z^{e-n} \cdot dz^n \frac{\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^e \cdot dx}{\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{e-n} \cdot dx}\ ^{3)}.$$

---

[1]) *De prog. transc.* §§. 8—26, pp. 40—55: общіе члены рядовъ, «quarum singuli termini sunt facta ex factoribus in progressione arithmetica progredientibus, in quibusque numerus factorum ut libuerit ab indicibus terminorum pendeat». *De summat. innumerab. progress.* l. c. pp. 92—105: суммующіе члены рядовъ, «quarum termini sunt fractiones, quarum denominatores constituunt progressionum quamcunque algebraicam». «....vt hic rem consideravimus, numeratores deberent esse quantitates constantes; sed non difficulter haec methodus extendetur......» «Propterea haec methodus ad omnes progressiones quarum termini gener. algebr. prossunt exponi, accomodare potest....» —*De productis ex infinitis factoribus ortis* l. c. въ прим. 3 на стран. 278. Стирлингъ также пользуется интерполяціею посредствомъ опредѣленныхъ квадратуръ, хотя и съ меньшей послѣдовательностью чѣмъ Эйлеръ: см. *Meth. diff.* Prop. XXIV, XXV, pp. 125—129; ср. Pop. XXVIII, Scholion, p. 138 Ср. стр. 278—280.

[2]) Ср. стр. 252—254.

[3]) *De progr. transc.*, l. c. §§ 27, 28, pp. 55 — 57, *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 633—634.

Эта формула и можетъ служить для опредѣленія $d^{n}(z^{e})$ при какомъ угодно n. Такъ, при $n = \frac{1}{2}$ и $e = 1$, мы получимъ: $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{z\,dz}.\int_0^1 l\frac{1}{x}.\,dx : \int_0^1 \sqrt{l\frac{1}{x}}.\,dx$, или $dz^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{z\,dz}{\pi}}$[1]) Съ помощью этой послѣдней формулы можно, напримѣръ, проинтегрировать уравненіе $y\,d^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{dy}$, считая dz постояннымъ; искомый интегралъ есть $ylz = (cy-1)\,\frac{\pi}{4}$.—[2]).

Эйлеръ затѣмъ задался цѣлью найти общіе методы суммованія рядовъ и въ 1732 году пришелъ къ своей знаменитой и хорошо извѣстной формулѣ[3]), выражающей соотношеніе между суммами и интегралами, которая была совершенно независимо отъ него найдена также Маклореномъ и изложена въ его трактатѣ о флюксіяхъ, напечатанномъ однако лишь четыре года спустя послѣ опубликованія ея Эйлеромъ въ Запискахъ Петер-

---

[1]) *De pr. tr.* § 29, pp. 56 — 57, *Cantor*, l. c. Лейбницъ получилъ, какъ мы видѣли на стр. 254, мало отличающуюся отъ Эйлеровой формулу: $d^{\frac{1}{2}}x = x.\sqrt{\frac{dx}{x}}$.

[2]) *De progr. transc.* sub fin., p. 57.

[3]) Въ обозначеніяхъ Эйлера: $Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5x}{1.2\ldots.6\,dx^5} - \&c$, adiiciendo eiusmodi constantem, ut posito $x = 0$ ipsa summa Sz evanescat, или въ современныхъ: $\sum_{n=1}^{n=x} fn = \int_1^x fx.\,dx + \frac{1}{2}(fx + f1) + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}(f'x - f'1) - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(f'''x - f'''1) + \&c$. *Пауссонъ* (Mémoire sur le calc. numér. des Integr. déf. Mém. de l'Ac. royale d. sc. de l'Inst. de Fr. 1823 T. VI, P. 1827) и *Остроградскій* (Mémoire sur les quadratures déf. Mém. de l'Ac. Imp. d. Sc. de S. Pét. VI e sér. Sc. math. phys. et nat. 1-re part. sc. m. & ph. t. II, livr. 4 1840) нашли остат. членъ этой формулы.

бургской академіи наукъ (въ 1738 году[1]). Выводъ этой формулы данъ также въ V главѣ второй части «Основаній Дифференціальнаго Исчисленія», носящей заглавіе: «Investigatio summae serierum ex termino generali»[2]) Слѣдующія за этой главой двѣ главы посвящены нѣкоторымъ приложеніямъ формулы Эйлера[3]).

Въ главѣ XVI «De differentiatione functionum inexplicabilium» таже формула примѣняется для дифференцированія функцій вида: $S = f1 + f2 + f3 + \ldots + fx$ и $P = f1. f2. f3 \ldots fx$, которыя Эйлеръ называетъ «functiones inexplicabiles», какъ и вообще всѣ тѣ числовыя функціи, «quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt: ita ut non solum non sunt algebraicae, sed

---

[1]) Объ исторіи открытія Эйлеровой формулы см. въ мемуарѣ: Om upptäkten af den Eulerska summationsformeln. Af *Gustaf Eneström*. Öfversigt af Kongl. Vetensk. Ak. Förhandlingar 1879 N:o 10 Stockholm, pp. 3–17. Ср. *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. VI, 1732—33, Petr. 1738; Methodus generalis summandi progressiones, Auct. *L. Eulero*, p. 69. *Comm. Ac. Sc. I. Petr.* T. VIII, ad ann. 1736, Petr. 1741. Inventio Summae cuiusque seriei ex dato termino generali. Auct. *L. Eulero*; pp. 9—22. Письмо Эйлера къ Гольдбаху Berlin 26 Febr. 1743, 9 Apr. 1743, Г. къ Эйл. S. Pet. 23 März 1743, *Corresp.* t. I, pp. 206, 212, 219—222.—*C. Mac. Laurin.* A Treatise of Fluxions. Edinb. 1742, Art. 827—833, Book. II, Ch. IV, (*Of computing of sums of progressions and areas from each other*), pp. 672—676. «The following theorems derived from the method of fluxions may be of use for this purpose; and serve for the resolution of many problems that are usually referred to what is called Sir. Isaac Newton's *differential method* (l. c art 827, p. 672). Ср. еще *Lagrange.* Sur une nouv. esp. de calcul etc. l. c. въ прим. на стр. 311, pp. 458–460.

[2]) *Inst. calc. diff.* P. II, art. 103—130, pp. 321–352.

[3]) *Ibid.* Cap. VI.—De summatione progressionum per series infinitas, art. 140—166, pp. 353–383 (Progr. harmonica, progr. potestat. reciproc. series $S\frac{1}{nn+xx}$, Slx, uncia media seu maxima in potestate binomii quacumque $(a+b)^m$, Sa^x, $S\sin ax$),—Cap. VII. Methodus summandi superior ulterius promota, art. 167—197, pp. 384—411 ($S. yp^x = ap + bp^2 + \ldots + yp^x$, $Sx^n p^x$, $S\frac{xx+x}{2}p^x$, $S\frac{p^x}{x}$, Syp^x при $p = -1$, $S(-1)^x x^n$; $sZ = S\,Zs$, $Sp^x x^2$

etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant»[1]).

$Sz = \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} \ldots + \overset{x}{z} = P + Q + R + S + \&c.$ гдѣ $\int z dx = P$, $P - \int (P - p)\, dx = Q$, $Q - \int (Q - q)\, dx = R \ldots$ abeatque, posito $x-1$ loco x, P in p, Q in q, R in $r \ldots$, $z = \overset{x,}{z} + \overset{x+1,}{z'} + \overset{x+2,}{z''} + \overset{\&c.}{\&c.}$) – Ср. Inventio summae etc. l. c. въ прим. 1) на 403 стр. и въ томъ же томѣ *Comm. Ac. Sc. I. P.*, Methodus universalis series summandi ulterius promota. Auct. *L. Eulero*, pp. 147—158. *Comm. Ac. Sc. I. P.* T. XII, 1740, Petr. 1750 De seriebus quibusdam considerationes. Auct. *L. Eulero*, pp. 75 sqq. *Novi Comm. Ac. Sc. I. P.* T. XIV, pro anno 1769, P. I. Petr. 1770, De summis serierum numeros Bernoullianos involventium. Auct. *L. Eulero*, pp. 129—167.—*Mémoires de l'Ac. Imp. des sc. de St. Pét.* T. V. S. P. 1815, Methodus succincta summas serierum infin. per formulas differentiales investigandi Auct. *L. Eulero* (conv. exh. die 13 Mart. 1780). pp. 45—56—*Acta Acad. Sc. I. P.* pro Anno 1781, p. II, P. 1785, De numero memorabili in summatione progressionis harmon. natur. occurente. Auct. *L. Eulero*, pp. 45-75 $\left(C = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln \right) = 0{,}5772156649015325 \ldots \right)$ *Nov. Acta A. S. I. P.* T. VIII ad ann. 1790, Petr. 1794, Variae considerationes circa series hypergeometricas. Auct. *E. Eulero* (conv. exh. d. 19 Aug. 1776), pp. 3 sqq. спец. pp. 7—9.—*Maclaurin*. Tr. of. fl. art. 833—856, pp. 676—693.—Стирлингъ въ Prop. XXVIII Meth. diff. (Interpolatio serierum) рѣшаетъ задачу: Invenire summam quotqunque Logarithmorum, quorum numeri sunt in progressione Arithmetica, и приходитъ къ знаменитой формулѣ для приближенненнаго вычисл. *log.* $\Gamma\,(x+1)$ при больш. зн. x (Meth. d. pp. 135—137). Къ исторіи Стирлингова ряда см. *J. Eggenberger*. Beiträge z. Darstellung d. Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunctionen und d. Laplace'schen Integrals. Bern 1893, III, IV, pp. 24—43.

[1]) *Inst. calc. diff.* P. II, Cap XVI. art. 367, p. 611. Приложеніе формулы Эйлера къ дифф. funct. inexpl. см. въ art. 386—388, pp. 639—670; въ art. 367—386, pp. 611—639, Эйлеръ прилагаетъ особый методъ интерполированія, годный лишь для того случая, когда безконечно удаленные члены ряда $f1$, $f2$, $f3$,.... или $= 0$, или имѣютъ differentias tandem evanescentes (ср. art. 3?9—371, pp. 612.—614); основная формула: $\sum_{k=1}^{x} fk = \varphi x$; $\varphi\,(x + \omega) - \varphi x = \omega . f\,(\infty) + \sum_{k-1}^{\infty} f\,(x + k) - \sum_{k=1}^{\infty} f\,(x + \omega + k)$ Въ слѣдующей, XVII й главѣ P. II. *Inst. c. d.* De interpolatione serierum

Эйлеръ дополнилъ впослѣдствіи свои работы объ интерполяціи и суммованіи рядовъ новыми изысканіями, произведенными въ томъ

(art. 389—402, pp. 641—667) Эйлеръ пользуется тѣмъ же методомъ для интерполяціи рядовъ, считая ω конечнымъ: результаты получаются такимъ образомъ въ формѣ безконечныхъ рядовъ или произв. безк. числа множ. Ср. *Nova Acta Ac. Sc. I. Petr.* t. VI, ad. ann. 1788, De singulari ratione differentiandi et integrandi quae in summis serierum occurit. Auct. *L. Eulero* (Conv. exh. d. 18. Mart. 1776), pp. 3—15. Въ дополненіе къ этимъ изслѣдованіямъ Эйлера de funct. inexpl. см. еще посмертный мемуаръ его: Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus напеч. въ первый разъ Фердинандомъ Сперони въ видѣ прибавленія къ его изданію *Inst. calc. diff.* (pp. 703—704: Editoris Monitum, pp. 705—732: Diluc.), затѣмъ въ *Mém. de Ac. I. d. Sc. de S. P.* t. IV, 1811, pp. 88 sqq. Эйлеръ разсматр. сначала terminum summatorium seriei (1), (2),......(x), гдѣ (x) нѣк. ф-ія отъ x — term. gener. ser.: $\sum : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (x)$; интерполяція производится посредствомъ разности исчисленія. Для рядовъ (1), (2), ... quarum termini infinitesimi evanescunt, получается формула: $\sum : x = \sum_{k=1}^{\infty} (k) - \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)$; для ряд., quar. differentiae infinitesimae primae evanescunt: $\sum : x = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{1-x}\,(k) + \sum_{k=1}^{\infty} x(k) - \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)$; для ряд. quar. differ. inf. secundae evanescunt: $\sum : x = x\,(1) + \sum x\,\Delta\,(k) + \sum \frac{x(x-1)}{2}\,\Delta^2(k) - \sum (x+k)$. Тѣ же формулы посредств. логарифмир примѣняются (pp. 729—732) и къ функціямъ вида $\pi : x = A.\ B.\ C.\ D.\ E.\ldots.X.$—NB. Exemplum, pp. 712—718—изслѣд. сумм. члена гармонич. ряда въ связи съ изслѣд. кривой $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x\,(x+k)}$ и вычисл. площади ея $\int_0^1 y dx =$ $= 0{,}5772156649015325\ldots.$ Интегралъ этотъ $= \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - l n \right)$; см. *L. Mascheroni.* Adnotationes ad. calc. integralem Euleri. Ticini 1790, pp. 58—61 (ср. *ibid.* pp. 44—45 и предъидущее прим. Ср. еще Evolutio Formulae integralis $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx} \right)$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae. Auct. *L. Eulero* (conv. exh. d. 29 Febr. 1776). *Nova Acta Ac. Sc. I. Petr.* t. IV. P. 1789, pp. 3 — 16.—О рядахъ, найденныхъ *Condorcet* для выраженія формулъ $E^{E^{\cdot^{\cdot^{E^{a+x}}}}}$; $\frac{n}{Cos.Cos.\ldots Cos.(A+x)}$ $\sqrt[m]{A+\sqrt[m]{A+\ldots+\sqrt[m]{A+\sqrt[m]{B+x}}}}$,

же направленіи[1]). Изъ частныхъ изслѣдованій наиболѣе замѣчательны тѣ, которыя имѣютъ связь съ теоріей особаго рода опредѣленныхъ интеграловъ носящихъ и теперь имя великаго геометра. Мы впослѣдствіи разсмотримъ эти работы, а теперь, продолжая изложеніе общихъ изслѣдованій Эйлера о рядахъ, мы должны остановиться еще на одной попыткѣ его дать общее рѣшеніе вопроса объ интерполяціи безконечныхъ строкъ, попыткѣ заслуживающей вниманія, какъ мы сейчасъ увидимъ, во многихъ отношеніяхъ. Она составляетъ предметъ интересной записки помѣщенной въ III томѣ Новыхъ Комментарій Петербургской Академіи Наукъ за 1750 и 1751 годы, напечатанномъ въ 1753 году, и носитъ заглавіе: «De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum»[2]).

гдѣ число производим. дѣйствій есть n, log. $E = 1$, $E^a = a$, Cos A=A (во 2-й формулѣ), $A = B - \sqrt[m]{B}$ (въ 3-й формулѣ) см. *Acta Acad. Sc. I. P.* 1777, P. I, P. 1778. Sur quelques séries infinies dont la somme peut être exprimée par des fonctions analyt. d'une forme paticulière, par M. *le Marquis de Condorcet*, pp. 34—37; *ibid.*, pp. 38—60: De formulis exponentialibus replicatis. Auct. *L. Eulero.* pp 59—60, §§ 40—42; De theoremate, quod Illustr. *Marchio de Condorcet* nobiscum communicavit. Cp. *Acta Ac. Sc. Imp. P.* 1779, P. II, Petr. 1783. Sur les fonctions indéfinies. Par Mr. *le Marquis de Condorcet*; pp. 3—28. Формулы Кондорсэ могутъ быть разсматраваемы какъ своего рода functiones inexplicabiles; ср. *Lacroix.* Tr. du c. d. et du c. i. t. Ш, p. XII.

[1]) Кромѣ работъ упом. въ предъидущихъ примѣчаніяхъ, имѣющихъ предметомъ приложеніе Эйлеровой формулы, а также другихъ работъ, относящ. спец. къ теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ, о которыхъ мы будемъ говорить ниже, слѣдуетъ еще упомянуть: De eximio usu methodi integrationum in serierum doctrina. *Leon. Euleri* Opuscula Analytica T. I, Petr. 1783, pp. 157—210.—De termino generali serierum hypergeometricarum. Auct. *L. Eulero*; *N. Acta A. S. I. Petr.* T. VII, 1789, Petr. 1793 (Conuent. exhib. 19 Aug. 1776), pp. 42—63.—Variae considerationes circa series hyperg.: Auct. *L. Eulero. Nova Acta Ac. S. I. P.* T. VIII, 1790, P. 1794 (Conu. exh. 19 Aug. 1776), pp. 3—14. Въ особенности: De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y=1.2.3\ldots\ldots x$. Auct. *L. Eulero. Novi Comm. Ac. Sc. I. P.* T. XIII, 1768, Petr. 1769, pp. 3—66.

[2]) *Nov. Comm. Ac. Sc. I. Petr.* T. III ad annum 1750 et 1751, Petr. 1753, pp. 36—85; Ср. Summarium въ этомъ же томѣ, Errata на pp. 13—14.

Послѣ краткихъ общихъ замѣчаній о задачѣ интерполированія рядовъ и о ея неопредѣленности[1]), Эйлеръ, чтобы приступить къ разсмотрѣнію и рѣшенію этой задачи въ различныхъ случаяхъ и имѣть возможность различать и классифицировать ихъ, переходитъ къ общимъ соображеніямъ о законахъ образованія или развертыванія безконечныхъ строкъ. Онъ раздѣляетъ всѣ ряды по способу ихъ образованія на три рода. Въ рядахъ перваго рода каждый членъ опредѣляется единственно посредствомъ указателя своего мѣста. Дѣйствія, которыя нужно произвести надъ этимъ указателемъ, чтобы получить соотвѣтственный членъ ряда, будучи независимыми отъ случайной природы этого указателя, какъ цѣлаго числа, и имѣющими опредѣленный смыслъ для всевозможныхъ значеній этого указателя, какъ дробныхъ, такъ и ирраціональныхъ, доставляются формулой, которая и есть *общій членъ ряда*: «....formula istas operationes in genere complectens ipse erit terminus generalis seriei». Въ этомъ случаѣ, по выраженію Эйлера, «series absolute ac perfectissime determinatur». Ко второму роду принадлежатъ ряды, каждый членъ которыхъ опредѣляется посредствомъ нѣсколькихъ предъидущихъ по нѣкоторому опредѣленному правилу; къ этому роду принадлежатъ возвратные ряды. Третій родъ составляютъ ряды, члены которыхъ находятся не только посредствомъ предъидущихъ, но и при помощи своихъ указателей[2]). Задача интерполированія рядовъ перваго рода рѣшается сама собою: члены этихъ рядовъ разсматриваются какъ частныя значенія *аналитическихъ функцій*, съ той самой точки зрѣнія, съ которой Эйлеръ смотритъ на нихъ въ разобранной уже нами 3-й главѣ «Дифференціаль-

---

[1]) *Ibid.* §§ 1—5. pp. 36- 39; ср. §§ 9—11, pp 41—43.

[2]) *De ser. det.* § 6, l. c. pp. 39—40. Ср. Гольдбахово раздѣленіе рядовъ на progressines q. lex *constans* et *certa* est и progress. q. lex *variabilis* est, что соотв. Эйлеровымъ рядамъ 2-го и 3-го рода; см. De terminis gen. ser. auct. *C. G.* l. c. въ прим. 3) къ стр. 399 pp. 164—165.

наго Исчисленія»[1]). Онъ переходитъ затѣмъ къ интерполированію рядовъ втораго рода и останавливается на томъ именно случаѣ, когда каждый членъ выражается съ помощью предъидущаго посредствомъ данной формулы[2]); употребляемый при этомъ методъ рѣшенія распространяется и примѣняется легко къ болѣе сложнымъ рядамъ втораго и даже третьяго родовъ[3]). Чтобы дать понятіе объ этомъ методѣ мы покажемъ какъ Эйлеръ рѣшаетъ съ его помощью общую задачу суммованія конечныхъ разностей. Задача предлагается въ такой формѣ: «Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequetur praecedenti vna cum functione quacunque ipsius indicis»[4]). Предполагая соотвѣтствующій указателю x общій членъ $= y$, напишемъ предъидущій членъ $'y$, соотвѣтствующій указателю $x - 1$, въ формѣ ряда: $y - \frac{dy}{1.dx} + \frac{ddx}{1.2.dx^2}\,etc.$; тогда задача наша приведется къ интегрированію линейнаго *дифференціальнаго уравненія безконечно-большаго порядка*:

$$X = \frac{dy}{1.dx} - \frac{ddx}{1.2.dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} - \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + etc.$$

Примѣняя къ этому уравненію обыкновенный Эйлеровъ методъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коеффиціентами конечныхъ порядковъ[5]),

---

[1]) Ср. стр. 379 *De ser. det.* l. c. § 8, p. 40.

[2]) *Ibid.* §§ 12—51, pp. 43—76. Probl. I—VII.

[3]) Ср. *Ibid.* Pr. VII, Sholion 2, § 52, p. 76.

[4]) *Ibid.* Probl. IX. p. 80.

[5]) Ср. *Ibid.* Probl. I, § 12, p. 44. Этотъ методъ былъ изложенъ Эйлеромъ впервые въ VII томѣ (1743 г.) *Miscellanea Berolinensia* въ мемуарѣ: De integratione aequationum differentialium altiorum graduum, pp. 193–242. Дополненіе къ этому мемуару подъ заглавіемъ: Methodus aeq. diff. alt. gr. integrandi ulterius promota, напечатано въ III томѣ *Nov. Comm Ac. Sc. I. P.*, pp. 3—35. Къ исторіи Эйлерова открытія см. Sur la découverte de l'intégrale complète des éq, diff. lin à coeff constants. Par *G. Enström. Bibl. Mathem.* Nouv. sér. 11, 1897, № 2, pp, 43 - 50. *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 863—867.

мы должны будемъ прежде, всего, составить характеристическое уравненіе, которое въ данномъ случаѣ будетъ трансцендентнымъ уравненіемъ: $1 - e^{-z} = 0$, удовлетворяющимся при $z=0$ и $z = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, гдѣ $k=1,2,3,$ . . Корень $z=0$ доставляетъ частный интегралъ уравненія безъ 2-го члена: 1 и дополнительную функцію $\int Xdx$; корни $z = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, — пару интеграловъ уравненія безъ втораго члена: $\cdot C_k.Cos 2k\pi x + C'_k.Sin 2k\pi x$ и соотвѣтствующую пару дополнительныхъ функцій: $e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1}.x}\int Xe^{\mp 2k\pi\sqrt{-1}.x}.\,dx$. Найдя такимъ образомъ интегралы уравненія безъ 2-го члена и дополнительныя функціи, легко будетъ получить общій интегралъ предложеннаго уравненія въ такой формѣ: $y = \int Xdx + 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{ Cos\, 2k\pi x.\ (C_k + \int X\ Cos\ 2k\pi x.\ dx) + Sin\ 2k\pi x\ (C'_k + \int X.\ Sin\ 2k\pi x.\ dx)\Big\}$, или, что все равно:

$$y = \int Xdx + 2\sum_{k=1}^{\infty}(Cos\ 2k\pi x.\int X.\ Cos 2k\pi x.\ dx + Sin 2k\pi x.\int X.Sin 2k\pi x.dx)\ [1]).$$

Изъ этой формулы не трудно вывести извѣстное разложеніе періодической функціи по синусамъ и косинусамъ дугъ кратныхъ перемѣнной; формула Эйлера, въ свою очередь, есть очень простое слѣдствіе формулы Фурье[2]).

---

[1]) *De serier. determ.* l. c. Probl. IX, Solutio, pp. 80—81; привед. мною обыкнов. способъ интегрированія нѣсколько отличается отъ Эйлерова, оставаясь тѣмъ же по существу. Въ дополненіе къ рѣшенію задачи IX, см. еще *Coroll.* 1 и 2, pp. 81—82. Ср. *Instit. calc. integr.* t. II, p. 387 (L I. P. II, Cap. IV. Probl. 160, Cor. 3).

[2]) Въ силу Эйлеровой формулы разность $y - 'y = X = fx$ можетъ быть представлена въ такомъ видѣ: $fx = \int_{x-1}^{x} ft.\,dt + 2\sum_{k=1}^{\infty}$ (Cos2kπx

Подобнымъ же образомъ рѣшаетъ Эйлеръ другія задачи интерполированія рядовъ, или обратнаго исчисленія разностей, приводя ихъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій безконечно-большаго порядка[1]). Эйлеръ обнаружилъ при этомъ въ первый разъ присутствіе произвольныхъ, или, вѣрнѣе, неопредѣленныхъ періодическихъ функцій въ общихъ рѣшеніяхъ задачъ этого рода[2]).

Одновременно съ изысканіями объ аналитическомъ суммованіи рядовъ Эйлеръ занялся и вопросами о приближенномъ

$\int_{x-1}^{x} ft.\ Cos\ 2k\pi t\ dt + Sin\ 2k\pi x. \int_{x-1}^{x} ft.\ Sin\ 2k\pi t.\ dt.)$. Предполагая, что fx періодич. функція съ періодомъ 1, такъ что $f(x+1) = fx$, мы можемъ сдѣлать постоянными предѣлы входящихъ въ эту фовмулу интеграловъ

Замѣтимъ, вообще, что если $\varphi(x+a) = \varphi x$, то $\int_0^{x-a} \varphi t.\ dt = \int_a^x \varphi t.\ dt.$; далѣе, $\int_{x-a}^{x} \varphi t\ dt = \left(\int_0^x - \int_0^{x-a} - \int_0^a + \int_0^a\right) \varphi t.\ dt = \left(\int_a^x - \int_0^{x-a}\right) \varphi t.\ dt + \int_0^a \varphi t.\ dt$, и слѣд., $\int_{x-a}^{x} \varphi t.\ dt = \int_0^a \varphi t.\ dt$. Пользуясь этимъ предложеніемъ, мы приходимъ къ формулѣ Фурье: $fx = \int_0^1 ft.\ dt. + 2\sum_{k=1}^{\infty} (Cos.\ 2k\pi x. \int_0^1 ft.\ Cos\ 2k\pi t.\ dt. + Sin\ 2k\pi x. \int_0^1 ft.\ Sin\ 2k\pi t.\ dt.)$.

[1]) Ср. *De Ser. determ. l. c.* Probl. IX, Scholion, § 58, p. 82; Probl. VIII, §§ 53, 54, pp. 77—80, Probl. X. §§ 59, 60, pp. 82—85 (Term. gener. ser. hypergeom. $y = \overset{v}{e}$, $v = \int lgx.\ dx. + 2\sum_{k=1}^{\infty}(Cos\ 2k\pi x \int lgx.\ Cos\ 2k\pi x.\ dx + Sin\ 2k\pi x. \int lgx.\ Sin\ 2k\pi x.\ dx)$, или $= \frac{x^x}{e^x} \cdot e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - etc.} . \sqrt{2\pi}$

Ср. интегр. лин. д. ур. безк. высок. пор. въ Cap, IV, Sect. II, P. II. L. I *Institut. calculi integralis*, t. II, pp. 379—398. NB. Probl. 159, Schol 2, pp. 383—384. Ср. еще l. c. въ [1]) прим. на стр. 409. *Cantor*. Vorl. üb. G. d. Math. Bd. III, pp. 867—869. *Lagrange*. Oeuvres, t. I, pp. 493 suiv. 515.

[2]) Ср. *Lacroix*. Traité du calc. diff. et du c. int. t. III, art. 1066—1070, pp. 244—249.

вычисленіи ихъ суммъ и объ ихъ сходимости. Этимъ вопросамъ посвятилъ онъ мемуаръ «De progressionibus harmonicis» и полнѣе развилъ свои мысли въ другой работѣ «Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi». Обѣ работы были сообщены Петербургской Академіи Наукъ, одна въ 1734 году, другая въ 1736 и напечатаны въ VII и VIII томахъ старыхъ Комментарій этой академіи[1]). Въ первомъ мемуарѣ Эйлеръ начинаетъ съ разсмотрѣнія строки, общій членъ которой имѣетъ видъ $\frac{c}{a+nb}$ и замѣчаетъ, что, хотя послѣдовательные члены такого рода строки и убываютъ безгранично, однако, не смотря на это, сумма безконечнаго числа ея членовъ всегда безконечно-велика. Для выясненія этого онъ устанавливаетъ затѣмъ общій признакъ сходимости безконечныхъ рядовъ, тотъ самый признакъ, который впослѣдствіи, въ строгой и точной формѣ былъ введенъ въ науку Коши[2]). «Series quae in infinitum continuata», говоритъ Эйлеръ, «summam habet finitam, etiam si ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, sed id quod post infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite paruum. Nisi enim hoc ita se haberet, summa seriei etsi in infinitum continuatae non esset determinata et propterea non finita. Ex quo consequitur, si id, quod ex continuatione vltra terminum infinitesimum oritur, sit finitae magnitudinis, summam seriei necessario infinitam esse debere»[3]). Эйлеръ показываетъ затѣмъ, что

---

[1]) *Comm. Ac. Petr.* T. VII, 1734 & 1735. Petr. 1740, pp. 150-161; De Progressionibus Harmonicis Observationes. Auct. *L. Eulero.*—*Comm Ac. Petr.* T. VIII, 1736, P. 1741, pp. 3-9: Method. univ. etc. Auct. *L. Eulero.*

[2]) *Cauchy.* Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1-re Partie. Analyse algébrique. Paris 1821, Ch. VI, pp. 125—126. Строгое доказательство этого признака въ обобщенной формѣ дано *П. Дю Буа Реймондомъ*: Die Allg. Functionentheorie, Cap. V, art. 66, pp. 258-262.

[3]) *De progress. harmon.* § 2. l. c. pp. 151 — 152. Тожество Эйлерова признака съ признакомъ Коши указано *Энестремомъ:* см. Öfversigt af kongl.

въ разсматриваемомъ гармоническомъ ряду сумма членовъ слѣдующихъ за i—мъ членомъ $\frac{c}{a+(i-1)b}$ и заканчивающихся ni—мъ членомъ $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, при i безконечно-большомъ, конечная: $< \frac{(n-1)c}{b}$ и $> \frac{(n-1)c}{nb}$ и, слѣдовательно, рядъ расходящійся[1]). Для приближеннаго вычисленія этой суммы при весьма большихъ значеніяхъ i Эйлеръ придумалъ еще другой способъ, приводящій къ приближенному выраженію ея въ формѣ опредѣленнаго интеграла. Способъ этотъ, изложенный сначала только въ приложеніи къ частному примѣру гармоническаго ряда[2]), Эйлеръ, во второй работѣ, обобщилъ на случай какихъ угодно рядовъ съ безгранично убывающими положительными членами. Замѣчая, что сумма i членовъ рада $s=\sum_{k=o}^{i-1} u_k$ есть нѣкоторая функція отъ i, получающая приращеніе u_i при увеличеніи i на единицу, онъ полагаетъ при весьма большихъ значеніяхъ i, $di:ds = 1:u_i$, откуда $s=\int u_i\, di$, а $\sum_{k=i}^{in} u_k = \int_i^{in} u_x.\, dx$[3]); въ разсматриваемомъ случаѣ гармони-

Vetenskaps Akad. Förhandl. Stockholm 1879. № 9; Ett konvergenskriterium från början af 1700-talet. — Af *Gustaf Eneström*, p. 82, s. Ср. *Reiff.* Gesch. d. unendl. Reihen. pp. 118—119, — Стирлингъ пользовался тѣмъ же признакомъ, не формулируя его однако подобно Эйлеру въ общемъ предложеніи; см. *Method. differ.*; Summatio ser., de summis successivis (остаточн члены) pp. 18—20; предѣлъ отаточ. члена или вѣрнѣе, по Эйлеру, суммы безконеч. больш. числа членовъ слѣдующимъ за безконечно удаленнымъ называется у Стирлинга «ultima summa» Ср. *Meth. diff.* Summ. Serier. pp. 20—41; *Eneström*, l. c. pp. 71—84. Стирлингъ выводитъ изъ общаго признака призн. сходимости особ. рода строкъ. Ср. еще прим. 2) къ стр. 228. — *Montucla*. H. d. M. t. III, p. 236.

[1]) *De progr. harmon.* § 3, l. c. p. 151.

[2]) *Ibid.* § 6 sqq. pp. 153 sqq.

[3]) *Ibid.* § 6, p. 153, *Method. univ.* § 1, l. c. pp. 3—4.

ческаго ряда $u_x = \frac{c}{a+bx}$, $\sum_{k=i}^{in} u_k = c.\int_i^{in} \frac{dx}{a+bx} =$

$c\int_1^n \frac{idx}{a+bix} = \frac{c}{b}\ lh\, \frac{a+nib}{a+ib}$, или, при очень большомъ i,

приблизительно, $\sum_{k=i}^{in} u_k = c\int_1^n \lim_{i=\infty} \frac{i}{a+bix}dx = \frac{c}{b}\int_1^n \frac{dx}{x}$

$$= \frac{c}{b}\ lhn$$ [1]).

Приведенный методъ Эйлера заключается, какъ видно, въ особаго рода интерполяціи предложеннаго ряда. Подобный же методъ интерполяціи онъ примѣнялъ впослѣдствіи и въ другихъ случаяхъ, именно въ задачѣ о дифференцированіи «неприводимыхъ функцій» (functiones inexplicalibes) въ «Основаніяхъ Дифференціальнаго исчисленія» [2]). Найденное такимъ путемъ приближеніе даетъ всегда величину меньшую дѣйствительной, и, чтобы найти другую, дополнительную приближенную величину бо́льшую истинной, Эйлеръ прибѣгъ къ геометрическимъ соображеніямъ «....quo limites habeantur, intra quos vera seriei summa sit constituta». « ...inspectio figurae», продолжаетъ онъ, «non solum imaginationis vim adauget, sed etiam ad indicandum et inueniendum ingens affert subsidium» [3]). Соображенія Эйлера сводятся къ тому простому замѣчанію, что, если величина функціи fx остается положительной при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ x и безгранично убываетъ съ возрастаніемъ x, то площадь прямоугольника $fn.\ [n-(n-1)]$ составляетъ часть криволинейной площади $\int_{n-1}^{n} fx.\ dx$, а, съ другой

[1]) *De progr. harm.* § 6. p. 153; ср. *ibid.* § 12, p. 157.
[2]) См. прим. [1]) къ стр 404
[3]) *Method. univ.* § 2, l. c. p. 4. Ср. прим. [2]) на стр. 392.

стороны, равный ему прямоугольникъ $fn.\ [(n+1)-n]$ вмѣщаетъ въ себѣ криволинейную площадь $\int_n^{n+1} fx.\ dx$, и слѣдовательно $\int_m^{n+1} fx\ dx < \sum_{x=m}^{n} fx < \int_{m-1}^{n} fx.\ dx.$[1]). Разсматривая другія прямолинейныя фигуры, площади которыхъ ближе подходятъ къ криволинейнымъ, Эйлеръ нашелъ болѣе тѣсные предѣлы для величины суммы $\sum_{x=m}^{n} fx$ и болѣе приближенное ея выраженіе:

$$\sum_{x=m}^{n} fx = \int_m^{n+1} fx.\ dx + \frac{fm - f(n+1)}{2} + \frac{fm - f(m+1)}{12} - \frac{f(n+1) - f(n+2)}{12}$$

[2]); если предложенный рядъ сходящійся, то полагая $n=\infty$, мы получимъ: $\sum_{x=m}^{\infty} fx = \int_m^{\infty} fx.\ dx + \frac{7}{12} fm - \frac{1}{2} f\,(m+1)$, формулу, дающую приближенное выраженіе остатка разсматриваемаго ряда, и точность которой увеличивается по мѣрѣ возрастанія числа m[3]) Получивъ эти формулы геометрическимъ путемъ, Эйлеръ сталъ искать аналитическаго рѣшенія той-же задачи и пришелъ такимъ образомъ къ своей знаменитой формулѣ для выраженія суммъ помощью интеграловъ, о которой мы уже упоминали[4]). Почти одновре-

---

[1]) *Method. univ.* §§ 3—8, pp. 4—6.

[2]) *Ibid.* §§ 8—11, 13 pp. 6—9.

[3]) *Ibid.* §§ 12, 13, pp. 8—9.

[4]) Ср. стран. 402. Ср. въ особ. § 1 мемуара *Inventio summae c. ser. ex dato term. gen.*, l. c. pp. 9—10. Формула эта была извѣстна Эйлеру уже раньше (въ 1732 г.) какъ видно изъ мем. Methodus generalis summ. progr. цит. въ прим. 1) на стран. 403.

менно съ Эйлеромъ и, повидимому, совершенно независимо отъ него, тѣже выраженія и тѣмъ же путемъ нашелъ Маклоренъ[1]). Около ста лѣтъ спустя Коши снова пришелъ къ тѣмъ же соображеніямъ, которыя легли затѣмъ въ основаніе почти всѣхъ позднѣйшихъ общихъ изслѣдованій о сходимости рядовъ съ положительными членами[2]).

Въ первые годы своей дѣятельности Эйлеръ въ своихъ воззрѣніяхъ на безконечные ряды вполнѣ придерживался конкретныхъ понятій наиболѣе распространенныхъ въ предъидущую эпоху; сумма ряда представлялась ему прежде всего какъ аггрегатъ всѣхъ своихъ членовъ, слѣдовательно какъ нѣкоторая опредѣленная величина, которую можно изобразить геометрически, конечность и опредѣленность которой суть необходимыя условія для опредѣленности самаго ряда[3]). Изслѣдуя ряды съ этой точки зрѣнія Эйлеръ завершилъ дѣло своихъ предшественниковъ, мало того, пришелъ, вмѣстѣ съ Маклореномъ къ такимъ принципамъ и выводамъ, которые съумѣла оцѣнить только послѣдующая эпоха, представители которой не знали, что ихъ давно опередили послѣдній представитель школы великаго Ньютона и геніальный ученикъ его Базельскаго соперника и врага. Въ этомъ ихъ винить нельзя: математики второй половины XVIII вѣка, увлеченные быстрымъ поступательнымъ движеніемъ формальнаго анализа, занятые созданіемъ новыхъ могучихъ орудій математической логики, заставили за-

---

[1]) См. стр. 244—245 (ср. въ особ. *Tr. of Flux.* art. 352—353, гдѣ говорится о геометр. значеніи формулы аналит. суммов, доказ. въ art. 833 sqq.). *Eneström.* Om uptäkten af den Eulerska summationsformeln, l. c. pp. 6—7.

[2]) *Cauchy.* Excercices de Mathématiques. Paris 1827 t II. (Oeuvres compl. d'Aug L. Cauchy. 2-me série t. 7). p. 221 suiv. (O. c. p, 267 suiv.): Sur la convergence des séries. *Comptes rend.* 1851, 1-er sem., pp. 389—397: Sur la sommation des termes de rang très élové dans une série simple ou multiple. Ср. *Reiff.* Gesch. d. un. R. § 16, pp. 196 sqq.

[3]) Ср. стр- 237—240.

быть реальныя основы ея, на выработку которыхъ геометры нашего столѣтія стали смотрѣть какъ на совершенно новую задачу. Самъ Эйлеръ въ послѣдующіе годы своей дѣятельности занимался изслѣдованіями о рядахъ почти исключительно формальными.—Къ первому періоду его дѣятельности принадлежитъ еще одно небольшое изслѣдованіе представляющее для насъ нѣкоторый интересъ[1]). Въ этомъ изслѣдованіи Эйлеръ разсматриваетъ особаго рода выраженіе, «progressionem ad circuli quadraturam inveniendam indoneam»: $4\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}+\frac{1}{n}+$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{4k+1}}{(2k+1)\,2^{2k}n^{4k+2}},$$

гдѣ n произвольное цѣлое положительное число, B_{4k+1} есть $(4k+1)$-е Бернулліево число[2]).

---

[1]) См. *Comment. Ac. Sc. I. Petr.* T. XI, 1739, Petr. 1750, Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae. Auct *L. Eulero*, pp. 116—127; *Reiff.* Gesch. d. unendl. Reihen. pp. 97—101, *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 650—653.

[2]) *Consider. progr.* § 10, l. c. p. 121, *Reiff*, p. 99. *Cantor*, l. c. p. 662.—Числа B введены впервые Яковомъ Бернулли для вычисленія суммъ одинак. степеней натуральныхъ чиселъ. Въ сочиненіи *Ars conjectandi*, изданномъ по смерти Я. Б. племянникомъ его Николаемъ въ 1713 году, великій Базельскій геометръ далъ формулу: $\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{m}{2} B_1 n^{m-1} +$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.\ 4.} B_3\, n^{m-3} + \frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ (m-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} B_1\, n^{m-3} + \dots$$

(*Ars. Conject.* pp. 96—98). De Moivre предложилъ возвратную формулу для вычисленія B, получаемую изъ Бернулліевой при $n=1$ (*Miscellanea analytica*, Complem. pp. 6 sqq.). Объ исторіи Бернулліевыхъ чиселъ и вычисл. суммъ одинак. степ. натур. ч. см. *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 331—333, 624—625; ср. прим. 2) на стр. 144.—Объ отношеніи Бернулліевыхъ чиселъ къ коеффиц. Эйлеровой общей формулы суммованія см. *Inst. calc. diff.* P. II, Cap. V и мем. *De summis serierum numeros Bernoull. involv.* упом. въ прим. 3)

Эта формула, представляющая изъ себя лишь частный случай общей формулы Эйлера для выраженія интеграловъ съ помощью суммъ, можетъ служить для вычисленія интеграла $4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ [1]), или числа π съ тѣмъ большимъ приближеніемъ, чѣмъ больше число n, но при данномъ n степень приближенія возрастаетъ съ числомъ введенныхъ въ вычисленіе членовъ ряда лишь до извѣстнаго предѣла, такъ какъ члены эти, сначала убывающіе, затѣмъ, съ извѣстнаго члена, начинаютъ неопредѣленно возрастать, дѣлая, такимъ образомъ, рядъ расходящимся. Это видимое схожденіе ряда въ первыхъ его членахъ и послѣдующее расхожденіе имѣетъ мѣсто при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ n. Обративъ вниманіе на это обстоятельство, Эйлеръ указалъ на причину его, состоящую въ томъ, что послѣдовательныя Бернулліевы числа возрастаютъ

къ стран. 403; ср. также *Maclaurin.* of. fl. art. 833. О роли Бернулліевыхъ чиселъ въ выч. суммъ potestatum reciprocarum см. мем. De seriebus quibusdam considerat. упом. въ прим. 3 на стр. 403. *Inst. calc. diff.* Cap. VI P. II, art. 150–153, pp. 362–367. Ср. Эйлеровъ мемуаръ: De summis serierum reciprocarum въ *Comm. Ac. S. I. P.* t. VII, 1734 — 1735, pp. 123—134, *Cantor.* Gesch. Bd. III, pp. 633—638.

[1]) Эйлеръ замѣняетъ интегралъ $\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ суммой $s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{t}{n}}{1-\left(k\frac{t}{n}\right)^2}$ $= \sum_{k=1}^{n} \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, тѣмъ менѣе отличающейся отъ него, чѣмъ больше n. Сумма эта можетъ быть преобразована, посредств. разлож. въ безк. ряды ея членовъ, слѣд. образомъ: $s = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l+1}}{n^{2l+1}(2l+1)} \sum_{k=1}^{n} k^{2l} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l$ $\frac{t^{2l+1}}{n^{2l+1}(2l+1)}\left(\frac{n^{2l+1}}{2l+1} + \frac{n^{2l}}{2} + \frac{2l}{2} B_1 n^{2l-1} + \frac{2l(2l-1)(2l-2)}{2.\,3.\,4} B_3 n^{2l-3} + \ldots\right) =$

быстрѣе чѣмъ соотвѣтствующіе члены геометрической прогрессіи съ сколь угодно большимъ знаменателемъ[1]). Онъ открылъ, такимъ образомъ, первый *полусходящій рядъ* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{4k+1}}{2^{2k}\,n^{4k+2}}$[2]);

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l}\frac{t^{2l+1}}{2l+1} + \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l}\frac{t^{2l+1}}{n^{2l+1}}\left(\frac{n^{2l}}{2} + \frac{2l}{2}B_1 n^{2l-1} + \ldots\right) =$$

$\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l}\frac{t^{2l+1}}{n^{2l+1}}\left(\frac{n^{2l}}{2} + \frac{2l}{2}B_1 n^{2l-1} + \ldots\right)$, откуда легко уже перейти, послѣ нѣкоторыхъ передѣлокъ, къ Эйлерову результату, полагая $t = 1$; ср. *Reiff* и *Cantor* ll. c. *Consider. progr.* l. c. §§ 2—10, pp. 116—121. Въ *Inst. calc. diff.* P. II, Cap. VI, art. 154—156, pp. 367—372 Эйлеръ выводитъ туже формулу изъ общей формулы суммованія, причемъ получается еще добавочный членъ $-\frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}$ — «Etsi enim in termino ultimo inest π, tamen quia is tantopere est parvus, sufficit valorem ipsius π proxime nosse». Объ этомъ добавочномъ членѣ и причинѣ его появленія см. *Lacroix*. T. d. c. d. et. d. c. i. t. III, pp. 152, 449.

[1]) *Consid. pr.* § 11, pp. 121—122. «...si fractionum $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; etc. ea quae indicem habet ν, ponatur X atque sequens $= Y$, erit semper $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$, atque ν in infinitum crescente fiet $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$».

[2]) Коши доказалъ такое же свойство Стирлингова ряда: см. *Cauchy* Exercices d'Analyse et de Phys. math. t. II, Paris 1841, Sur la théorie des intégrales définies singulières, pp. 358 suiv.; pp. 386—398: Sur le dével. de $l\Gamma(n)$ en série conv. et sur la formule de Stirling (NB. pp. 395—398).— *Comptes Rendus des sc. de l'Ac. des. Sc.* 1843. 2-e sem. Sur un emploi légitime des séries divergentes, pp. 370—376.—Въ новѣйшее время *H. Poincaré* указалъ на необходимость болѣе широкаго пользованія полусходящимися рядами въ интегральномъ исчисленіи, главнымъ образомъ въ приложеніи къ вопросамъ небесной механики. См. мемуаръ его въ VIII томѣ *Acta Mathematica* (1886) подъ заглав.: Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, pp. 295 suiv. — Также Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. t. II, Paris 1893, Ch. VIII, Calcul formel, Divers sens du mot convergence, art. 118—122, pp. 1—14, Ср. *ibid.* Avant—Propos, p. VI. Названіе полусходящихся рядовъ принадлежитъ Лежандру; см. *Legendre.* Traite d. Fonct. ell. et des int. Eulér. t. II. Paris 1826, pp. 597—599. *Lacroix.* Traité d. c. d. et d. c. i., t. III, p. 145. См. еще нѣкот. замѣч. о полусход. рядахъ у *Даламберта*: Réflexions sur les suites div. ou conv.. art. 4—17, *Opusc. Math.*, T. V, Paris 1768, pp. 175—176.

для пользованія такого рода рядомъ необходимо знаніе его остаточнаго члена, и Эйлеръ нашелъ для него, хотя и не совсѣмъ законнымъ путемъ, приближенное выраженіе $(-1)^{\mu}$. $\frac{\pi^4 . n^4 . P}{\pi^4 n^4 + 4\mu^4}$, гдѣ μ есть число членовъ ряда actu additorum, а P—членъ слѣдующій за ними непосредственно[1]).

Безконечный рядъ слагаемыхъ можетъ быть разсматриваемъ какъ *ариѳметическое* выраженіе только тогда, когда онъ сходящійся; только въ этомъ случаѣ онъ можетъ служить для вычисленія, съ неограниченной степенью точности, нѣкотораго вполнѣ опредѣленнаго числа, раціональнаго или несоизмѣримаго. Въ противномъ случаѣ рядъ сохраняетъ только чисто *алгебрическій* смыслъ, т. е. можетъ быть разсматриваемъ лишь по отношенію къ своему алгебрическому происхожденію,—какъ результатъ разложенія нѣкоторой опредѣленной аналитической функціи, или если рядъ числовой, какъ результатъ преобразованія нѣкотораго сложнаго ариѳметическаго дѣйствія въ безконечный рядъ сложеній. Мы видѣли уже какъ Эйлеръ опредѣляетъ въ этомъ случаѣ задачу суммованія ряда[2]): по данному ряду требуется найти ту *производящую* функцію, или то выраженіе, отъ разложенія котораго онъ получился. Суммованіе числовыхъ рядовъ приводится къ суммованію

---

[1]) *Consideratio progress.* l. c. art. 12, p. 122; ср. art. 13—16, pp. 122—125, *Reiff*, l. c. p. 100, *Cantor*, l. c. p. 652. Остаточный членъ, во всякомъ случаѣ, по абсолютн. велич. меньше послѣдняго изъ членовъ actu additorum, который всегда безконечно—малъ при n безконечно большомъ. Формула Эйлера можетъ, такимъ образомъ, дѣйствительно служить для *асимптотическаго* выраженія числа π (ср. *Poincaré*. Nouv. Méth. t. I, Paris. 1892, p. 340). Опущенный Эйлеромъ въ *Consid. progr.* добав. членъ не препятствуетъ этому, будучи самъ безконеч. мал. при n безк. больш. См. еще прим. 1) къ стр. 417 (о добав. членѣ $\frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}$). Ср. *Consid. progr.* l. c. §§ 14—16, pp. 123—125. Объ остат. член. полуход. ряд. см. еще замѣчанія *Лапласа* въ Th. anal. d. prob. L. I, art. 41; *Lacroix*. l. c. въ пред. прим.

[2]) См. стр. 381—382.

алгебрическихъ, представляя числовой рядъ (1).... $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

какъ частную форму алгебрическаго (2)... $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{f_k x}{f_k a}$,

при $x = a$: сумма ряда (1) есть значеніе производящей функціи ряда (2) при $x=a$. Эта сумма зависитъ, разумѣется, отъ выбора функцій $f_k x$; задача дѣлается опредѣленной только когда выбранъ рядъ этихъ функцій, когда, напримѣръ, какъ это почти всегда предполагаетъ Эйлеръ, онѣ суть восходящія степени перемѣнной x[1]). Точно также можно опредѣлить сумму ряда (1) и въ томъ случаѣ, когда члены его a_k не суть опредѣленныя числа, а зависятъ отъ какихъ либо неопредѣленныхъ параметровъ. На основаніи Эйлеровыхъ опредѣленій

---

[1]) Тригонометр. ряды $\sum_{j=0}^{\infty} Sin(a+jb)$, $\sum_{j=0}^{\infty} Cos(a+jb)$ въ Эйлеровомъ Введеніи (см. стр. 238) разсматриваются какъ series ex divisione ortae и входятъ по этому въ классъ степенныхъ рядовъ. См. еще *Nov. Comm. Ac. Sc. T. Petr.* t. V, 1754, 1755, Petr. 1760, Subsidium calculi sinuum. Auct. *L. Eulero*, pp. 164 sqq. — болѣе сложн. тригоном. ряды происш. отъ разлож. $(u+v)^n$, $(u-v)^n$ и друг. под. формулъ гдѣ $u=Cos\varphi+iSin\varphi$, $v=Cos\varphi-iSin\varphi$. Ср. ряды $\sum_{j=1}^{\infty} Sinjx$, $\sum_{j=1}^{\infty} Cosjx$ у *Даніила Бернулли*: De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu, *Novi Comm. Ac. Sc. I. Petr.* T. XVI, 1771. Petr. 1772, pp. 85 sqq. — De indole singulari serierum infin. quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progred. formant earumque summatione et usu, *Nov. Comm.* T. XVIII, 1772. Petr. 1773, pp. 3 sqq. Эйлерова задача о сумм. рядовъ является опредѣленной только въ той постановкѣ, которую придалъ я ей въ текстѣ; такъ понималъ ее самъ Эйлеръ, такъ разъясняетъ се Лагранжъ въ отвѣтѣ на возраженія *Callet*. Ср. письма Н. Бернулли и Эйлера цит. въ прим. 1) къ стр. 382; въ дополн. къ этому прим. см. письма Эйлера къ Н. Б. Berol. 10 Nov. 1742, 14 Maii 1743, 4 Febr. 1744, 20 Apr. 1745, 17 Jul. 1745, *Op. post.* T. I, pp. 530—533, 536, 538—539, 543, 546—549. *Lacroix* Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III. p. 160 *n* (*).

легко установить алгориомъ исчисленія расходящихся строкъ, которое будетъ подобно исчисленію строкъ сходящихся и можетъ также служить для нахожденія числовыхъ законовъ и алгебрическихъ соотношеній и для преобразованія формулъ. Справедливость этихъ выводовъ не можетъ быть, однако, основана на простой аналогіи расходящихся рядовъ со сходящимися или на непосредственномъ распространеніи предложеній установленныхъ для этихъ послѣднихъ на ряды расходящіеся, что мы почти всегда замѣчаемъ у геометровъ прошлаго вѣка[1]). Только выводя правила дѣйствій надъ расходящимися рядами самостоятельно изъ ихъ опредѣленія можно быть увѣреннымъ въ строгости дѣлаемыхъ посредствомъ ихъ заключеній[2]).

Такъ, если $F_0\varphi + F_1\varphi + F_2\varphi + \ldots$ расходящійся рядъ, то разсматривая его какъ происходящій при $x = 1$ изъ другаго ряда $F_0\varphi + x.\ F_1\varphi + x^2F_2\varphi + \ldots\ldots$ производящая функція котораго есть $\Phi(\varphi, x)$, мы можемъ написать формулу.

---

[1]) Разительнымъ примѣромъ могутъ служить мемуары Д. Бернулли упоман. въ пред. прим. Также поступаетъ и самъ Эйлеръ: см. напр. *Subsid. calc. sin.* l. c. въ пред. прим. Theor., Scholion, art 53, pp. 203–204. *Inst. calc. diff.* P. II, Cap. VI, VII, passim.

[2]) Примѣромъ такихъ выводовъ, въ приложеніи къ рядамъ полусходящимся могутъ служить работы Пуанкаре упом. въ прим. 2 на стр. 418. Изложенная въ недавнее время Борелемъ особая теорія расходящ. рядовъ основана на расширеніи понятія о предѣлѣ: предѣломъ X_n при $n =$ безконечности называется $\lim\limits_{a=\infty}\left(e^{-a}\,x(a)\right)$ (въ предпол., что этотъ пред. существ.), гдѣ $x(a) = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k a^k}{k!}$, и $x_0, x_1, \ldots$ — таковы что $x(a)$ цѣлая функція отъ a; см. *Journ. d. Mathém.* t. II de la 5-e série. 1896, pp. 103 suiv.: Fondements de la théorie des séries divergentes sommables; par M. *'Emile Borel*. При извѣстн. условіяхъ Борелево опред. суммы совпадаетъ съ Эйлеровымъ: ср. l. c. pp. 114—115, Proposition fondamentale; ср. еще *Journ. d. M.* 5-e sér. t. II, pp. 441 suiv. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de converg. comme coupure; par. M. *'Em. Borel*.

$\int_0^\psi d\varphi \sum_{\kappa=0}^{\infty} F_\kappa \varphi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \int_0^\psi F_\kappa \varphi . d\varphi$, которая, однако, выражаетъ лишь то, что производящая функція ряда

$$(3) \ldots \int_0^\psi F_0\varphi . d\varphi . + x \int_0^\psi F_1\varphi , d\varphi + x^2 \int_0^\psi F_2\varphi . d\varphi + \ldots .$$

при $x = 1$ обращается въ $\int_0^\psi \Phi\ (\varphi, 1)\ d\varphi$. Это будетъ справедливо, напримѣръ, когда рядъ (3) сходится равномѣрно при всѣхъ значеніяхъ φ заключающихся между 0 и ψ (включительно) и при всѣхъ значеніяхъ x близкихъ къ 1, включая сюда и самую единицу.

Таково значеніе формулы Эйлера: $Cos\psi - Cos 2\psi + Cos 3\psi - \ldots = \frac{1}{2}$ представляющей сумму расходящагося ряда и получаемой изъ нея посредствомъ интегрированія суммы сходящагося ряда: $Sin\psi - \frac{1}{2}\ Sin\ 2\psi + \frac{1}{3}\ Sin\ 3\psi - \ldots = \frac{\psi}{2}$, — первый примѣръ представленія раціональной функціи аргумента посредствомъ тригонометрическаго ряда[1]). Примѣрами примѣненія исчисленія расходящихся рядовъ могутъ также служить данные Эйлеромъ во «Введеніи въ анализъ» и разсмотрѣнные уже нами выводы выраженій для суммъ конечнаго числа синусовъ или косинусовъ, аргументы которыхъ составляютъ ариѳметическую прогрессію[2]).

---

[1]) См. *Subsid. calc. sin.* l. c. въ прим. 1) на стр. 420. Ср. *Dan. Bernoulli.* De indole singul. etc. l. c. въ томъ же примѣчаніи. §§ 4, 7, 9, 14. pp. 6—7, 9, 11, 16—17,—*Reiff.* Gesch. d. un R., pp. 128, 131—132.

[2]) См. стр. 238; ср. прим. 1) на стр. 420; кромѣ упомянут. въ этомъ примѣч. работъ о рядахъ синус. и кос. arcuum arithmetice progredientium см. мемуаръ *Bossut* въ Mém. de l'Ac. R. d. sc. de Paris, 1769 и мемуары. помѣщ. въ 18 томѣ *Nov. Comm. Ac. Petr.* 1773, Petr. 1774: Theoria elem. seri erum ex sinibus atque cos. arc. ar. pr. diversimode compositarum diluci-

Такимъ образомъ, съ аналитической точки зрѣнія, Эйлерова теорія расходящихся рядовъ есть одинъ изъ видовъ примѣненія общаго аналитическаго пріема, который можно назвать *общимъ методомъ производящихъ функцій*: данная функція, числовая, произвольная или аналитическая—общій членъ ряда какъ функція указателя своего мѣста въ ряду—разсматривается какъ опредѣленный элементъ извѣстнаго преобразованія выполненнаго надъ нѣкоторой новой, *аналитической*, производящей функціей, отъ одной или нѣсколькихъ новыхъ перемѣнныхъ. Этотъ общій методъ, идеей котораго, по крайней мѣрѣ въ простѣйшемъ его видѣ, мы обязаны Эйлеру примѣнялся и впослѣдствіи различными математиками въ разнообразныхъ формахъ: сюда принадлежатъ различные методы употреблявшіеся самимъ Эйлеромъ и другими, позднѣйшими математиками для отысканія числовыхъ законовъ[1]), Абелева теорія произво-

data. Auct. *Daniele Bernoulli*, pp. 3—23. — Summatio progressionum $Sin.^{\lambda}\,\varphi + Sin.^{\lambda}\,2\varphi + Sin.^{\lambda}\,3\varphi + \ldots\ldots + Sin^{\lambda}\,n\varphi$, $Cos.^{\lambda}\,\varphi + Cos.^{\lambda}\,2\varphi + Cos.^{\lambda}\,3\varphi + \ldots\ldots + Cos.^{\lambda}\,n\varphi$. Auct *L. Eulero*, pp. 24—36. — Observationes variae circa series ex sin. vel cos. a. a. p. formatas. Auctore *And. Joh. Lexell*, pp. 37—70 (Главн. результ. см. въ *Summar.*. pp. 5—13). Ср. *Lacroix*. Traité d. c. d. et d. c. i. t. III, art. 1014, 1015, pp. 158—163.

[1]) Ср. стр. 287, прим. 2) и прим. 1) на стр. 314. Въ новѣйшее время (съ 1856 г.) *Cayley*, *Sylvester* и другіе, въ особ. америк. математики пользовались Эйлеровымъ методомъ для счета и дѣйствит. образованія инваріантовъ и коваріантовъ въ теоріи алгебр. формъ; ср. *F. Meyer*. Bericht über die Fortschritte d. projectiv. Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert, *Jahresbericht d. Deutsch. Mathematiker—Vereiningung* I Bd. 1890—91. Berl. 1892. Также во франц. переводѣ *W.—Fr. Meyer*. Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Trad. et annoté par. *H. Fehr*. Paris 1897, pp. 10, 71—75. Наиболѣе замѣчательныя роботы по примѣненію теоріи безк. рядовъ къ открытію числов. законовъ въ направл. намѣченномъ Эйлеромъ принадлежатъ *Г. П. Лежёнъ Дирихле*; См. Untersuchungen üb. verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie von G. Lejeune-Dirichlet (1839—1840). Deutsch herausgegeben v. *K. Haussner*, Lpzg. 1897 (Ostwald's Klassiker Nr. 91); ср. Anmerkungen, pp. 111—

дящихъ функцій, въ которой производящая функція φ связана съ данной f уравненіемъ $\varphi(x,y,z,\ldots)=\int\int\int\ldots e^{xu+yv+zp+\ldots} f(u,v,p\ldots)\,du\,dv\,dp\ldots$[1]), теорія вычетовъ Коши, гдѣ $f=\mathbf{R}((\varphi x))\ldots$,[2]) Само дифференціальное исчисленіе, съ точки зрѣнія Лагранжа, принадлежитъ къ тому же ряду аналитическихъ методовъ. Названіе *производящихъ* функцій было формально введено *Лапласомъ*[3]), теорія котораго основана на нѣкоторомъ видоизмѣненіи Эйлеровой идеи въ приложеніи ея къ степеннымъ рядамъ. Лапласъ называетъ производящей функціей данной $f(x_1, x_2,\ldots x_n)$ такую функцію перемѣнныхъ t_1, t_2, $t_3,\ldots t_n$, въ разложеніи которой по цѣлымъ входящимъ степенямъ этихъ перемѣнныхъ данная функція служитъ коэффиціен-

---

116. — Упомян. на стр. 286 изслѣд. *Риманна* о законѣ прост. чиселъ представл. также примѣръ приложенія метода произв. функцій. Прилож. произв. функцій въ вычисленію числа сочетаній и вѣроятностей см. въ трактатѣ Лапласа о вѣроятн. цит. въ прим. 2) на стр. 287.

[1]) Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes—посмертн. мемуаръ: Oeuvres complètes de *Niels Henrik Abel*, T. II, Nouv. éd. Christiania 1881, pp. 66 81.

[2]) См. мемуаръ *Cauchy*: Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal въ *Exercices de Mathém.*, t. I, Paris 1826, pp 11 suiv. и другіе мемуары о томъ же предметѣ, помѣщ. главн. обр. въ тт. I, II, IV того же сборника, также мемуаръ: Théorie nouvelle des résidus fondée sur la consid. des intégr. prises entre des lim. imag. et sur celle des fonct. monodromes et monogènes. *C. Rend.* 1857, 1-er sem. pp. 406 suiv.—О связи существ. между теор. вычетовъ и формулами Фурье см. въ Mémoire sur l'application du calc. d. résidus à la solut. d. probl. de physique mathématique p. M. *A. L. Cauchy*, Paris 1827. — Къ тому же роду аналит. методовъ принадлежитъ Calcul de généralisation par *Gabriel Oltramare*. Genève 1893 (autogr.); ср. предисловіе *Лэзана*, pp. 3—6.

[3]) Ср. прим. 2) на стр. 287. — *Pierre Simon*, *Marquis de Laplace* род. въ 1749 г., ум. въ 1827 г. См. біографію Лапласа въ Biographie univer. (Michaud) anc. et mod. Nouv. éd. T. XXIII, pp. 229—289 (Parisot, revu par Alfr. Maury) также у *Marie*. Hist. d. sc. m. t. X, pp. 68 suiv. Полное собраніе сочиненій его издается съ 1878 г., Парижск. Академіей наукъ въ 13 томахъ: 1—5 томы — Небесная Механика, 6 - Изложеніе Системы Міра, 7—Теорія Вѣроятн., 8—13 (вышли 8—12 томы) - мемуары.

томъ при $t_1^{x_1}. t_2^{x_2}. t_2^{x_3} \dots t_n^{x_n}$[1]). Онъ подробно развилъ алгориѳмъ придуманнаго имъ исчисленія главнымъ образомъ въ приложеніи къ разностному исчисленію и соприкасающимися съ нимъ задачамъ теоріи рядовъ, для случаевъ одной и двухъ перемѣнныхъ въ мемуарѣ «Sur le suites» представленномъ Парижской Академіи Наукъ въ 1779 году,[2]) а затѣмъ въ первой части своего знаменитаго трактата о вѣроятностяхъ: «Théorie analytique des probabilités», напечатаннаго въ 1812 году[3]). Я не стану излагать здѣсь всѣхъ выводовъ великаго

---

[1]) Mémoire sur les suites. *Hist. et mém de l'Ac. d. Sc.* 1779, Paris, 1782, pp. 211—212, 253—254, 309.—Théorie anal. d. probab. 3-e éd. *O. compl.*, t. VII, L. I, art. 2, 12, 67, pp. 7, 49, 67.

[2]) См. l. c. въ пред. прим. pp. 207—309. Этотъ мемуаръ, снабженъ замѣчаніями, хорошо выясняющими историческое его положеніе и краткимъ введеніемъ (pp. 207—211) содержащимъ превосходное изложеніе сущности и значенія всѣхъ главныхъ результатовъ работы. Важнѣйшіе изъ нихъ связаны съ распространеніемъ теоріи возвратн. рядовъ на случай двухъ перем. (séries récurrorécurrentes) и съ особымъ методомъ преобраз. линейн. дифф. и разностн.—уравненій посредств. опредѣленныхъ интеграловъ. Теорія возвратно—возвр. рядовъ изложена впервые Лапласомъ въ мемуарѣ Sur les suites r.—r. et leurs usages dans la théorie des hasards (*Mém. pr. p. div. s. &c.* t. VI, 1774. *Oeuvres. de Laplace*, t. VIII, pp. 5—24); см. также Recherches sur l'intégration des éq. différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie d. hasards. *Mém. pr. par div. s. &c.* t. VII, 1773, Paris, 1776 *Oeuvres compl. de Laplace*, t. VIII, pp. 69—197; мем. *Лагранжа* въ *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berl.*, 1775: Recherches sur les suites recurrentes (Ср. *Mém. s. les suites* l. c. p. 203). Первыя работы Лапласа по интегр. дифф. и разностн. уравненій наход. въ мемуарѣ: Recherches sur le calcul intégral aux différences inf. petites, & aux diff. finies. *Miscell. Taurin.* T. IV, 1766—1769, pp. 173 (lisez 273)—345. О Лапласовомъ преобразов., его теоріи и развитіи его въ нов. время см. *L. Schlesinger.* Handbuch d. Theorie des linearen Differentialgleichungen. Bd. I, Lpzg. 1895, pp. XVIII—XIX, 396—426, Bd. II, 1 Lpzg. 1897, pp. 405—407.

[3]) Первое изданіе этого трактата появилось въ 1812 году; 3-ье и послѣднее при жизни Лапласа—въ 1820 году. Въ VII томѣ полнаго собранія соч. Лапласа воспроизведено это послѣднее изданіе съ новымъ интереснымъ добавленіемъ (4-e suppl. pp. 617—645) о производ. функціяхъ и ихъ прилож. къ теор. вѣр., сдѣланнымъ Лапласомъ въ 1825 году. Объ этомъ замѣчательномъ сочиненіи, а равно и о другихъ трудахъ Лапласа, поскольку они относятся къ теоріи вѣроятностей, см. въ особ. въ книгѣ:

геометра и ограничусь только однимъ замѣчаніемъ о самомъ Лапласовомъ опредѣленіи производящей функціи. Въ силу этого опредѣленія, для случая одной перемѣнной, производящая функція Ft отъ данной fx связана съ этой послѣдней уравненіемъ: $\frac{|^{t=0} D^x Ft}{\Gamma(x+1)}=fx$, обнаруживающимъ связь, существующую между теоріей Лапласа и теоріей производныхъ съ какими угодно индексами, а слѣдовательно и съ теоріей опредѣ-

---

A history of the Mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. By *I. Todhunter*. Camb. & Lond. 1865, pp. 464—613. Первая книга Ан. Т. В.: «Calcul des fonctions génératrices» (pp. 1—180) содержитъ изложеніе аналитическихъ методовъ лежащихъ въ основаніи Лапласова исчисленія вѣроятностей; обзоръ этихъ методовъ и общія разсужденія объ нихъ см. въ Introduction (Essai philosophique sur les Probabilités), pp. XXI—XLII: *Les méthodes analytiques du Calcul des probabilités*. Въ эту первую книгу вошли съ новыми дополненіями изслѣдованія, изложенныя раньше въ Mémoire sur les suites (Première partie, pp. 1—88 перв. кн. Теор. Вѣроятн.) и Mémoire sur le calcul approché des formules qui sont fonctions de très grands Nombres (1782) (Seconde partie, pp. 89—180). Излож. этихъ изслѣд. можно найти также у *Lacroix*. Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III, art. 1109—1139, pp. 322—373, art. 1218 suiv. pp. 502 suiv., art. 1251—1255, pp. 567—574. — Самое исчисл. производящ. функцій состоитъ главнымъ образомъ въ приложеніи тѣхъ соотношеній, которыя существуютъ между производящими данныхъ функцій и другихъ образованныхъ изъ нихъ сложныхъ функцій. Такъ. если произв. данной функціи y_x есть u, то произв. ея разности $\overset{i}{\triangle} y_x$ есть $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ (p. 8), производящ. $\sum_{k=0}^{n} a_x\, y_{x+k}=\nabla y_x$ есть $u\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t^k}$ (*ibid*), производ. $\overset{i}{\triangle}\overset{s}{\nabla} y_{x+r}=\frac{u}{t^r}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t^k}\right)^s\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ (*ibid.*) и т. п. — Вообще произведеніе двухъ рядовъ uv есть произв. функція нѣкоторой новой функціи δy_x; произведеніе uv^n есть слѣдовательно производящая функцій $\overset{n}{\delta} y_x$; это послѣднее замѣчаніе служитъ основаніемъ новыхъ интересныхъ выводовъ составляющихъ предметъ IV дополненія: «Теоріи вѣроятн.».

ленныхъ интеграловъ и вычетовъ[1]). Самъ Лапласъ даетъ слѣдующую формулу, которую нетрудно вывести и значеніе которой легко усмотрѣть: $fx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) . e^{-x\varphi\sqrt{-1}} d\varphi.$—[2]).

Для полной опредѣленности Эйлеровой задачи о суммованіи безконечнаго ряда необходимо быть увѣреннымъ въ томъ, что данному разложенію соотвѣтствуетъ одна только произво-

---

[1]) Ср. прим. 2 на стр. 424.

[2]) *Théorie analyt. d. prob.* L. I, Considérations générales sur les fonct. génér., art. 21, pp. 83—84; Лапласъ показываетъ далѣе (pp. 84—85) какъ, по уравненію $\sum_{k=0}^{n} a_n y_{x+k} + x\sum_{k=0}^{n} a'_k y_{x+k} = 0$ можно опредѣлить, въ формулѣ $y_x = \int t^{x-1} T. dt$ функцію T отъ t и предѣлы интеграціи: T дается дифф. у-іемъ $t\frac{d}{dt}\left[T\sum_{k=0}^{n}\frac{a'_k}{t^k}\right] + T\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t^k} = 0$, а предѣлы интеграціи соотв $t = \infty$ и n корнямъ уравненія $\sum_{k=0}^{n}\frac{a'_k}{t^k} = 0$; сумма произведеній интегр. взят. между однимъ изъ этихъ предѣловъ и остальными на произвольн. постоянныя и представл. собою полную величину y_x «On voit, par ce qui précède», замѣчаетъ онъ, l'analogie qui existe entre les fonctions génératrices des variables et les intégrales définies au moyen desquelles ces variables peuvent être exprimées». Чтобы еще лучше выяснить эту аналогію, онъ находитъ (pp. 85—86) посредствомъ дифференц. подъ знакомъ формулы $y_x = \int T dt\ t^{-x}$, конечныя разности и дифференціалы различн. порядковъ функц. y_x —: $\Delta^i y_x = \int T dt\ t^{-x}\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right)^i$, гдѣ α измѣненіе x; полагая его безконечно мал $= dx$ мы найдемъ $\frac{1}{t^\alpha} = 1 + dx \log\frac{1}{t}$, и слѣд. $\frac{d^i y_x}{dx^i} = \int T dt\ t^{-x}\left(\log\frac{1}{t}\right)^i$, Ср. стр. 401.

дящая функція, для чего нужно прежде всего имѣть принципъ отождествленія и различенія аналитическихъ функцій. Такой принципъ, неизвѣстный еще Эйлеру и его современникамъ, найденъ лишь въ наше время и составляетъ одно изъ величайшихъ открытій современной теоріи функцій. Это—начало моногенности, впервые ясно и прочно установленные въ знаменитомъ Вейерштрассовомъ мемуарѣ «Zur Functionenlehre» о которомъ я говорилъ въ Предисловіи[1]). Вейерштрассъ вмѣстѣ съ тѣмъ показалъ, что одинъ и тотъ же рядъ, для различныхъ значеній перемѣнной, можетъ служить разложеніемъ совершенно различныхъ моногенныхъ функцій[2]). Опредѣленіе Эйлера можетъ быть, слѣдовательно, примѣнено непосредственно, безъ всякихъ оговорокъ, лишь къ рядамъ особаго рода, къ которому принадлежатъ, какъ простѣйшіе, степенные ряды; эти послѣдніе Эйлеръ и имѣлъ главнымъ образомъ въ виду въ своихъ разсужденіяхъ [3]).

Хотя начало моногенности и было неизвѣстно Эйлеру, однако ему именно принадлежитъ введеніе понятія, служащаго главнымъ основаніемъ этому началу.

При нахожденіи производящей функціи даннаго степеннаго ряда могутъ иногда представиться непреодолимыя затрудненія: эта функція и по самой природѣ своей можетъ быть невыразима помощью символовъ обыкновенной алгебры и даже трансцендентнаго анализа и, во всякомъ случаѣ, нахожденіе этого выраженія или пользованіе имъ можетъ быть очень труднымъ; тода рядъ является *единственнымъ доступнымъ* выраженіемъ производящей функціи. Для *ариѳметическаго* вычисленія соотвѣтственныхъ значеній функціи рядъ можетъ служить лишь при тѣхъ значеніяхъ перемѣнной, при которыхъ онъ

---

[1]) См. стр. 2 и слѣд.

[2]) См. стр. 5—9.

[3]) См. стр. 420. *Inst. calc. diff.* P. II, Cap. I, art. 2, p. 227.

сходится. Его, однако, можно, располагая разложеніе по степенямъ нѣкоторой, соотвѣтственнымъ образомъ выбранной, функціи данной перемѣнной, замѣнить другимъ эквивалентнымъ ему рядомъ, имѣющимъ суммы соотвѣтственно равныя суммамъ даннаго для тѣхъ значеній перемѣнной, для которыхъ они оба сходятся; новый рядъ можетъ быть сходящимся и при значеніяхъ перемѣнной, при которыхъ данный расходится и, такимъ образомъ, замѣнять его въ этихъ случаясь для вычисленія соотвѣтственныхъ значеній производящей функціи. Такъ возникаетъ задача о *преобразованіи рядовъ*; эта задача была извѣстна уже предшественникамъ Эйлера, которые на рѣшеніе ея смотрѣли, главнымъ образомъ, какъ на средство *ускорить* сходимость ряда [1]. У Эйлера рѣшеніе это служитъ средствомъ для ариѳметическаго суммованія расходящихся рядовъ, или *расширенія области сходимости даннаго ряда*; это есть, слѣдовательно, въ существѣ дѣла, то что въ наше время извѣстно подъ названіемъ задачи объ аналитическомъ *продолженіи* функціи изображенной даннымъ рядомъ [2].

Эйлеръ полагаетъ въ рядѣ $s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + \&c.$, $x = \frac{y}{1+y}$ и, разлагая результатъ постановки по степенямъ y вводитъ снова перемѣнную x; такимъ образомъ получается преобразованный рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ $\frac{x}{1-x}$: $s = a_0 + a_1 \frac{x}{1-x} + (a_2 - a_1) \frac{x^2}{(1-x)^2} + (a_3 - 2a_2 + a_1)$.

---

[1]) Ср. *Stirling.* Meth. diff. p. 17, De seriebus quae celerius convergunt; см. *ibid.* pp. 20 sqq. Даламбертъ, съ цѣлью ускор. сходим. степен. ряда, употребл. простѣйшее преобраз.: $x = k - x'$; ср. l. c. въ прим. 2) на стр. 418. art. 27—29, pp. 179—180.

[2]) О превращеніи расходящихся рядовъ въ сходящіеся говорилъ еще Гольдбахъ: см. его мемуаръ De transformatione serierum, въ *Comm. Ac. Sc. Imp. Petr.* t. II 1727. Petr. 1729 (pp. 30—34), въ концѣ, p. 34; ср. письмо Гольдбаха къ Эйлеру (St. Petersb. 25 Sept. 1745), *Corr. m. & ph.* t. I, pp. 330—331.

$\frac{x^3}{(1-x)^3}+\&c.$, или $s=a_0+a_1\frac{x}{1-x}+\Delta a\frac{x^2}{(1-x)^2}+\Delta^2 a\frac{x^3}{(1-x)^3}+\&c.$ [1]). Точно также рядъ $s=a_0+a_1x-a_2x^2+\&c.$ превращается въ $a_0+a_1\frac{x}{1+x}-\Delta a\frac{x^2}{(1+x)^2}+\Delta^2 a\frac{x^3}{(1+x)^3}-\&c.$, гдѣ $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a_3 \ldots$ суть послѣдовательныя разности коеффиціентовъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ [2]). Когда коеффиціенты эти таковы, что, начиная съ разности извѣстнаго порядка, всѣ слѣдующія разности исчезаютъ, то преобразованный рядъ обращается въ конечный и даетъ раціональную производящую функцію даннаго.

Такимъ образомъ Эйлеръ находитъ, напримѣръ, что $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^2=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$, и что сумма расходящагося ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{8}=0$ [3]).

---

[1]) *Instit. calc. diff.* P. II, Cap. I, De Transformatione serierum (art 1—18, pp. 227—243), art. 2—4, pp. 228—230; тотъ же методъ прилагается къ вычис. суммы конечнаго числа членовъ: art. 5, pp. 230—231.

[2]) *Ibid.* art. 7—8, pp. 232—233; о значеніи случаевъ когда $x=1$ въ знакопост. и знакоперем. рядѣ см. art. 7 sub fin. in. art. 8 sub fin. pp. 231—232, 232—233 resp. Выводъ форм. Эйл. *съ остат. членами* и подробн.. разборъ ихъ см. въ мем. *Poncelet*: Application de la méth. d. moyennes à la transfom. etc. d. séries, *Crelles Journ.* t. XIII, 1835, pp. 1 — 54. — Интересныя соображенія объ Эйлеровомъ преобразованіи рядовъ и о значеніи его въ теоріи аналит. функцій можно найти въ замѣткѣ: «Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor», par M. *Ernst Lindelöf, Comptes rend.* 1898, 1-er sem. (T. CXXVI), pp. 632—634. Какъ замѣчаетъ авторъ этой замѣтки, преобраз. Эйлера можетъ привести къ расширенію области (веществ.) сходимости ряда лишь въ томъ случаѣ, когда производящ. функція не имѣетъ особ. точекъ влѣво отъ прямой: вещ. часть $x = 1/2$, предполагая радіусъ сход. первоначальнаго ряда $=1$.

[3]) *Instit. calc. diff.* P. II, Cap. I, art. 9—11, pp. 233—238. Если преобразованный рядъ безконеченъ, то, при законоперемѣнности первонач. ряда, онъ во всякомъ случаѣ сходится быстрѣе этого послѣдняго (art. 8, pp. 232—233) и можетъ служить для болѣе приближ. вычисл. его суммы. Расходящійся рядъ можетъ быть преобразованъ въ другой, по крайней

Первая глава второй части «Основаній Дифференціальнаго Исчисленія», сверхъ указаннаго рѣшенія, содержитъ еще изложеніе нѣкоторыхъ другихъ способовъ преобразованія рядовъ, а именно посредствомъ разложенія даннаго ряда по восходящимъ степенямъ ирраціональныхъ и трансцедентныхъ функцій перемѣнной [1]. Разностное исчисленіе, служащее для преобразованія рядовъ, можетъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, служить и для нахожденія суммы ряда, когда извѣстна сумма другаго, простѣйшаго ряда. Во второй главѣ второй части «Дифференціальнаго Исчисленія»,—«De Investigatione Serierum Summa-

---

мѣрѣ полусходящійся, (что будетъ въ томъ случаѣ когда радіусъ сходим. предлож. строки = 0) и, въ такомъ случаѣ, вторичное примѣненіе преобразованія къ расходящейся его части, а затѣмъ послѣдов. примѣн. тогоже процесса можетъ послужить для вычисл. суммы первонач. ряда съ достаточно большой стенью приближенія. Эйлеръ преобр. такимъ путемъ гипергеометр. рядъ 1—2+6—24+120—720+5040—&c. (pp. 235—236).—Суммы такихъ существенно расходящихся рядовъ могутъ быть вычисляемы также путемъ преобразованія ихъ въ непрерывныя дроби; см. мемуаръ Эйлера: De transformatione seriei divergentis $1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+\ldots$ in fractionem continuam. *Nova Acta Ac. Sc. I. Petr.* t. II, 1784, pp. 36 sqq., ср. прим. 3 на стр. 284; письмо Эйлера къ Гольдбаху Berl. 7 Aug. 1845 (цит. въ прим. 1 на стр. 382). *Corresp. math. et ph.* t. I, pp. 324—326 (ср. письмо Г. къ Эйл. S. Pet. 25 Sept. 1745 l. c. pp. 330—331; Э. къ Г. Berl. 23 Oct. 1745, pp. 333—334. *De seriebus divergentibus*. Auct. *L. Eulero. Novi Comm. Ac. Sc. I. Petr.* t. V, 1754—1755, Petr. 1760, §§ 21—29, pp. 224—237; *Lacroix*. Tr. d. c. d. et d. c. i. t. III, art. 150 (*note*), pp. 391—392. Ср. еще интересн. мем. *Henri Padé*. Sur les séries entières converg. et les fractions contin. rationn. *Acta Math.* t. XVIII, 1894, pp. 97—111.

[1]) *Instit. calc. diff.* P. II, Cap. I, art. 12, 13, pp. 238—239 подст. $x=y(1-y)$; art. 14—17, pp. 239—242 : $x=y(1+ny)^{\nu}$; art. 18, pp. 242—243: $x=e^{ny}y$. — Другой методъ преобр. рядовъ см. у Лапласа *Th. d. probabil.* L. I, art. 9: *De la transformation des suites* (*O. C. de Laplace*, t. VII, pp. 35—37. *Ibid.* L. I, Sec. part. ch. I, art. 22, pp. 87—92 (или Mém. sur les formules qui sont f. d. tr. gr. n. *Mém. de l'Ac. de Paris*, 1782 P. 1785, pp. 6—9) замѣчательное преобразованіе Бернулліева ряда (ср. стр. 192, прим. 4); ср. *Kramp* въ *Hindenburg's Archiv*, Heft. 10. S. 223. См. еще Эйлеровъ мемуаръ: Consideratio quarundam serierum, quae singul. propr. sunt praeditae, *Nov. Comm.* t. III, 1750—1751, Petr. 1753, pp. 86—108. Ср. статью «Umformung d. Reihen» въ матем. словарѣ *Klügel-Mollw.-Grun.* Erst. Abth., V Thl., I Bd. (Lpzg. 1831), pp. 347—382.

bilium,» — Эйлеръ даетъ формулу для опредѣленія суммы

$$(\mathrm{A})\ldots Z = Aa_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, a_k\, x^k \text{ по суммѣ } S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \ldots (\mathrm{B})$$ [1]).

Для нахожденія этой формулы онъ предполагаетъ

$$(\Gamma)\ldots Z = a_0 S + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{d^k S}{dx^k},$$ сравнивая это разложеніе съ разложеніемъ (A) отыскиваетъ коеффиціенты $a_0, a_1, \ldots$ и получаетъ такимъ образомъ искомое выраженіе для Z —: $Z = AS + \frac{\Delta A.\,x\,dS}{1.\,dx} + \frac{\Delta^2 A.x^2 d^2 S}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta^3 A.\,x^3 d^3 S}{1.2.3.dx^3} + \&c.$

Эта формула даетъ рѣшеніе предложенной задачи, «siquidem cognita fuerit summa S..., atque A,.. constituant seriem, quae ad differentias constantes deducitur»[2]). Въ другихъ случаяхъ «summa seriei Z per novam seriem infinitam exprimetur, quae interdum magis converget quam proposita; sique ista series in aliam sibi aequalem transformabitur» [3]).

---

[1]) *Instit. calc. diff.* P. II, Cap. II (art. 19—43, pp. 244—266); см. art. 26, pp. 249—250; въ art. 24—25, pp. 247—249, разсматр. предварительно частн. случай, когда числа A составляютъ геометр. прогрессію.

[2]) *Ibid.* art. 26 sub. init. Эйлеръ находитъ такимъ путемъ сумму ряда $2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \&c. = e^x (1+x)(2+x)$ (art. 27, pp. 250—251) и замѣчаетъ далѣе, что «Quae hactenus sunt tradita non solum ad series in infinitum excurrentes spectant, sed etiam ad summas quotcunque terminorum» (art. 28, pp. 251—252).

[3]) *Ibid.* art. 29—31, pp. 252—256: Эйлеръ иллюстрируетъ это примѣр.: $Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^x}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot x^k$, и слѣд. $S = \frac{1}{1-x}$; $Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}. x^{k-1}}{k(1-x)^k}$ (art. 29); $Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2k+1} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2.4x^2}{3.5(1+x)^3} + \&c$, полагая

Для преобразованія строки (Г) въ строку расположенную по восходящимъ степенямъ x, Эйлеръ прибѣгаетъ къ почленному дифференцированію строки (В)[1]. Такое дифференцированіе рядовъ, суммы которыхъ извѣстны, служитъ ему, въ той же главѣ, и само по себѣ, средствомъ для суммованія новыхъ рядовъ.

Всѣ дѣйствія надъ рядами производятся при этомъ, согласно съ обычаемъ математиковъ того времени, безъ всякаго вниманія къ вопросу объ ихъ сходимости[2]).

$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ (art. 30); въ art. 31 тотъ же рядъ сравнивается съ рядомъ $S = \frac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \&c = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x)$; для A, A_1, ... получ. знач. $\frac{0}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$ и $Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3.5(1+x)^2} - \frac{2.4x^3}{3.5.7(1+x)^3} - \&c.$

¹) *Inst. calc. diff.* P. I, Cap. II, art. 26, p. 249, ср. art. 25, p. 248.

²) *Ibid.* art. 19—23, pp. 244—247, — ряды распол. во восх. степ. x, art. 32—43, pp. 256—266 — ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(a_k + b_k x)^n}$. — Ср. прим. 3) къ стр. 279 (стр. 280). Интересные примѣры приложенія почленнаго дифференц. и интегрированія къ суммованію рядовъ можно найти еще въ Эйлеровыхъ мемуарахъ: Exercitationes analyticae, *Nov. Comm.* t. XVII, 1772. Petr. 1773, pp. 173, sqq.; Varia artificia in senierum indolem inquirendi, *Opusc. Anal.* T. 1, Petr. 1783, pp. 48 sqq.; De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summandis; *Opusc. Anal.* T. II. Petr. 1785, pp. 257 sqq.; De seriebus memorabilibus quibus sinus et cosinus angul. multiplorum exprimere licet. *Mémoires de l'Ac. I. d. Sc. d. St. P.* T. V, 1812, S. Pt. 1815 (Conv. exh. 13 Mart. 1780), pp. 57 sqq. (въ прилож. къ триг. рядамъ). — Идея систематическаго приложенія этого пріема къ суммованію рядовъ находится еще у Стирлинга: *Meth. diff.*, Summatio ser. Prop. XV: Invenire Aequationem sive Algebraica sive Fluxionalis sit, cujus Radix erit Serics quaecunque data quae definitur Aequatione in qua Termini Seriei sunt unius tantum dimensionis (степенн. ряды), pp. 75—84. См. также въ переискѣ Лейбница и Ивана Бернулли (*Leibn.* Math. Schr. hrsg. v. *Gerhardt.* Erst. Abth. Bd. III) письма Л. къ Б. Hanov. $^6/_{16}$ Nov. 1696, p. 336, Han. 9 Dec. 1696, pp. 336—337, Б. къ Л. — Groningae 1 Dec. 1696, pp. 341—322.

Мы перейдемъ теперь къ разбору третьей части Эйлеровой системы анализа — къ «Основаніямъ Интегральнаго Исчисленія [1]). Я не стану передавать подробно содержаніе этого трактата, который сталъ классическимъ; я скажу лишь объ общемъ его планѣ и обращу вниманіе на тѣ особенности, которыя характеризуютъ его по отношенію къ занимающей насъ исторіи основныхъ началъ теоріи функцій. Эйлеръ раздѣляетъ свое сочиненіе на двѣ книги: въ первой онъ излагаетъ «methodum investigandi functiones unius variabilis ex data quadam relatione differentialium»,—вторая посвящена функціямъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ [2]). Первая книга раздѣляется на двѣ части, изъ которыхъ первая разсматриваетъ дифференціальныя уравненія перваго порядка [3]), вторая—уравненія выс-

---

[1]) *Institutiones calculi integralis* Editio tertia tt. I—IV, Petrop.: 1824—1827—1845; ср. стр. 260, прим. 2) — См. интересный фактъ, относящійся къ этому сочиненію въ послѣднемъ письмѣ Эйлера къ Гольдбаху, Berlin d. 17, December 1763, *Corresp. m. & ph.* t. I, p. 671; — также письма Э. къ Лагранжу St. Pt. $^{7}/_{18}$ févr. 1768, $^{16}/_{27}$ janv. 1770. *O. de Lagr.* t. XIV, pp. 213—214; переписку Даламберта и Лагр. 1769—1771 passim, *O de Lagr.* t. XIII. — О различныхъ трактатахъ по интегральному исчисленію появившихся въ прошломъ столѣтіи см. у *Montucla.* Hist. d. math. t III, P. V, L. I, XIV, pp. 134—138; также въ Клюгелевомъ матем. словарѣ I Abth. II Th. pp. 755—782: Geschichte der Integralrechnung. Особенно интересенъ трактатъ Бугэнвилля, въ которомъ излагаются многія замѣчательныя изслѣдованія Даламберта: Traité du Calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des Infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital; par. M. *De Bougainville*, le jeune. A Paris 1754, 1756 (2 тома); ср. Préface (историч. введеніе и перечисл. главн. источн.) и рецензію *Николя* и *Даламберта* предст. П. Акад. 17 Янв. 1753 г. (pp. V—XXII, t. I).

[2]) *Calculi integralis Liber prior* занимаетъ два первыхъ тома: *Liber posterior*—томъ третій, который заканчивается приложеніемъ: *Appendix de Calculo variationum*, и добавленіемъ: *Supplementum continens evolutionem casuum singularium circa integrationem aequat. differentialium*, на которое мнѣ придется еще ссылаться. Четвертый томъ содержитъ въ себѣ XI *Supplementa* къ различнымъ отдѣламъ Инт. Исч., заимствованныхъ изъ различныхъ мемуаровъ Эйлера, неизданныхъ, или уже напечатанныхъ въ Комментаріяхъ и Актахъ Петербургской Академіи.

[3]) *Inst. c. int.* t. I. Supplem. I—VIII, t. IV, pp. 3—524.

шихъ порядковъ [1]). Первая часть раздѣляется, въ свою очередь, на два отдѣла, изъ коихъ первый занимается интерированіемъ дифференціальныхъ формулъ [2]).

Хотя, какъ мы уже видѣли, Эйлеръ смотритъ на интегральное исчисленіе какъ на особый случай исчисленія конечныхъ суммъ [3]), однако понятіе объ интегралѣ даннаго дифференціала, какъ о суммѣ его значеній онъ считаетъ мало удобнымъ и не достаточно строгимъ и, сохраняя Лейбницево обозначеніе, разсматриваетъ формулу $\int X.dx$ только какъ функцію, коей дифференціалъ есть Xdx [4]). Опираясь на такомъ опредѣленіи, обратный анализъ безконечно-малыхъ выигриваетъ въ простотѣ и цѣльности своихъ основныхъ положеній; съ другой стороны совершенно закрывается путь къ развитію геометрической теоріи интеграловъ и изображаемыхъ ими функцій; между тѣмъ, эта именно теорія послужила впослѣдствіи главнымъ основаніемъ новаго ученія о функціяхъ. Принятое Эйлеромъ опредѣленіе интеграла вызвано стремленіемъ къ формальному объединенію математическаго анализа, столь характернымъ для разсматриваемой эпохи; чисто формальная точка зрѣнія Эйлера и его современниковъ съузила однако ихъ математическій кругозоръ и послужила задерживающимъ началомъ въ исторіи новѣйшей математики. Въ этомъ смыслѣ Эйлеръ сдѣлалъ шагъ назадъ по отношенію къ эпохѣ Лейбница и широкимъ идеямъ

---

[1]) *Inst. calc. int.* t. II, *Supplem.* IX, X, t. IV, pp. 525–589.

[2]) *Ibid.* L. I, P. I, Sectio prima, de Integratione Formularum differentialium, Cap. I—IX, t. I, pp. 19—250. Въ началѣ сочиненія помѣщены общія опредѣленія и замѣчанія: *Praenotanda. De calculo integrali in genere*, pp. 1—15; на стр. 16: Conspectus universi operis de c. i. Изложеніе «Интегральнаго Исчисленія», обладаетъ, въ отличіе отъ изложеній «Введенія» и «Дифф. Исчисленія», одной замѣчательной особенностью: оно изложено въ строго классической формѣ, съ соблюденіемъ всѣхъ техническихъ подробностей выработанныхъ древними геометрами правилъ.

[3]) См. стр. 385.

[4]) *Inst. calc. integr.* Praenot. Defin. 2, p. 3, Scholion 1, p. 4.

великаго Ганноверскаго геометра[1]). Съ другой стороны Эйлеру принадлежитъ та заслуга, что онъ съ особою силою выставилъ впередъ идею Лейбница объ интегральномъ исчисленіи какъ источникѣ трансцендентныхъ функцій [2]).

Въ интегральномъ исчисленіи открывается двоякій источникъ происхожденія новыхъ безчисленныхъ функцій: первый изъ нихъ — интегрированіе алгебрическихъ дифференціальныхъ выраженій или вообще, алгебрически—дифференціальныхъ уравненій; второй — опредѣленные интегралы, въ которыхъ интегрированіе производится по нѣкоторому параметру. Эйлера можно назвать творцомъ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ; но и въ развитіи теоріи транцедентныхъ функцій перваго рода ему принадлежитъ выдающаяся роль [3]).

Изслѣдованіе интеграловъ алгебрическихъ дифференціальныхъ выраженій, именно выраженій содержащихъ квадратные радикалы изъ полиномовъ третьей и четвертой степени относительно перемѣнной, было первоначально связано съ рѣшеніемъ геометрическихъ задачъ. Съ одной стороны, рѣшеніе вопроса о выпрямленіи дугъ нѣкоторыхъ алгебрическихъ кривыхъ при-

---

[1]) О взглядахъ Лейбница на понятіе объ интегралѣ см. въ прим. 2) къ стр. 193 (стр. 194): «*Integralium* appellatio mihi non displicet», пишетъ онъ Ивану Бернулли, «& a me quoque interdum Tui imitatione adhibita est; plerumque tamen *summationis* vocabulo uti malo, quia magis luciferum est, & originem ipsam meditationis ostendit».

[2]) См. *Instit. calc. integr.* Praenot. Def. 5, Coroll. 1—3, Schol. 1—3, pp. 9—12.—Ср. стр. 181—187.

[3]) Объ исторіи трансцендентныхъ функцій возникающихъ при интегрированіи алгебрич. дифференціаловъ см. въ особ. въ сочин.: *A. Brill* und *M. Noether*, Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung.* Bd. III, 1892—93, Berl. 1894, pp. I—XXIII, 109—566.— *A. Enneper.* Elliptische Functionen. Theorie u. Geschichte. Akademische Vorträge. Zweite Aufl. Neu bearb. und herausgeg. v. Dr. *Felix Müller.* Halle a. S. 1890.

водило къ интеграламъ указаннаго вида [1]), съ другой,—математики старались привести общую аналитическую задачу объ интегрированіи дифференціаловъ такого вида къ простѣйшимъ геометрическимъ задачамъ выпрямленія дугъ эллипса и гиперболы. Убѣдившись въ неприводимости, въ общихъ случаяхъ, этихъ интеграловъ (разсматриваемыхъ такъ функціи своихъ предѣловъ) къ извѣстнымъ простѣйшимъ функціямъ [2]), геометры обратились къ другаго рода изслѣдованію, а именно къ сравненію между собой интеграловъ съ различными предѣлами, или къ сравненію неналожимыхъ другъ на друга дугъ кривыхъ.— *Яковъ Бернулли* первый нашелъ, что на кривой линіи, названной имъ параболической спиралью, уравненіе которой въ полярныхъ координатахъ можетъ быть приведено къ виду $(a-\rho)^2 = 2ab\theta$, двѣ дуги, концы которыхъ соотвѣтствуютъ значеніямъ ρ равнымъ $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+c$ и $\frac{a}{2}-c, \frac{a}{2}$, равны между собой [3]).

---

[1]) Объ исторіи задачи о выпрямленіи дугъ крив. лин. см. у *М. Кантора*, Gesch. d. M. Bd. II, pp. 827—829, Bd. III, pp. 132—133 (*Neil*, *Wren Van Heuraet*—выпрям. полукуб. параб., ср. прим. 2) на стр. 172), 133—137 (*Huygens*), 149 (*Tschirnhaus*, ср. p. 461), 152—154, 171, 174 [*Newton*; ср. De anal. per aeq. infin., *Opuscula* t. I, pp. 18—25; Meth. flux. *Opusc.* t. I, pp. 112—114, Epist. ad Oldenb. 13 Jun. 1676, *Opusc.* t. I, pp. 317 (arcus ellipt.), 322 (arc. ell. & hyperb.)], 219 (*Joh. Bernoulli*, Opera, t. I, pp. 93—118).

[2]) Ср. *Legendre.* Exercices de calcul intégral s. les transcendantes, et les quadratures t. I, Paris 1811, Введеніе, въ началѣ; привед. у *Brill u. Nöther.* Entw. &c. p. 206. Мысль о неприводимости различныхъ функцій доставляемыхъ интегральнымъ исчисленіемъ казалась весьма естественной геометрамъ эпохи Лейбница и Ньютона; ср. стр. 183—185. Лейбницъ одно время полагалъ даже, что интегрированіе раціональныхъ функій приводитъ къ безчисл. множеству неприводимыхъ видовъ трансц. функцій; см. прим. 2) на стр. 201.

[3]) *Specimen calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis; Acta Erudit.* 1691 (p. 13 sqq.), *Jacobi Bernoulli* Opera, pp. 431—442.—*Enneper.* Ell. F., Note III, pp. 526—527; *Cantor.* Gesch. d. Math. Bd. III, pp. 461—463.—Въ этой статьѣ Я. Б. встрѣчается въ *первый разъ* (*Cantor* l. c.) эллиптическій интегралъ, дифф. котораго $= \frac{dy}{rl}\sqrt{r^2l^2+4r^2y^2-8ry^3+4y^4}$ (J. B. Op. pp. 433 — 434).

Иванъ Бернулли, продолжая изслѣдованія своего брата, задался цѣлью отыскать по данной кривой другую, такъ чтобы сумма или разность дугъ той и другой линіи выражалась помощью дуги круга [1]). Въ особенномъ случаѣ обѣ кривыя сводятся къ одной—*кубической параболѣ* ($3a^2y=x^3$): «adeoque», говоритъ Иванъ Бернулли, «est Parabola cubicalis primaria, quae cum se ipsa comparata rectificari potest, seu in qua assignare possunt duo arcus, quorum differentia est rectificabilis. Hic ergo incidimus quasi fortuito in perelegantem hujus famosissimae curvae alias irrectificabilis proprietatem» [2]).

Въ 1715 году графъ *Фаньяно* [3]) опубликовалъ статью подъ заглавіемъ: «Новый методъ выпрямленія разности двухъ дугъ (изъ которыхъ одна дана) въ безчисленныхъ видахъ невыпрямляемыхъ параболъ». Въ этой статьѣ онъ распространяетъ теорему Ивана Бернулли на кривыя, уравненія которыхъ приводятся къ виду: $y=\frac{2}{m+2}\cdot\frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$. Разность двухъ дугъ такой параболической кривой можетъ быть выпрямлена въ тѣхъ случаяхъ, когда концы одной дуги соотвѣтствуютъ абсциссамъ x_1 и x_2, а концы другой—φx_1 и φx_2, если только x и $z=\varphi x$ удовлетворяютъ дифференціальному уравненію

---

1) *Acta Erudit.* 1695, *Joh. Bernoulli* Opera, t. I, pp. 142—144; *Cantor.* G. d. M. Bd. III, pp. 463—464.

2) *Theorema universale Rectificationi linearum curvarum inserviens*, *Acta Erud* 1698 (pp. 462 *sqq.*), *Joh. Bernoulli* Opera, t. I (pp. 249—253), p. 252.

3) *Giulio Carlo Conte di Fagnano Marchese de Toschi e di San Honorio* род. въ 1682 г., ум. въ 1766 г.; ср. *Marie* H. d. M. t. VII, pp. 224—226, *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, p. 465; *Enneper.* Ell. t. p. 514; *Bulletino Boncomp.* t. III, pp. 37—46. Сочиненія Фаньяно изданы были въ 1750 году въ двухъ томахъ подъ заглавіемъ *Produzioni Matematiche Del Marchese Giulio Carlo De' Toschi Di Fagnano*, Pesaro MDCCL. Не имѣя подъ рукой этого сочиненія, я заимствовалъ свѣдѣнія о трудахъ Фаньяно у Эннепера-Мюллера.

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}}, \text{ или } \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} + \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} = 0$$

Фаньяно нашелъ алгебрическіе интегралы этого уравненія при $m=4$ (кубическая парабола), 3, 6, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{6}{5}$, $-\frac{3}{2}$. [1]). За этой работой геніальнаго итальянскаго математика слѣдовали другія [2]) посвященныя подробному изслѣдованію кубической параболы и въ особенности лемнискаты. Относительно лемнискаты онъ нашелъ, что квадрантъ ея можетъ быть раздѣленъ алгебрически на равныя части, когда число ихъ выражается одной изъ трехъ формъ $2.2^m, 3.2^m, 5.2^m$, гдѣ m цѣлое положительное число [3]). Фаньяно обратился затѣмъ къ сравненію дугъ эллиптическихъ, гиперболическихъ и циклоидальныхъ,

---

[1]) *Nuovo metodo per rettificare la differenza di due archi (une de'quali e dato) in infinite specie de Parabole irrettifiabili; Giornale de'letterati d'Italia*, t. XXII, pp. 229 sqq., *Produzioni*, t. II, pp. 317—330—рѣшеніе задачи предложенной самимъ же Фаньяно въ 1714 году (*Giorn. de'lett.* t. XIX, p. 438); *Enneper.* Ell. Funct., Note III, pp. 527—530.

[2]) *Enneper.* Ell. F. N. III p. 530 sub. fin.

[3]) *Produzioni*, t. II, pp. 326 (дѣленіе пополамъ квадранта лемнискаты) 356—357 (другой методъ того же дѣленія), 368 (дѣленіе кв. л. на 2.2^m, 3.2^m, 5.2^m р. частей: «E questa è una nuova, e singolare proprietà della mia curva»); *Enneper.* Ell. F. N. III, pp. 531—532. О продолж. работъ Фаньяно о лемнискатѣ въ XIX вѣкѣ см. тамъ же, pp. 546—547.

основывая свои выводы на одномъ общемъ предложеніи чисто аналитическаго характера [1]).

Въ силу этого предложенія, если u и v связаны уравненіемъ $fhu^2v^2+fl(u^2+v^2)+gl=0$, то имѣетъ мѣсто равенство:

$$\int_0^u \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx + \int_0^v \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx = -\frac{huv}{\sqrt{-fl}} + \int_0^{\sqrt{\frac{-g}{l}}} \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx,$$

условію же $fhu^2v^2+gh(u^2+v^2)+gl=0$, отвѣчаетъ равенство

$$\int_0^u \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx + \int_0^v \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx = -\frac{uv\sqrt{-h}}{g} + \int_0^{\sqrt{\frac{-l}{h}}} \frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}\,dx,$$

---

[1]) *Produzioni*, t. II, p. 336: **Teorema** Da cui si deduce una nuova misura Degli Archi Ellittici, Iperbolici e Cicloidali. Фаньяно доказываетъ далѣе другое предложеніе, Altro teorema, che servo per misurare differentamente gli archi dell'iperbola: «sieno come sopra i due polinomj X, e Z (причемъ $X = \frac{dx\sqrt{hxx+l}}{\sqrt{fxx+g}}$, $Z = \Big|^{x=s} X$; io dico, che se si prendera $s = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{gl}{fh}}$, l'integrale di $X+Z$ sarà $\frac{1}{f}\sqrt{fxx+g}.\sqrt{h+\frac{l}{xx}}$». Доказательства обѣихъ теоремъ и ихъ приложенія приведены у Эннепера in extenso: Note II, pp. 514—518.

откуда вытекаютъ какъ частные случаи извѣстныя геометрическія теоремы о дугахъ эллипса и гиперболы носящія имя Фаньяно [1]),

Въ работахъ геометровъ конца XVII-го и первой половины XVIII-го вѣка теорія функцій опредѣленныхъ интегралами отъ ирраціональныхъ дифференціаловъ и въ особенности интеграловъ эллиптическихъ, начала, такимъ образомъ, развиваться въ двухъ направленіяхъ. Изысканія одного рода имѣютъ предметомъ приведеніе вычисленія ирраціональныхъ интеграловъ къ выпрямленію дугъ коническихъ сѣченій; наиболѣе замѣчательныя изъ нихъ принадлежатъ Маклорену [2]) и Даламберту [3]). Изысканія втораго рода, посвященныя сравненію этихъ интеграловъ, начаты братьями Бернулли и положены на прочное основаніе замѣчательными работами Фаньяно. Эйлеръ развилъ и обобщилъ изслѣдованія своихъ предшественниковъ, предпринятыя въ томъ и другомъ направленіяхъ, но остановился въ особенности на вопросѣ о сравненіи трансцендентныхъ [4]). Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ первый оцѣнилъ значеніе и важность теоріи эллиптическихъ интеграловъ какъ отдѣльной, самостоятельной отрасли высшаго анализа. Въ своемъ знаменитомъ

---

[1]) См. l. c. въ предъид. прим.; см. еще *Produzioni*, t. II, pp. 504—509, 510—536; *Enneper*. Ell. F. N. II, pp. 518 — 523; о дальнѣйшихъ изысканіяхъ посвящ. дугамъ эллипса и гиперб. см. тамъ же p. 524.

[2]) Ср. *Felix Müller*. Studien über Maclaurin's geom. Darstellung ellipt. Integrale. Progr. Realsch. Berl. 1875.—*Maclaurin*. Treatise of fluxions, art. 798—811, pp. 652—663—дуги элл., гиперб. и лемнискаты (art. 803, p. 656); *Cantor*. Gesch. d. M. Bd. III, pp. 843 — 845; *Enneper*. Ell. F. p. 525. Объ эластической кривой Якова Бернулли и приведенія рѣшенія ея уравн. къ построенію дуги равностор. гиперб. см. *J. B. Opera*, p. 592; *Maclaurin*. Tr. of fl. art. 927.

[3]) См. *Cantor*. Gesch. d. Math. Bd. III, pp. 845—849.

[4]) О значеніи Эйлеровыхъ работъ въ теоріи элл. интеграловъ см. *Legendre* l. c. въ прим. 2 на стр. 437. О мемуарахъ Эйлера, посвященныхъ сравненію трансцендентн. см. *Enneper*. Ell. F. pp. 184—190, 533—543.

мемуарѣ «*De Reductione Formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae*» онъ говоритъ между прочимъ:

«Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac iam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos incrementum per idonea signa in calculum sunt introducti. Talia signa nouam quandam calculi speciem suppeditabunt, cuius hic quasi prima elementa exponere constitui» [1]).

Главная заслуга въ развитіи теоріи эллиптическихъ функцій, какъ я сейчасъ замѣтилъ, принадлежитъ Эйлеру, какъ продолжателю изслѣдованій Фаньяно. Первыя работы, относящіяся къ вопросу о сравненіи трансцендентныхъ, сдѣланы Эйлеромъ въ 1756—57 годахъ и опубликованы въ VI томѣ Новыхъ Записокъ Петербургской Академіи Наукъ [2]). Къ этому изслѣдованію примыкаетъ рядъ другихъ работъ, продолжающихся до самой смерти великаго геометра [3]); съ ними

---

[1]) *De reduct. etc.*, *Novi Comm.* t. X, 1764, Petrop. 1766 (pp. 3—50), p. 4. Прив. у Лежандра въ Traité des fonct. ellipt. et des int. eulériennes, t. I Paris 1825, Avertissement, p. VII; *Enneper*. Ell. F. pp. 1—21. — Эйлеръ обозначаетъ черезъ $Hx[a]$ arcum abscissae x respondentem in sectione conica, cuius semiparameter $=1$ et semiaxis transuersus $=a$, atque abscissae in axe transuerso a vertice capiantur; при $a > o$ это дуга эллипса, при $a=1$—круга (cuius sinus versus$=x$), при $a=\infty$—параболы, при $a<o$—гиперболы. Такимъ образомъ $\int_0^x dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a}\right)} = Hx[a]$; *De reduct.*, Hypoth. 2, Coroll. 2, Theor. I, pp. 6, 7.

[2]) *Nov. Comm.* t. VI, 1756—1757, Petr. 1761, pp. 37—57: De integratione aequationis differentialis $\frac{mdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(1-y^4)}}$. Auct. *L. Eulero*. — *Ibid.* pp. 58—84: Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. Auct. *L. Eulero*.

[3]) Ср. *Enneper*. Ell. F. ll. c. въ прим. 4 на стр. 441. Послѣдніе мемуары относ. къ вопросу о сравн. эллипт. трансц., предст. Эйлеромъ въ Пет. Акад. наход. во второй части Актовъ этой Академіи за 1781 г напечат. въ 1785 году: Plenior explicatio circa comparationem quantitatum

связаны отчасти и труды Лагранжа посвященныя тому же вопросу [1]). Важнѣйшіе добытые Эйлеромъ результаты изложены имъ также въ VI главѣ втораго отдѣла перваго тома «Основаній Интегральнаго Исчисленія»[2]).

Уже въ 1752 году Эйлеръ, не зная еще объ открытіяхъ Фаньяно, обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что дифференціальное уравненіе $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$, почленное интегрированіе котораго приводитъ, при n цѣломъ и >2, къ трансцедентной функціи неприводимой къ дугамъ круга и логариѳмамъ, можетъ имѣть и алгебрическіе интегралы. Онъ нашелъ полный интегралъ этого уравненія при $n=2,3,4$ и 6, и замѣтивъ значеніе этихъ выводовъ для сравненія транс-

---

in formula integrali $\int\frac{Zdz}{\sqrt{(1+mzz+nz^4)}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius zz (*Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. VII, pp. 446—464), pp. 3—22; Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet, pp. 23—44. Въ добавленіи VIII къ «Инт. Исчисл.» (*Inst. calc. int.* t. IV, pp. 504—524) помѣщенъ мемуаръ предст. Акад. въ рук. 3 Ноября 1777 г.; въ Фуссовомъ собраніи посмертн. сочин. Эйлера неоконченная обширная работа: De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium: *Opera Postuma*, t. I, XXII, pp. 452—496.

[1]) См. *Enneper*. Ell. F., pp. 188—191; ср. *Acta Ac. Imp. Sc. P.*, 1778. P. I, pp. 20—57, Dilucidationes super methodo elegantissima qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione diff. $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (перепеч. въ *Inst. calc. int.*, t. IV, suppl. VIII, pp. 465—503), также добавл. къ Интегр. Исчисл. упом. въ пред. примѣчаніи.

[2]) *Inst. c. int.*, L. I, P. I, Sectio II, Cap. VI: De comparatione quantitatum transcendentium contentarum in forma $\int\frac{Pdz}{\sqrt{(A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4)}}$ pp. 389—421. Для лучшаго выясненія употр. имъ метода Эйлеръ приложилъ его сначала къ болѣе прост. случаю, когда подъ знакомъ $\sqrt{}$ находится полиномъ лишь 2-ой степ.: Cap. V. De comp. q. tr. in forma $\int\frac{Pdx}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}$ cont., pp. 365—388; ср. Scholion въ концѣ главы IV, pp. 363—364

цедентныхъ, доказалъ теорему Фаньяно о сравненіи дугъ эллипса [1]). Знакомство съ сочиненіями знаменитаго итальян-

---

[1]) См. письма Эйлера къ Гольдбаху Berl. d. 30 Mai 1752, 3 Iuni 1752, 5 Aug. 1752, 28 Oct. 1752, *Corr. m. et ph.* t. I, pp. 567—568, 569—571, 579—580, 589; Гольдбаха къ Эйлеру безъ числа (Іюль 1752 г. ?), *Corr.* t. I, p. 574, S. Pet. d. 7 Oct. 1752. *Corr.* t. I, pp. 583—584. — О Фаньяно въ этой перепискѣ не говорится ни слова; его работы были, повидимому, еще совершенно неизвѣстны ни Эйлеру, ни Гольдбаху; Эйлеръ сообщаетъ о своемъ открытіи въ слѣдующихъ словахъ (письмо 1-ое, sub fin.):

«Neulich bin ich auf curieuse Integrationen verfallen. Den gleich wie von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ das integrale ist $yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-cc)}$, also ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ das integrale: $yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-c^4)}-ccxxyy$. Ferner ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$ das integrale: $xx+yy+ccxxyy=4c-4cc(x+y)+2xy-2cxy(x+y)$. Aus solchen Formuln habe ich folgendes theorema hergeleitet». Слѣдуетъ изложеніе теоремы Фаньяно. Въ слѣдующемъ письмѣ Эйлеръ замѣчаетъ, что найденная имъ теорема тѣмъ болѣе удивительна, «da bisher die arcus elliptici auf keinerlei Art haben unter sich verglichen werden können», и затѣмъ даетъ рѣшеніе обратной задачи: найти кривую, обладающую даннымъ въ теор. Ф. свойствомъ.

Значеніе диффер. уравненій подобныхъ Эйлеровымъ въ теоріи трансц. функцій ясно сознавалъ уже Иванъ Бернулли; см. письмо его къ Лейбницу Basileae d. $^{8}/_{18}$ Iunii 1695, *Leibn. math. Schriften* hr. v. *Gerhardt*, Erste Abth. Bd. III, pp. 185—186. И. Б. разсматриваетъ уравненія $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}=\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$ и $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$, какъ простѣйшіе случаи для примѣненія метода, который онъ полагаетъ возможнымъ распространить и на другіе случаи. Для интегр. перв. ур. онъ умнож. его почленно на xy и интегрируетъ затѣмъ почленно же по частямъ: $y\sqrt{aa+xx}-\int dy\sqrt{aa+xx}=x\sqrt{aa+yy}-\int dx\sqrt{aa+yy}\pm bb$, или, въ силу предлож. уравненія, $y\sqrt{aa+xx}=x\sqrt{aa+yy}\pm bb$. Примѣненіе того-же метода ко второму уравненію даетъ алгебр. интегралъ его $y\sqrt{aa-xx}=x\sqrt{aa-yy}\pm bb$, показывающій, что, «etiam circuli divisiones producere curvam transcendentem, cujus puncta quotvis algebraice possunt inveniri, quae ipsa Tua est

скаго геометра (полное собраніе сочиненій котораго было издано лишь въ 1750 году) заставило Эйлера углубиться въ этотъ вопросъ и разсмотрѣть его съ новой точки зрѣнія [1]).

Эйлеръ прежде всего ограничилъ изслѣдованіе тѣмъ случаемъ, когда подъ радикаломъ находится цѣлая функція лишь четвертой степени, но зато разсмотрѣлъ этотъ случай въ самомъ общемъ видѣ. Вотъ какъ излагаетъ онъ задачу о сравненіи трансцедентныхъ въ Основаніяхъ Интегральнаго Исчисленія:

« *Problema.* Si $\Pi{:}z$ ejusmodi functionem ipsius z denotet, ut sit

$$\Pi{:}z = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4)}}$$

hujusmodi functiones inter se comparare».

Рѣшеніе: установивъ между двумя перемѣнными x и y соотношеніе выражаемое уравненіемъ четвертой степени $\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0$; можно легко показать, что при существованіи условій: $\beta\beta - \alpha\gamma = Am$, $\beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = Bm$, $\delta\delta - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta - \gamma\gamma = Cm$, $\delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = Dm$, $\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta = Em$, причемъ m произвольная постоянная, урав-

---

curva sectionum anguli». Онъ предлагаетъ затѣмъ, для большаго выясненія этого интегрировать уравн. $\frac{ndx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$. Методъ Бернулли есть тотъ самый, которымъ пользовал. впослѣд. Лагр. для вывода теоремы сложен. *arcsin.*, и который былъ распространенъ на эллипт. интегрлы *Штурмомъ* и *Despeyrous*; ср. *Miscell. Taurin.* t. IV. p. 100, *Oeuvres de Lagr.* t. II, pp. 7—8; (Лагр. интегр. такимъ же способ. общ. ур. $\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$); *Enneper.* Ell. F. p. 193.

[1]) Ср. прим. 3 на стр. 438 и предъид. прим. Въ цит. мем., Эйл. не упоминаетъ о своихъ прежнихъ работахъ о сравненіи трансценден. и говоритъ о сочин. Фаньяно, какъ объ единственномъ источникѣ своихъ новыхъ открытій. NB. замѣчательное вступленіе въ Observationes de comparatione arcuum (l. c. pp. 58—59), приведенное въ нѣмецк. переводѣ у Брилля и Нётера (l. c. pp. 206—207).

неніе это есть полный интегралъ дифференціальнаго уравненія $\frac{\partial x}{X} + \frac{\partial y}{Y} = 0$, гдѣ $X = \sqrt{(A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4)}$, а $Y = \sqrt{(A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4)}$.

Тогда $\Pi{:}x + \Pi{:}y = \Pi{:}a + \Pi{:}b$, гдѣ a и b суть два частныхъ значенія x и y, удовлетворяющихъ данному уравненію четвертой степени [1]).

Эйлеръ считалъ изложенный методъ приложимымъ къ случаю полинома степени выше четвертой подъ знакомъ $\sqrt{}$ только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, простѣйшіе изъ которыхъ онъ и разобралъ [2]). Въ общемъ случаѣ считаетъ онъ

---

[1]) *Instit. calc. integr.* L. I, P. I, Sectio II, Cap. VI, Probl. 81, t. I. pp. 400–402. Ср. *ibid.* Coroll. 1—3, Scholia, pp. 402—406. Эйлеръ предварительно разсматриваетъ интегралъ 1-го рода въ болѣе простой формѣ $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}}$, «integrali ita sumto ut evanescat posito $z=o$». Probl. 79, p. 392 sqq. (ср. Probl. 78, pp. 388—392; Exempla 1–5 (pp. 407—409) содержатъ интегр. уравненія $\frac{\partial p}{\pm\sqrt{(a+bp^n)}} + \frac{\partial q}{\pm\sqrt{(a+bq^n)}} = 0$, при n=1,2,3,4,6; Probl. 82-привед. къ зад. 79 инт. ур. $\frac{\partial p}{\pm\sqrt{(a+bpp+cp^4+ep^6)}} + \frac{\partial q}{\pm\sqrt{a+bqq+cq^4+eq^6)}} = 0$ (pp. 409—412); въ Schol. 1 и 2 (pp. 412—413) Эйлеръ показываетъ, какъ, посредствомъ подстановки вида $z = \frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}$ привести интегр. 1-го рода къ другому такому же интегралу содерж. подъ знакомъ $\sqrt{}$ только четныя степени перемѣнной. Probl. 83 (pp. 414 — 417) — инт. уравн. $\frac{\partial y}{Y} = \frac{n\partial x}{X}$, Coroll. (p 417)—инт. уравн. $\frac{m\partial y}{Y} = \frac{n\partial x}{X}$, гдѣ m и n цѣл. числа Ср. Эйлеровъ мемуаръ «Integratio Aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}$»; *Novi Comm.* t. XII, 1.66–1767, Petr. 1768, pp. 3–16.—*Plenior Explicatio etc.* l. c. въ прим. 3) къ стр 442».

[2]) Ср. *Inst. Calc. Int.* l. c. Schol. къ Probl. 80, p. 400: «Formulae enim.... magis complicatae,.... hoc modo non videntur inter se comparari posse, paucissimis casibus exceptis, qui per quampiam substitutionem ad hujusmodi formam reduci queant». Schol. 1 къ Probl. 82, p. 412. и предъид. примѣчаніе.

методъ свой неприложимымъ по слѣдующимъ соображеніямъ: когда полиномъ подъ знакомъ $\sqrt{}$ представляетъ точный квадратъ, X^2, въ выраженіе интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{X^2}} = \int\frac{dx}{X}$ могутъ входить одновременно какъ логариѳмы, такъ и круговыя функціи; *сравненіе* интеграловъ такого вида равносильно установленію алгебраической зависимости (съ вещественными коэффиціентами) между круговыми функціями и логариѳмами, что невозможно [1]).

Въ задачѣ 84 указанной главы «Интегральнаго исчисленія [2]) Эйлеръ распространяетъ свой методъ на эллиптическіе интегралы втораго рода, полагая

$$\Pi:z = \int\frac{dz(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}zz+\mathfrak{D}z^3+\mathfrak{E}z^4)}{\sqrt{(A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4)}}.$$

Чтобы установить формулу сравненія трансцендентныхъ этого рода, Эйлеръ ищетъ такое соотношеніе между перемѣнными x и y, которое обращало бы сумму $d\Pi:x + d\Pi:y$ въ полный дифференціалъ. Такимъ соотношеніемъ являтеся алгебраическій интегралъ уравненія $\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$:

$\alpha+2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy)+2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy=0$, въ которомъ коэффиціенты опредѣлены по даннымъ A,B,C,D, E и произвольной постоянной L помощью формулъ:

$\alpha=4(AC - BB+AL)$, $\beta=4AD+2BL$, $\gamma=4AE-LL$, $\zeta= 4(CE - DD+EL)$, $\varepsilon=4BE+2DL$, $\delta=4AE+4BD+2CL +LL$.

---

[1]) *Inst. Calc. Int.* l. c. Schol. 1 и Probl. 82, p. 412; *Brill u. Noether*, l. c. p. 209.

[2]) *Inst. calc. int.* L. I, P. I, Sectio II, Cap. VI, t. I, pp. 418—420.

Въ силу этого соотношенія между x и y;

$\beta+\delta x+\varepsilon xx+y(\gamma+2\varepsilon x+\zeta xx)=2\sqrt{\Delta(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}$, $\beta+\delta y+\varepsilon yy+x(\gamma+2\varepsilon y+\zeta yy)=2\sqrt{\Delta(A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4)}$, гдѣ $\Delta=L^3+CL^2+4(BD-AE)L+4(ADD+BBE-ACE)$, и слѣдовательно $d\Pi{:}x+d\Pi{:}y=dV$, гдѣ dV есть произведеніе dx на функцію раціональную относительно x и y; по замѣнѣ ихъ новыми перемѣнными $t=x+y$ и $u=xy$, этотъ дифференціалъ dV обращается въ ирраціональный, но содержащій подъ знакомъ квадратнаго радикала цѣлую функцію лишь второй степени относительно одной изъ перемѣнныхъ t, или u:

$$dV=-\frac{du\,(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(tt-u)+\mathfrak{E}t\,(tt-2u))}{\sqrt{A+Lu+Euu}}=$$

$$\frac{dt(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(tt-u)+\mathfrak{E}t\,(tt-2u))}{\sqrt{L+C+2Dt+Ett}}.$$

t и u являются такимъ образомъ связанными соотношеніемъ $\alpha+2\beta t+\gamma tt-2(\delta-\gamma)u+2\varepsilon tu+\zeta uu=0$, а

$$\Pi{:}x+\Pi{:}y=Const+\int_{t_0}^{x+y}\frac{dV}{dt}\,.\,dt\ ^{1});$$

«quae expressio», замѣчаетъ Эйлеръ о послѣднемъ интегралѣ,

---

[1]) Эйлеръ конечно не пользуется такимъ обозначеніемъ опредѣлен. интеграла, введеннымъ мною для краткости; напротивъ, обозначенія $\Pi{:}x$, $\Pi{:}y$ и т. п. постоянно употребляются самимъ Эйлеромъ: примѣчаніе на р. 209 у Брилля и Нётера: «Functionszeichen wie $\Pi(x)$, $r(x)$ kommen bei Euler nicht vor», относятся, очевидно, лишь къ знаку $r(x)$ котор. Б. и Н. замѣняютъ рац. функцію $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\ldots$

«nisi sit algebraica, certe vel per logarithmos, vel arcus circulares exhiberi potest» [1]).

Этотъ результатъ представляетъ собою обобщеніе найденной раньше Фаньяно теоремы о сравненіи интеграловъ втораго рода. Распространяя дальше теорему Эйлера на дифференціалы содержащіе квадратные радикалы изъ полиномовъ высшихъ степеней *Абель* открылъ впослѣдствіи свое знаменитое предложеніе [2]).

Результаты свои Эйлеръ добылъ, по собственному признанію, «potius tentando vel divinando» [3]), не слѣдуя какому нибудь правильному аналитическому методу. Лагранжъ первый открылъ такой правильный путь къ интегрированію Эйлерова уравненія $\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$; пытаясь приложить свой методъ и къ тѣмъ случаямъ, когда подъ знакомъ $\sqrt{}$ содержатся степени перемѣнной выше четвертой, онъ убѣдился въ невозможности

---

[1]) *Institut. Calc. int.* l. c. p. 420; Coroll. 1—2, p. 420 относятся къ вычисл. Const. и къ распростр. рѣшенія на $H:x—H:y$; Coroll. 3 *ibid*, содержитъ замѣчаніе объ интегрируемости въ алгебр. формѣ дифференціала $\frac{dV}{dt}\,dt$. Ср. *Plenior Explicatio &c.* Цит. въ прим. 3 къ стр. 442 *Enneper* l. c. pp. 539—532.

[2]) *Abel.* Oeuvres compl. T. I, pp. 145—211: Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes pr. à l'Ac. des sc. de Paris 30 Oct. 1826; cp. *ibid.* pp 515—517, 444—456; T. II (O. post.), pp. 55—66: Sur la comparaison des fonctions transcendantes (1825); *Brill u. Noether*, l. c. pp. 212—213.

[3]) De integratione aequat. diff. $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-x^4)}}$, *Novi Comm.*, t. VI, § 6, p. 40. «Unde nullum est dubium», продолжаетъ Эйлеръ, «quin methodus directa, ad idem hoc integrale perducens, fines analyseos non mediocriter sit amplificatura; cuius propterea investigatio Analystis omni studio commendanda videtur». Ср. характерное для нравственной личности этого великаго человѣка вступленіе въ его мемуаръ «Dilucidationes super metodo elegantissima, qua illustris de la Grange &c.» цит. въ прим. 1) на стр. 443.

интегрировать Эйлерово уравненіе въ общемъ случаѣ [1]). Эйлеръ и Лагранжъ, стараясь, такимъ образомъ, обобщить задачу о сравненіи на трансцендентныя высшихъ порядковъ въ томъ

---

[1]) Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. *Miscell. Taurin.* t. IV, 1766—1769, *Oeuvres de Lagrange*, t. II, pp. 5—33 (ср. прим. 1 на стр. 443). Резюмэ Лангранжева метода см. у Эннепера, l. c. pp. 189—190. Лагранжъ полагаетъ $\frac{dx}{\sqrt{f_1x}}=\frac{dy}{\sqrt{f_2y}}=\frac{dt}{T}$, гдѣ T какая ниб. функція отъ x и y, котор. дѣлаются такимъ обр. функціями отъ t; вводя нов. перем. $x+y=p$ и $x-y=q$, замѣчая, что $T^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=f_1x$ и $T^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=f_2y$ и дифф. эти послѣдн. уравн., получимъ, послѣ сложенія произв. уравненій и передѣлокъ: $T\left[\frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+\frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}\right]+T^2\frac{d^2p}{dt^2}=\frac{1}{2}(f'_1x+f'_2y)$, или, такъ какъ $dpdq=dx^2-dy^2=\frac{f_1x-f_2y}{T^2}dt^2$, и $f'_1x=2\frac{\partial f_1x}{\partial q}$, $f'_2y=-2\frac{\partial f_2y}{\partial q}$; $\frac{\partial\left(T\frac{dp}{dt}\right)^2}{\partial p}=2T\frac{\partial\left(\frac{f_1x-f_2y}{T}\right)}{\partial q}$, гдѣ предпол. что $\frac{dp}{dt}$ выраж. въ функціи отъ одного p. Для того чтобы въ это уравн. входили лишь перем. p и q, Лагр. считаетъ нужнымъ положить $T=P.Q$, гдѣ P функція отъ одного p, а Q—отъ одного q. Тогда оказывается что $\frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial\left(\frac{f_1x-f_2y}{Q}\right)}{\partial q}$ должн. быть функц. отъ одного p—: φp, такъ что $f_1x-f_2y=Q.\left\{\varphi p\int Qdq+\psi p\right\}$....(A), а слѣд., $P\frac{dp}{dt}=\sqrt{\left(C^2+2\int\varphi pdp\right)}$, или, такъ какъ $\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\frac{\sqrt{f_1a}+\sqrt{f_2y}}{PQ}$; $\sqrt{f_1x}+\sqrt{f_2y}=Q\sqrt{\left(C^2+2\int\varphi p.dp\right)}$, которое уравненіе и представляетъ интегралъ предложеннаго. (*O. de Lagr.* t. II, pp. 19—21). Когда $f_1x=f_2x=fx=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4$, выводъ этотъ упрощается (*O. de Lagr.* t. II, pp. 15 suiv.): можно положить $Q=q$ и интегр. получ. тогда въ формѣ: $\sqrt{fx}+\sqrt{fy}=(x-y)\sqrt{c^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2}$. Въ общемъ случаѣ можно изслѣдовать природу функцій f_1x и f_2y удовлетвор. условн. уравненію (A). (*O. de Lagr.* t. II, pp. 21—33); Лагранжъ приходитъ так. образомъ къ заключеніямъ подобнымъ Эйлеровымъ; онъ получаетъ, однако, общее условіе (l. c. p. 30), изъ котораго считаетъ воз-

направленіи, которое казалось имъ наиболѣе естественнымъ, различными путями пришли оба къ заключенію о невозможности такого обобщенія. Абель первый, опираясь на труды Эйлера, открылъ въ какомъ направленіи было возможно такое обобщеніе и нашелъ его въ своей знаменитой теоремѣ [1]).

Рядомъ съ теоріей сравненія эллиптическихъ трансцендентныхъ, развитіемъ которой мы обязаны главнымъ образомъ Эйлеру, мало по малу пріобрѣтаетъ значеніе другая отрасль ученія объ этихъ трансцендентныхъ—преобразованіе и приведеніе интеграловъ одного вида къ другимъ интеграламъ простѣйшаго вида; главные труды въ этой области, на ряду съ Эйлеромъ, принадлежатъ въ особенности Даламберту. Еще въ 1746 году Даламбертъ представилъ Берлинской Академіи Наукъ мемуаръ озаглавленный: «Recherches sur le calcul intégral»; тамъ разсматриваетъ онъ, между прочимъ, «рядъ интеграловъ, которые посредствомъ простыхъ подстановокъ и интегрированія по частямъ приводятся къ интеграламъ выражаемымъ посредствомъ дугъ эллипса и гиперболы» [2]).

можнымъ вывести новые случаи алгебрической интегрируемости уравненія $dx : \sqrt{f_1 x} = dy : \sqrt{f_2 y}$ «ce que ouvre, comme on voit, un vaste champ aux recherches des analystes.» (l. c. p. 33). — См. еще *Théorie d. fonct. anal.*, art. 79—83, гдѣ Лагр. приводитъ также Эйлерово уравненіе къ виду $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(A+B\cos z)}}{\sqrt{(A+B\cos u)}}$ и устанавливаетъ аналогію между теоремой сложенія эллипт. инт. 1-го рода и основнымъ предложеніемъ сферической тригонометріи; ср. *Enneper*. l. c. p. 559. Ср. еще прим. 3) къ стр. 442 и прим. 1) на стр. 443 (Работы Эйлера посвящ. Лагранжеву методу).

[1]) О значеніи Эйлеровыхъ работъ въ исторіи открытій Абеля см. *Brill u. Noether*, l. c., III Abschnitt. Das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem der hyperelliptischen Functionen: Abel bis Weierstrass, pp. 205 sqq., NB pp. 209—210.

[2]) Подробный разборъ этой работы см. у М. Кантора l. c. въ прим. 3) на стр. 441. Ср. *Hist. de l'Acad. de Berlin*, Année 1746. T. II, pp. 200—224; продолженіе этого мемуара, содержащее м. п. изслѣдов. о квадратурѣ кривыхъ 3-го порядка было напечатано въ *Hist. de l'Ac. de Berl.* ann. 1748, T. IV, pp. 249 suiv.; см. *Cantor*. l. c. pp. 848—849.

Эйлеръ, въ свою очередь, показалъ, въ двухъ мемуарахъ помѣщенныхъ въ VIII и X томахъ Новыхъ Комментарій Петербургской Академіи, приведеніе къ дугамъ коническихъ сѣченій интеграловъ отъ дифференціаловъ вида $\frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h+kx^2}}$ [1]).

Въ позднѣйшей статьѣ «о дифференціалахъ приводимыхъ къ дугамъ коническихъ сѣченій», опубликованной въ 1780 году, Даламбертъ дополнилъ свои собственныя и Эйлеровы изысканія [2]). Въ этой статьѣ онъ, между прочимъ, пользуясь теоремой о сложеніи эллиптическихъ интеграловъ втораго рода, приводитъ опредѣленный интегралъ

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \log (1-nx^2)\, dx$$

къ эллиптическимъ [3]). Такимъ образомъ нѣсколько простѣйшихъ видовъ эллиптическихъ интеграловъ пріобрѣтаютъ преимущественный интересъ и значеніе: они представляются какъ бы элементами изъ которыхъ возникаетъ весь матеріалъ теоріи эллиптическихъ трансцендентныхъ. Выдвигается вопросъ о приведеніи всѣхъ способныхъ къ тому интеграловъ къ этимъ простѣйшимъ, *нормальнымъ* или *каноническимъ* видамъ — вопросъ, который былъ окончательно разрѣшенъ трудами великаго преемника Эйлера и Даламберта

---

[1]) Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest. *Nov. Comm.* t. VIII, 1760—1761, pp. 129–149.— De reductione formular. integr. ad rect. ell. et hyp. l. c. въ прим. 1) на стр. 442.

[2]) Sur des différentielles réductibles aux arcs de sections coniques. *Opuscules mathématiques* ou Mémoires sur différens Sujets de Géométrie, de Mécanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. Par M. *D'Alembert*. t. VII, Paris M. DCC. LXXX, pp. 61—101.

[3]) *Ibid.* art. 66, pp. 95—97, *Enneper*. l. c. p. 509.

— трудами *Лежандра* [1]), открывающими уже новую эпоху въ исторіи эллиптическихъ функцій. Чтобы дополнить свой краткій очеркъ этой исторіи въ ея первую, до-Лежандровскую эпоху я долженъ упомянуть еще о работахъ англійскаго геометра *Ландена*, съ именемъ котораго мы уже встрѣчались по другому поводу [2]). Ландену принадлежитъ интересная геометрическая теорема, выражающая связь между дугой равносторонней гиперболы и двумя дугами эллипса [3]). Ему же обязаны мы открытіемъ первостепенной важности, положившимъ начало новой отрасли теоріи эллиптическихъ функцій; это открытіе «Ланденово преобразованіе» — извѣстныя уравненія, служащія для перехода отъ интеграла перваго рода съ даннымъ модулемъ къ интегралу того же рода съ другимъ модулемъ [4]).

Таковы были основанія, на которыхъ Лежандръ воздвигъ,

---

[1]) Ср. *Enneper.* Ell. F., pp. 541—542, 2, 13 sqq., 205, 212—213. — *Adrien Marie Legendre* род. въ 1752 г., ум. въ 1833 г. О жизни его и научной дѣятельности см. у *Marie* H. d. M. t. X, pp. 110—148. Первая значительная работа Лежандра по теоріи эллиптич. интеграловъ появилась въ *Histoire de Acad. de Paris* за 1786 г. (Paris 1788) подъ заглавіемъ: Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse (pp. 616—643); ср. *Enneper.* l. c. pp. 542, 2.

[2]) См. прим. 2) на стр. 328.

[3]) An Investigation of a general Theorem for finding the Length of any Arc of any Conic Hyperbola by Means of Two Elliptic Arcs, with some other new and useful Theorems deduced therefrom. *Philos. Transactions* 1775, pp. 285 sqq.; также Mathematical Memoirs by *John Landen.* London 1780, pp. 32 sqq. Ланденъ высказалъ свое предложеніе еще раньше, въ концѣ мемуара, представл. Лонд. Кор. Общ. въ 1771 г. подъ заглавіемъ: A Disquisition concerning certain Fluents, which are assignable by the Arcs of Conic Sections; wherein are investigated some new and useful theorems for computing such Fluents; см. *Philos Trans.*, 1771, pp. 290—309.— *Enneper.* Ell. F. pp. 523—524. Работы Ландена послужили основаніемъ дальнѣйшихъ изслѣдованій Лежандра: см. Second Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Par. M. *le Gendre*, *Hist. de l'Ac. de Paris*, 1786, pp. 644—683.

[4]) *An Invest. etc.* l. c. въ пред. прим. *Math. Mem.*- *Enneper.* Ell. F. pp. 352—354.

въ теченіи сорокалѣтней неутомимой дѣятельности, свою стройную теорію эллиптическихъ интеграловъ. Рамки моего труда не позволяютъ намъ остановиться на разсмотрѣніи классическаго Лежандрова «Трактата объ эллиптическихъ функціяхъ»[1]. Но я долженъ упомянуть объ одной сторонѣ Лежандрова труда, которая очень намъ важна для характеристики наступающаго новаго періода въ исторіи математики; эта именно сторона «Трактата объ эллиптическихъ функціяхъ» составляетъ одно изъ главныхъ его достоинствъ и даетъ ему право навсегда остаться совершеннымъ образцомъ математической работы. Мы уже говорили о томъ, что характернымъ признакомъ новой математики въ отличіе отъ древней является принципъ обобщенія[2]; теперь, въ новѣйшей математикѣ, вступаетъ въ силу еще новое начало, которое можно назвать *принципомъ аналитической экономіи.*

Принципъ обобщенія объединяетъ въ одну группу математическіе объекты, обладающіе общими связующими элемента-

---

[1]) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique. Par *A. M. Legendre* t. I. Paris 1825, t. II, P. 1826, t. III. P. 1828--1832. Второй томъ содержитъ въ себѣ «Traité des intégrales Eulériennes» и нѣкоторыя приложенія; третій— «divers Supplémens à la Th. d. F. ell.», «additions que nous nous étions proposé de faire à notre ouvrage, en profitant des découvertes récentes de MM. Abel et Jacobi». Подробный разборъ этого трактата см. въ книгѣ: Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. V. Dr. *L. Königsberger*. Lpzg. 1879, pp. 4—13; также у *Marie*. H. d. sc. m. t. X, pp. 123—148. Трактату объ Элл. Ф. предшествовалъ другой замѣчательный трудъ Лежандра: Exercices de Calcul Intégral s. les transcendantes et les quadratures. 3 vols, Paris 1811—1816. Изложеніе важнѣйшихъ результатовъ въ теоріи эллипт. инт., добытыхъ Лежандромъ и его предшеств., главнымъ образомъ на основаніи двухъ первыхъ томовъ этого послѣдняго сочиненія можно найти во 2-мъ томѣ Трактата о дифф. и инт. исч. Лакруа (sec. éd. Paris 1814), art. 406—412, pp. 48—69, art. 502—511, pp. 174—184 и Chap. VIII, *De la Comparaison des Transcendantes*, art. 690—711, pp. 471—502.

[2]) Ср. стр. 224.

ми и стремится подвергнуть такому объединенію съ данными всѣ къ тому способные объекты.—Принципъ экономіи заставляетъ отъискивать коренные члены этой группы, которые составляютъ, такъ сказать, ея сущность, изученіе которыхъ строго необходимо и, вмѣстѣ съ тѣмъ, вполнѣ достаточно для познанія всей группы; свойства каждаго члена группы должны находиться въ простой, вполнѣ извѣстной логической зависимости отъ свойствъ коренныхъ, *нормальныхъ* или *каноническихъ* ея членовъ. Это начало, мало по малу возникающее въ теченіи XVIII-го вѣка, уже ясно было сознано Лежандромъ, который явился однимъ изъ главныхъ проводниковъ его въ науку. Лежандръ завершилъ труды своихъ предшественниковъ, осуществилъ ихъ планы, дополнилъ недостающее въ добытыхъ ими результатахъ, соединилъ эти результаты въ одну стройную систему, положилъ, такимъ образомъ, прочное основаніе для открытій, уже совершенно новаго рода, послѣдующей эпохи.

Такая же роль, какъ и въ теоріи эллиптическихъ интеграловъ, выпала на долю Лежандра въ другой отрасли ученія о функціяхъ, въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ; ему предстояло, опять таки, дополнить, объединить и усовершенствовать результаты добытые главнымъ образомъ Эйлеромъ [1]).

Мы уже видѣли, какъ возникла у Эйлера теорія опредѣленныхъ интеграловъ [2]). Я изложу теперь, въ главныхъ чер-

---

[1]) Лежандръ изложилъ теорію Эйлеровыхъ интеграловъ въ двухъ статьяхъ, помѣщенныхъ въ *Exercices de calcul intégral* (t. I, pp. 221 suiv., t. II, pp. 3 suiv.); изложеніе содержанія этихъ двухъ статей см. въ диссертаціи: Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunction und Euler'schen Integrale. V. *Hans Schenkel*. Uster-Zürich, 1894, 4). A. M. Legendre, pp. 15—26. Ср. еще *Lacroix*. Tr. du c. d. et d. du c. i., t. III, ch. VI, art. 1164—1205, pp. 412—486. Лежандръ представилъ свою теорію въ нѣсколько болѣе простой формѣ и съ нѣкоторыми прибавленіями въ Traité des intégr. Eul. (упом. въ прим. 1) на пред. стр.); Tr. d. f. ell. etc. t. II, pp. 365—530. Не имѣя подъ руками Exerc. de calc. intégr., я заимствую ссылки на это сочиненіе изъ диссертаціи Шенкеля.

[2]) Ср. стр. 399—401.

тахъ, дальнѣйшее развитіе этой теоріи и приведу нѣкоторые характерные методы и обозначенія Эйлерова анализа. При первыхъ же своихъ изслѣдованіяхъ объ интерполяціи рядовъ, великій Базельскій математикъ встрѣтился съ интегралами особаго вида, которые мы приводимъ теперь обыкновенно къ одной изъ двухъ формъ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ и $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, и которые получили отъ Лежандра названіе Эйлеровыхъ интеграловъ перваго и втораго рода [1]) Второй изъ этихъ интеграловъ служитъ для интерполяціи числовой функціи $1.2.3\ldots(n-1)$ при положительныхъ значеніяхъ n, первый находится въ простой зависимости отъ трехъ интеграловъ втораго рода [2]). Эти интегралы, а также и нѣкоторые другіе, представляющіе частные ихъ случаи или находящіеся съ ними въ простыхъ отношеніяхъ и послужили главнымъ предметомъ дальнѣйшихъ изысканій Эйлера [3]). При этихъ изысканіяхъ онъ выработалъ,

---

[1]) *Exerc. de calc. int.* t. I, p. 221, *Traité des intégr. Eul.*, p. 565, и въ особ. art. 55—57, pp. 414—415.

[2]) *Ibid.* art. 60—62, pp. 416—417; ср. стр. 399—401.

[3]) Всѣ работы Эйлера, относящіяся къ интеграламъ носящимъ его имя могутъ быть раздѣлены на двѣ группы: въ первую входятъ мемуары, написанные въ теченіи 1730 — 1739 годовъ; они находятся въ связи съ рѣшеніемъ вопросовъ о суммованіи и интерполяціи рядовъ, съ теоріей непрерывныхъ дробей и безконечн. произведеній; см. прим. 3 на стр. 278, прим. 3 къ ст. 283 и стр. 399—402. Дополненіемъ къ нимъ служитъ мемуаръ: De expressione integralium per factores, *Nov. Comm.* t. VI, 1756 et 1757, Petr. 1761, pp. 115 -154; мемуаръ: De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur, въ *Miscell. Berolin.* t. VII, 1743, по словамъ Кантора (Gesch. d. M. Bd. III, p. 843), относится къ опр. интегр., «deren Integration auch unbestimmt vollzogen werden kann». Работы второй группы посвящены спеціально Эйлеровымъ интеграламъ и относятся ко второму періоду дѣятельности великаго геометра, начиная съ 1762 года: въ это время Эйлеръ былъ озабоченъ систематической разработкой интегральнаго исчисленія въ своемъ капитальномъ сочиненіи «Institutiones calculi integralis» (ср. прим. 1) на стр. 434). Результаты этихъ новыхъ работъ были изложены Эйлеромъ въ *Inst. Calc. int.* I. I, P. I, Sectio I, Cap. IV, VIII, IX (De valoribus integralium quos certis

однако, и нѣкоторые весьма важные общіе методы вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ. Я приведу сначала обозначенія и

---

tantum casibus recipiunt; De evolutione integralium per producta infinita). t. I, pp. 108—129, 203—224, 225—250 и, еще до появленія «Интегр. Исчисленія», въ мемуарѣ: Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x=1$, *Miscellanea Taurinensia*, t. III, 1762—1765, Turin 1766, pp. 156—177 (ср. разборъ этого мем. *Schenkel*, l. c. pp. 6—9). Въ 1771 году Эйлеръ сообщилъ Петербургской академіи наукъ мемуаръ: Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa (*Novi Comm.* T. XVI, 1771, Peter. 1772, pp. 91—139; перепеч. въ *Insu. Calc. int.* t. IV, Suppl. III, pp. 78—121), содержащій теорію интеграловъ 2-го рода и выводъ формулъ устанав. соотношеніе между инт. обоихъ родовъ.—Эти два мемуара содержатъ полную теорію новыхъ трансценд. Изъ другихъ работъ Эйлера, посвящ. тѣмъ же вопросамъ наиболѣе замѣчательны: Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1} \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae (*Convent exhib. die 10 Oct.* 1776). *Nova Acta Ac. S. I. Petr.* T. V, 1787, Petr. 1789, pp. 86—117; Additamentum ad dissertationem de valor. form. int. etc. (*Conv. exh. d.* 17 *Oct.* 1776), *ibid.* pp. 118—129; перепеч. въ *Inst. c. int.* t. IV, Suppl. V, pp. 295—337. De vero valore formulae integralis $\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ a termino $x=0$ usque ad terminum $x=1$ extensae (*Convent. exh. d. 30 Sept.* 1676), *Nova Acta*, t. VIII, 1790, Petr. 1794, pp 15 — 31; Plenior expositio seriearum illarum memorabilium quae ex unciis potestatum binomii formatur (*Convent. exh. d. 30 Sept.* 1776), *ibid.* pp. 32—68. De eximio usu methodi interpolationum in seriernm doctrina, *Opusc. Anal.* t. I, (pp. 157 sqq) pp. 171 sqq; Methodus inveniendi formulas integr., quae certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi. *Opusc. Anal.* t. II, pp. 178—216. Какъ я уже замѣтилъ въ прим. 1) на стр. 401., Стирлингъ также пользовался опред. интегр. для интерполяціи рядовъ: онъ доказываетъ теорему (l. c. въ этомъ примѣчаніи), въ силу которой члены ряда $a, \frac{r}{p}a, \frac{r}{p}\cdot\frac{r+1}{p+1}a, \frac{r}{p}\cdot\frac{r+1}{p+1}\cdot\frac{r+2}{p+2}a$, *etc*, пропорціональны значеніямъ интеграла $\int_0^1 x^{r+z-1}(1-x)^{p-r-1} dx$, при $z=0,1,2,3$, *etc*. Для доказательства этого онъ пользуется формулой приведенія инт., данн. Ньютономъ въ трактатѣ «De Quadratura Curvarum» (Pro-

формулы, относящіяся спеціально къ Эйлеровымъ интеграламъ, а затѣмъ скажу нѣсколько словъ и объ его общихъ методахъ.

Эйлеръ разсматривалъ свои трансцедентные интегралы перваго и втораго рода обыкновенно въ слѣдующей формѣ:

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx;\quad \int_0^1 x^{f-1}\,(lx)^{\frac{m}{n}}\,dx,\quad \text{или проще,}$$

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} dx$$ [1]).

positio VII, *Newt. Opuscula*, t. I, pp. 221 sqq,). Ср. *Eggenberger*. Beiträge etc. (см. прим. 3) на стр. 403), pp. 41—42. Изъ другихъ математиковъ XVIII вѣка пользовавшихся опредѣленными интегр. въ теоріи рядовъ, слѣдуетъ упомянуть объ Антоніи Маріи *Lorgna* 1730—1796): ему принадл. сочиненіе Specimen de Seriebus Convergentibus. Veronae 1775, трактующее о рядахъ, quarum Termini in genere divisorem complectuntur Algebraicum. См. также его мемуаръ: Méthode pour sommer les séries réciproques de sinus ou co-sinus d'arcs en progr. arithm. *Mém. de l'Ac. de Turin*, 1786—1787, T. 1788, pp. 215—244. Ср. Methodus generalis summandi progressiones. Auct. *L. Eulero*. *Comm. Ac. Sc. I. P.*, t. VI, 1732—1733, pp. 68—97. Первыя попытки суммованія рядовъ при пом. интеграловъ принадл. Лейбницу и И. Бернулли: см. письма Л. къ И. Б. Hanov. 9 Nov. 1696, Б. къ Л. Gron. 1 Dec. 1696, Л. къ Б. Guelferb. 28 Dec. 1696, Б. къ Л. Gron. 19 Jan. 1697. Leibn. Math. Schr. Erst. Abth. Bd. III, pp. 337—357; ср. Lettre de Lagrange à Lorgna, Berl. 23 févr. [1776]. *O. de Lagr.* t. XIV, pp. 255—256 —*Lacroix*. Tr. du c. d. et. du c. i., t. III, Ch. V, pp. 374 suiv.

[1]) Ср. l. c. въ пред. прим. въ особ. *Evol. form. cuiusd. int. etc.* Th. generale, Scholion. Эйлеръ разсматривалъ свои трансц. функціи лишь для раціональн. значеній перем. Лежандръ первый говоритъ объ Эйлеров. интегралахъ, какъ о функціяхъ непрерывныхъ; ср. l. c. въ прим. 1) на стр. 456. Лежандръ окончательно замѣнилъ сложную Эйлерову формулу интеграла втораго рода простѣйшей формулой $\int_0^1 dx\,\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$ и ввелъ для нея обозначеніе $\Gamma(a)$ (Traité d. int. Eul., Ch. VII, art. 44, 45, l. c. p. 406); ср. *Evolut. form. integr. Nov. Comm.* T. XVI, Schol. къ Th. I, pp. 97—98. *Inst. c. int.* t. IV, pp. 83—84. Мемуаръ Эйлера «De vero valore &c.» цитир. въ пред. прим.—Въ мемуарахъ Methodus inven. etc. *Opusc. An.* t. II, pp. 178—216 (ср. пред. прим.) и De valoribus integralium a termino variabilis $x=0$ usque ad $x=\infty$ extensorum (M. S. Academiae exhib. d. 30 Aprilis 1781; напеч. въ *Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. V, 4), pp. 337 — 345) Эйлеръ пользуется интеграломъ втораго рода въ формѣ $\int^{\infty} x^{n-1}\,e^{-x}dx$. . Эйлеръ

Онъ употреблялъ для нихъ сокращенныя символическія обозначенія и изложилъ своего рода алгориѳмъ для вычисленія этихъ символовъ, установивъ формулы для приведенія однихъ символовъ къ другимъ. Вотъ, для примѣра, рядъ наиболѣе интересныхъ формулъ, заимствованныхъ изъ одного изъ важнѣйшихъ Эйлеровыхъ мемуаровъ, посвященныхъ этимъ трансцендентнымъ [1]): Введя

обозначенія: $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{q-n}}} = \left(\frac{p}{q}\right),\ \int_0^1 dx \sqrt[n]{\left(l\frac{1}{x}\right)^m} = \left[\frac{m}{n}\right]$$ [2]),

Эйлеръ находитъ такія формулы:

1) Относящіяся къ интеграламъ перваго рода:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right);\ \left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p};\ \left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{q}. —$$ [3])

употребл. символъ $\varDelta : n$ для обознач. факторіала $1.2.3\ldots n$, $\varDelta : n$ или $\Gamma : n$ для обознач. болѣе общ. факт. $a.(a+b).(a+2b)\ldots[a+(n-1)b]$; Ср. его мем: De termino generali serierum hypergeometricarum (*Conv. exh.* 19 *Aug.* 1776), *Nova Acta*, t. VII, 1789, P. 1793, pp. 42—63; Variae considerationes circa ser. hyp. (*Conv. exh.* 19 *Aug.* 1776), *Nova Acta*, t. VIII, 1790, P. 1794, pp. 3—14. Объ Эйлеров. интегр. въ Лапласовыхъ работахъ по разн. исчисл. мы будемъ говорить впослѣдствіи.

[1]) Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx \left(lx\right)^{\frac{m}{n}}$ etc. упомян. въ прим. 3) къ стр. 456.

[2]) *Ibid.* Probl. 6 generale, Solutio, *Nov. Comm.* T. XVI, p. 122, *Inst. c. i.* t. IV, p. 106; ср. *N. C.*, pp. 113, 120, *I. c. i.*, pp. 98, 104. Символъ $\left(\frac{p}{q}\right)$ введенъ Эйл. въ дисс. Observationes circa integralia etc. (*Misc. Taur.* t. III) цит. въ прим. 3) къ стр. 456. Въ мемуарѣ Comparatio valorum form. int. etc. (*Nova Acta*, t. V) онъ замѣняетъ его символомъ (p,q); Лежандръ (*Tr. d. int. Eul.*, art. 55, p. 414) ввелъ символъ $[p, q]$, для обозначенія интеграла $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}.\ dx$. — Разсматривая сначала интегралъ $\int_0^1 x^{f-1}(lx)^{\frac{m}{n}} dx$, Эйлеръ замѣчаетъ, затѣмъ, что онъ легко приводится посредствомъ подстановки $x^f = y$, къ простѣйшей формѣ $\int_0^x \left(l\frac{1}{x}\right)^n.\ dx$; см. *Schol.* къ *Th.* 1, *Evolut. form. int. etc.* l. c. въ прим. 1) на пред. стр.

[3]) *Evolutio form.* Probl. 6 gen., I, II, *N. Comm.* p. 123, *Inst. c. i.*, t. IV, p. 107, ср: *Observationes circa int. etc. Misc. Taur.* t. III, pp. 157, 158.

$$\left(\frac{p}{n-p}\right)=\left(\frac{n-p}{p}\right)=\frac{\pi}{n\,Sin\frac{p\pi}{n}};\quad\left(\frac{q}{n-q}\right)=\left(\frac{n-q}{q}\right)=\frac{\pi}{n\,Sin\frac{q\pi}{n}}$$ [1])

$$\left(\frac{p+n}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right);\quad\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)$$ [2])

$$\left[\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots(m-\alpha)\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-\alpha}{m}\right)\right]^{\alpha}=$$

$$1.2.3\ldots(m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)$$, гдѣ α—«divisor communis numerorum m et n»[3]).

---

[1]) *Evolut. form.*, l. c. III, *N. Comm.* p. 123, *l. c. i.*, t. IV, p. 107; *Observat. c. int.* l. c. p. 159; *Instit. calc. int.* L. I, P. I. Sect. I, Cap. IX, Def., Cor. 2, t. I, p. 238. *ibid.* Cap. VIII, Probl. 42, Cor. 1, pp. 221—222. Эйлеръ преобраз. здѣсь $\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}$ въ $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ (Probl. 40, Schol. 1, pp 216—217; ср. De expressione integralium per factores l. c. въ прим. 3) на стр. 456, Probl. 6, pp. 142 sqq. *Opuscula Anal.* T. II, pp. 42—54: Investigatio formulae integralis $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x^k)^n}$, casu quo post integrationem statuitur $x=\infty$. *Inst. Calc. int.* t. IV, Suppl. V, pp. 346—357. De curvis hyperbolicis quae intra suas asymptotas spatium finitum includunt. Auct. *L. Eulero* (*Comm. exh. d.* 13 *Febr.* 1777), *Nova Acta*, t. VIII, 1790, P. 1794, pp. 116 sqq.

[2]) *Evolutio form.* l. c. IV, V, *N. Comm.* p. 123 *Inst. c. i.*, t. IV, pp. 107—108, «....talem relationem intercedere.....», говоритъ Эйлеръ о послѣдней формулѣ «cujus ope omnes reductiones reperiuntur, quas in observationibus circa has formulas exposui». Ср. *Observationes etc.* l. c., pp. 159 sqq. *Inst. calc. int.* t. I, pp. 238 sqq.

[3]) *Evol. form.* Theorema § 59. *Nov. Comm.* pp. 131—132, *Inst. c. int.* t. IV, p. 115.

2) Относящіяся къ интеграламъ втораго рода и выражающія связь между интегралами обоихъ родовъ:

$$\left[\frac{i+n}{n}\right] = \frac{i+n}{n}\left[\frac{i}{n}\right]$$ [1];

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right]\cdot\left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\cdot\left(\frac{\lambda}{m}\right);\ \left[\frac{m}{n}\right] = m\sqrt[n]{\frac{1.2.3\ .\ .\ .\ m}{n^m}}\ .$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$ [2].

---

[1]) *Evol. form. N. Comm.* p. 122, *Inst. c. int.* pp. 106—107; ср. *ibid.* Probl. 1, Cor. 3, *Nov. C.* pp. 95—97, *Inst. c. i.*, pp. 82—83; формула приведенія интегр. 2-го рода разсматр. здѣсь какъ частн. случай формулы прив. инт. вида $\int_0^1 x^{f-1}dx\left(1-x^g\right)^n$ при $g=o$, полагая, при g безк. мал., $x^g=1+glgx$. Въ главѣ IV *Inst c. int.* L. I, P. I. Sect. I подобн. формулы привед. выводятся посред. интеграціи по частямъ. Ср. *De vero valore form. int.* (цит. въ прим. 3) къ стр. 456), *Nova Acta*, t. VIII, p. 16; *De valoribus integralium etc. Inst. calc. int.* Suppl. V, t. IV, p. 339.

[2]) *Evolutio form.* Theorema generale, Coroll. 3, *N. Comm.* p. 108, *Inst. c. int.* t. IV, p. 93 (переходъ отъ соотн. между инт. 1-го рода къ соотн. между инт. обоихъ родовъ посред метода упом. въ пред. примѣч.); *Schol.* (pp. 108—110, 93—94 resp.). См. еще *De vero valore etc. Nova Acta*, t. VIII, p. 13, гдѣ для доказ. той же теоремы Эйлеръ ссылается на предложеніе: если $(1+z)^m = 1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ и $(1+z)^n = 1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$, то сумма ряда $1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ выражается съ одной стороны формулой

$$\frac{\int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^{m+n}dx}{\int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^m dx.\int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^n.dx},$$ съ друг.—формулой $$\frac{m+n}{mn\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx}.$$

Ср. *Plenior expositio serierum etc.* (*Nova Acta* t. VIII) цит. въ прим. 3) къ стр. 456. — О привед. въ текстѣ формулахъ см. далѣе въ *Evolutio form.*, *Nov. Comm.* t. XVI, p. 122, *Inst. calc. int.* t. IV, p. 106 (Probl. 6 gen.), *Supplementum continens demonstr. Theor.* § 53 *propositi*, ll. cc. pp. 136—138, 118—120 resp.

Къ этимъ формуламъ слѣдуетъ присоединить замѣчательное равенство, находящееся въ одномъ изъ посмертныхъ мемуаровъ Эйлера объ опредѣленныхъ интегралахъ:

$$\left[\frac{1}{n}\right]\cdot\left[\frac{2}{n}\right]\cdot\left[\frac{3}{n}\right]\cdots\left[\frac{n-1}{n}\right]=\frac{1.2.3\ \ (n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n}}{n}}$$ [1]).—

Предѣлы интеграла не обозначались въ самой формулѣ, а для опредѣленія ихъ употреблялась сначала фраза: «posito post integrationem $x=1$, integratione ita instituta, ut integrale evanescat posito $x=0$» [2]), затѣмъ также —: «integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa» [3]). Впослѣдствіи только Эйлеръ ввелъ особое обозначеніе предѣловъ интеграла въ самой его формулѣ: $\int Pdx \begin{bmatrix} ab\ x=a \\ ad\ x=b \end{bmatrix}$ [4]). Въ мемуарѣ оза-

---

Эти формулы служатъ также основаніемъ для вывода предлож. упом. въ прим. 3) на стр. 460; см. ll. cc. pp. 128—132, 111—115 resp.; *Demonstratio Theorematis* § 59 *propositi*, ll. cc. pp. 128—139, 120—121 resp.

[1]) См. L. *Euleri* Opera postuma, t. I, pp. 408—438: Considérations sur quelques formules intégrales, dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas, par la quadrature du cercle. Мемуаръ этотъ хранится въ Парижск. нац. библ. и представл. автографъ великаго геометра. Онъ былъ снова изданъ *Ш. Анри* въ 1880 году: см. *Bulletin des. Sc. math.*, 2 sér. t. IV, 1880, Extrait, pp. 2—52; Cons. etc. Mém. de L. E. publ. conform. au man. aut. p. M. *Charles Henry*. Привед. въ текстѣ формула наход. p. 433 (Op. post.), resp. p. 44 *(Ch. H.* Extr.); она выведена Эйлеромъ путемъ простаго наведенія; *Lacroix*, (Tr. du c. d. et du c. i., t. III, p. 480) приводитъ ее со словъ *Prony* видѣвшаго Эйлерову рукопись; онъ даетъ доказ. этой формулы (pp. 479—480). Cp. *Legendre*. Tr. d. int. Eul., l. c. Ch. X, pp. 441 suiv. Эйлеръ не употр. въ этой формулѣ сокр. обозн., которыми я пользуюсь въ текстѣ.

[2]) Ср. прим. 1) на стр. 400. (*De progression. transc.*) также прим. 3) къ стр. 456.

[3]) Ср. прим. 2) на стр. 457. Выраженіе «опредѣленный интегралъ» введено Лапласомъ; см. Mém. sur les suites, *Hist. de l'Ac.* 1779, P. 1782, pp. 209—267: «je nomme *intégrale définie*, une intégrale prise depuis une valeur déterminée de la variable jusqu' à une autre valeur déterminée».

[4]) Это обозначеніе встрѣчается въ первый разъ въ статьѣ: «De in-

главленномъ «Observationes in aliquot Theoremata Illustr. de La Grange», напечатанномъ въ сборникѣ статей Эйлера,— «*Opuscula Analytica*»[1]), онъ объясняетъ значеніе и геометрическій смыслъ этой формулы[2]) и выводитъ слѣдующія равенства:

$$\int_a^b Pdx = -\int_b^a Pdx, \text{ или } \int_a^b Pdx + \int_b^a Pdx = 0;$$

$$\int_a^b Pdx + \int_b^c Pdx = \int_a^c Pdx; \quad \int_a^c Pdx - \int_a^b Pdx = \int_b^c Pdx;$$

$$\int_a^c Pdx - \int_b^c Pdx = \int_a^b Pdx \text{ }^{3});$$

и наконецъ: $\int_a^b Pdx + \int_b^c Pdx + \int_c^a Pdx = 0$ [4]).

---

tegratione formulae $\int \frac{dx\ lx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ab $x=o$ ad $x=1$ extensa. *Acta Acad. Imp. Sc. Petr.*, 1777. P. post., pp. 3—28, *Inst. calc. int.* t. IV, S. III, pp. 154—182. Еще раньше Эйлера Лапласъ употреблялъ подобное же, оставленное имъ впослѣдствіи, обозначеніе: $\int dx \left\{ P \right\}_{x=b}^{x=a}$. См. Mémoire sur l'inclin. moyenne des orbites des comètes etc., *Sav. Étr*, t. VII, 1773, Paris, 1776, p. 511.

[1]) *Leonhardi Euleri* Opuscula Analytica, T. II, Petropoli 1785 (этотъ второй томъ появился въ свѣтъ уже по смерти автора), pp. 16—41 — вычисл. опред. интер. вида $\int_a^b \frac{x^n - x^m}{\left(1+x^v\right)} \cdot \frac{dx}{\log x}$. Ср. письмо Эйлера къ Лагранжу, St. Ptrsbg. 23 mars. 1775, *Opera Post.* t. II, p. 586, *Oeuvres de Lagr.* t. XIV, pp. 242—243 и пред. письмо Э. съ помѣткой Лагранжа: *reçu le* 26 *janvier* 1775, *répondu le* 10 *février*, *Op. Post.*, t. II p. 585, *O. de L.*, t. XIV, pp. 240—241. De valore Formulae Integralis $\int \frac{x^{a-1} dx.}{lx} \cdot \frac{\left(1-x^b\right)\left(1-x^c\right)}{1-x^n}$, a termino $x=o$ usque ad $x=1$ extensae. Auct. *L. Eulero. Acta Acad. Sc. I. P.* 1777, P. post. Petr. 1780, pp. 29—47. Speculationes analyticae. A. *L. Eulero. Novi Comm.* t. XX, 1775, Petr. 1776, pp. 59—79.

[2]) *Opusc. Anal.*, t. II, pp. 17—18, Hypothesis, Scholion; «unde sponte fluunt sequentia lemmata ita succinte expressa» (p. 18).

[3]) *Opusc. An.* t. II, pp. 18—19, Lemmata I—IV.

[4]) *Ibid.* p. 19, Lemma V.

Нижній предѣлъ носитъ у Эйлера названіе «terminus *a quo*», верхній—«terminus *ad quem*» [1]). Такимъ образомъ исчисленіе опредѣленныхъ интеграловъ было формально возведено на степень новой отдѣльной вѣтви анализа [2]). Эйлерово обозначеніе предѣловъ сохранялось математиками, пока не было замѣнено, въ началѣ нашего столѣтія, принятымъ съ тѣхъ поръ болѣе удобнымъ обозначеніемъ Фурье [3]).

«Способы, которые употреблялъ Эйлеръ для нахожденія величины опредѣленныхъ интеграловъ», говоритъ Лакруа, «могутъ быть раздѣлены на три класса. Къ первому классу принадлежитъ разложеніе въ рядъ всего предложеннаго интеграла или части его. Часто случается, что подстановка предѣльныхъ значеній перемѣнной x упрощаетъ результатъ и приводитъ къ ряду, производящая функція котораго извѣстна, или къ другому, извѣстному интегралу. Различныя преобразованія могутъ, очевидно, доставлять полезныя видоизмѣненія этого способа интеграціи. Второй классъ заключаетъ въ себѣ новыя соотношенія, обнимающія произведенія и частныя опредѣленныхъ интеграловъ; къ третьему классу принадлежатъ всѣ тѣ результаты, которые получаются путемъ дифференцированія предложеннаго интеграла по отношенію къ количествамъ, первоначально не считавшимся перемѣнными» [4]).

---

[1]) *Opusc. Anal.*, t. II, Lemmata III, IV, pp. 18—19; Лапласъ употр. выраж. «limites d'intégration»; Mém. sur le calc. appr. des formules qui sont fonct. de tr. gr. n. *Mém. de l'Ac.* 1782. P. 1785, *Oeuvres compl. de Laplace*, t. X. введеніе, p. 212 и далѣе, passim.

[2]) Ср. вступленіе въ *Observ. in al. Th. ill. de Lagrange*, l. c., p. 16.

[3]) Ср. статью Пуассона о первомъ мем. Фурье, посвящ. анал. теоріи теплоты (Mémoire sur la propag. de la Chal. dans les corps sol. pr. à l'Inst. le 21 déc. 1807) въ Nouv. Bull. de la soc. philom. de Paris t. I, pp. 112—116, n°6. mars 1808; *Oeuvres de Fourier* publ. par les soins de M. *G. Darboux*, T. II, Paris 1890, p. 219; Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822; *Oeuvres de Fourier*, t. I, P. 1888; art. 224, p. 216, въ особ. art. 231 sub fin., p. 226; Mémoire sur la th. a. de la ch.; Mém. de l'Ac. pour l'ann. 1825, t. VIII (pp. 581—622), P. 1829. *O. de Fourier*, t. II, p. 150.

[4]) *Lacroix*. Traité du calc. diff. et du calc. int. t. III, art. 1164, pp. 412—413.

Способами перваго рода для вычисленія интеграловъ уже широко пользовались сами изобрѣтатели исчисленія безконечно-малыхъ и ихъ ближайшіе сотрудники [1]). Второй классъ методовъ, о которыхъ говоритъ Лакруа принадлежитъ собственно Эйлеру и примѣнялся имъ спеціально къ изслѣдованію интеграловъ носящихъ его имя: главнымъ основаніемъ этихъ методовъ служитъ аналитическій пріемъ, извѣстный подъ названіемъ *интегрированія по частямъ* [2]). Самымъ замѣчательнымъ изъ употреблявшихся Эйлеромъ способовъ нахожденія

---

[1]) Ср. обзоръ предъид. періода, въ особ. стр. 181—182, 192, 196, 205, 215 и слѣд. и соотв. прим. О преобр. перем. въ интегр. см. стр. 187 (Лейбницъ); *Newton*. Tract. de Quadr. Curv. Prop. IX, *Opusc.* T. I, pp. 225 sqq. Эйлеръ посвящаетъ интегрированію per series infinitas главы III и VI (ряды степ. и ряды тригоном.) перв. отд. перв. части перв. книги «Инт. исчисленія»; *Inst. calc. int.* t. I, pp. 76—107, 155—177. Ср. *ibid.* T. IV, Suppl. II, pp. 60—77: De resolutione formulae integralis, $\int x^{m-1} dx \left(\Delta + x^{n}\right)^{\lambda}$ in seriem semper convergentem. Ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur. *M. S. Academiae exhib. die* 12 *Aug.* 1779. Ср. Observationes anal. ad L. Euleri Inst. c. i. vol. IV, suppl. II et IV. Auct. *J. F. Pfaff (pr. à l'Ac. le* 14 *Janv.* 1797) *Nova Acta*, t. XI, 1793, P. 1798, Histoire, Supplement, pp. 37—57, гдѣ Пфаффъ даетъ также замѣч. преобр. Бернулліева ряда (Probl. § 13, pp. 53—57), Объ инт. рядами вообще см. *Lacroix*. Tr. d. c. d. et d. c. i. t. II, pp. VIII—IX, 60—83.

[2]) Къ исторіи этого пріема см. письмо Лейбница къ И. Бернулли Hanov. 6/16 Dec. 1694. Leibn. Math. Schr. Erst. Abth. t. III, pp. 154—155 и друг. мѣста переп. Л. и Ив. Берн. въ 1695 году. (Ив. Бернулли къ Лейбницу цит. въ прим. на стр. 444). Письма Л. и Берн. цит. въ прим. 3) на стр. 456 (стр. 458).— *Taylor*. Method. increm. Prop. XI, Theor. IV, p. 38; *Maclaurin*. Treat. of fl., Book II, Ch. IV, art. 813, Ch. II, art. 738—739; ср. методы Ньютона для прив. интегр. въ *Tr. de Quadr. Curv.* (см. прим. на стр. 457-458); *Macl.* l. c. Ch. III.—О формулахъ привед. и инт. по частямъ въ Эйлер. теор. опред. интеграловъ—см. въ прим. 1) на стр. 461. NB. *Comparatio valor. &c. Nova Acta*, t. V, pp. 87—88. См. еще какъ пользуется Эйлеръ этимъ пріемомъ въ мемуарахъ De variis integrabilitatis generibus. *Novi Comm.* t. XVII, 1772, Petr. 1773, pp. 70 sqq. и De formulis differentialibus quae per duas pluresve quantitates datas multiplicatae fiant integrabiles (*Conv. exh. d.* 1 *Iul.* 1776). *Nova Acta*, t. VII, 1789, Petr. 1793. De formulis diff. secundi gradus quae integrationem admittunt (*Conv. exh. d.* 24 *Apr.* 1777), *Nova Acta*, t. XI, 1793, P. 1798, pp. 3 sqq.

опредѣленныхъ интеграловъ несомнѣнно является, однако, дифференцированіе по параметру подъ знакомъ $\int$. Этотъ аналитическій пріемъ, извѣстный уже геометрамъ предшествовавшей эпохи подъ названіемъ: «differentiatio quantitatum transcendentium de curva in curvam», былъ впервые открытъ Лейбницемъ въ приложеніи къ вопросу объ ортогональныхъ траэкторіяхъ. Въ 1697 году, вернувшись изъ Торгау со свиданія съ Петромъ Великимъ, великій ганноверскій геометръ сообщилъ въ письмѣ къ Ивану Бернулли о сдѣланномъ имъ по дорогѣ открытіи [1]). Бернулли, пораженный глубиною этого открытія, немедленно отвѣтилъ своему другу письмомъ, въ которомъ, съ помощью искусно придуманныхъ обозначеній, далъ общій выводъ и формулировку Лейбницева метода [2]) и вполнѣ

---

[1]) Письмо Лейбница къ Ивану Бернулли Hanov. 3 Aug. 1697, *Leibn. Math. Schr.* I Abth. Bd. III, pp. 449—450, *Commerc. phil. et math.* t. I, pp. 319—321; см. еще «Beilage» въ изд. Герхардта, l. c. pp. 451—454 (на рукоп. помѣч. Лейбницемъ: Initio Augusti 1697. Inseratur literis cum Joh. Bernoullio commentatis eo tempore. Ср. *Cantor*. Gesch. d. M. Bd. III, pp. 221—222; письмо Л. къ И. Б. Hanov. 9 Aug. 1697, *Leibn. M. Schr.*, pp. 454—455. *Comm.*, pp. 321—322.

[2]) Письмо Ив. Берн. къ Лейбницу Groningae d. 14 Aug. 1697, P. S., *Leibn. Math. Schr.*, I Abth. t. III, pp. 462—465, *Comm. ph. & m.* t. I, pp. 330—333. Какъ текстъ этого P. S., такъ и обозначенія нѣсколько разнятся въ изд. Герхардта и въ Commercium. Бернулли пишетъ (*L. M. Schr.* l. c. p. 464) равенство $d\alpha_x\, dx = \overset{1}{\alpha}_x\, dx\, da$ (гдѣ $\overset{1}{\alpha}_x$ частн. произв. α_x — функціи отъ x и a по a) и, интегрируя это выраженіе по x, приходитъ къ такой формулѣ для дифференціала $d\int \alpha_x dx$ по a ———: $da \int \overset{1}{\alpha}_x dx = \overset{2}{\alpha}_x\, da$ (обозн. $\int \overset{1}{\alpha}_x dx$ черезъ $\overset{2}{\alpha}_x$) [въ *Comm.* p. 332: $d(\varpi dx) = \varpi' dx da$, $da \int \varpi' dx = \varpi'' da$]. Въ Beilage цит. въ пред. прим. (l. c. p. 453) Лейбницъ даетъ общую формулу: $d\,(secund.\ a) \int dx\ .\ \overset{\frown}{x\,;\,a} = da. \int dx\ d($se-

оцѣнилъ значеніе, которое придавалъ ему Лейбницъ, не только для интересовавшей ихъ задачи о траэкторіяхъ, но и для другихъ задачъ интегральнаго исчисленія [1]). Въ 1720 году *Николай Бернулли* II опубликовалъ этотъ методъ въ обширномъ мемуарѣ объ ортогональныхъ траэторіяхъ [2]), гдѣ онъ вмѣстѣ съ своими собственными изслѣдованіями помѣстилъ изслѣдованія своего отца и двоюроднаго брата *Николая Бернулли I* [3]); этимъ послѣднимъ положено также основаніе исчисленія част-

---

cund. a) $x \infty ; a$, эквивал. современной формулѣ: $da.\frac{\partial}{\partial a}\int f(x,a)\,dx = da.\int \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\,dx$. — Ср. *Nic. Bernoulli* Joh. Filii Exercitatio geom. de trajectoriis orthogon. *Joh. Bernoulli* Opera omnia t. II (pp. 423—472), p. 439.

[1]) P. S. письма къ Лейбн. цит. въ пред. прим. ll. c., pp. 464, 332 resp. Ср. письмо Лейбн. къ И. Б. 9 Aug. 1697. — О связи вопроса о траэкторіяхъ съ задачей «brevissimi appulsus» и съ задачей о «Синхронахъ» см. переписку Ив. Берн. съ Лейбн. отъ 7 Іюня 1697 г. *L. M. Schr.* I Abth. Bd. III, pp. 413 sqq., *Comm.* t. I, pp. 281 sqq. Ср. письмо И. Б. къ Л. Gron. 21 Julii 1696, *Comm.* t. I, p. 178. *L. math. Schr.* l. c. pp. 299—300; *ibid.* Beilage (pp. 302—309), pp. 308—309.

[2]) Ср. прим. 2) къ пред. стр. Въ письмѣ 9 Aug. 1697 г. Лейбницъ приглашаетъ Ив. Бернулли держать въ строгой тайнѣ сообщенное ему открытіе. *Николай Бернулли* II, старшій сынъ Ивана род. 27 Янв. 1695 г., ум. 26 Іюля 1726 г.; см. Notice biographique sur *N. B.* par son frère *Daniel*, прилож. къ письму Дан. Б. къ Гольдбаху S. Pét. 9 nov. 1728 и біографію *Н. Б.*, написанную Гольдбахомъ, *Comm. Ac. Sc. I. Petr.*, t. II, pp. 428 sqq.

[3]) *Николай Бернулли* I, племянникъ Якова и Ивана (1687—1759). «Exercitatio» Николая Бернулли II состоитъ изъ трехъ отдѣловъ: Sectio I, *Acta Erud. Lips.* 1720 Maj, pp. 223 sqq. *J. B. Opera*, t. II, pp. 423—435; Sect. II, *Acta Er. Suppl. T. VII*, Sect. VII, pp. 303 sqq.; *J. B. Op.* pp. 435—456; Sect. III, *ibid.* Sect. VIII, pp. 337 sqq., 456—472). Во второмъ томѣ полнаго собр. сочин. И. Берн. помѣщены и другія статьи, относ. къ вопросу объ ортог. траэкт. №№ CIV—CX, pp. 270 - 314, въ томъ числѣ статья Никол. Б. II, въ которой излагается исторія этого вопроса (№ CVIII, pp. 286—298; *Acta Erud.* 1718 Iun., pp. 248 sqq.); продолженіе этой исторіи см. въ первомъ отдѣлѣ «Exercit.»; ср. *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 443, 447—455. № CIX, pp. 299—305, содержитъ Additamentum *Jacobi Hermanni* ad Schedas super Problema Trajectoriarum, Mensibus Aug. 1717, & Julio

ныхъ производныхъ и полныхъ дифференціаловъ [1]). Въ 1734 году Эйлеръ далъ первое доказательство извѣстнаго уже его предшественникамъ предложенія $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)$ [2]). Наконецъ, въ 1738 году *Фонтэнъ* [3]) и *Клэро* [4]) разработали

---

super. anni in his Actis Erud. editas (*Acta Erud.* 1719 Febr., pp. 68 sqq., ср. № CVI, pp. 275—281, № CVIII, pp. 295—296), гдѣ знаменитый ученикъ Якова Бернулли пользуется, для рѣшенія задачи объ ортог. траэкторіяхъ, дифференцированіемъ по параметру, или какъ онъ выражается, по *модулю*.

[1]) *Nic. Bernoulli* Math. profess. Patavini, Tentamen solutionis generalis Problematis de construenda Curva, quae alias ordinatim positione datas ad angulos rectos secat; *Acta Erud.* 1719 Iun., pp. 295 sqq., *Joh. Bern. Op. Omn.* t. II, № CX, pp. 305—314, (NB. p. 307); извлеченіе изъ письма Ник. Берн. I къ Ивану Берн. въ «Exerc. Geom.» Николая II, Sect. II, XXX, pp. 442—443: *Problema. Datam aequationem differentialem alicujus curvae* dx=pdy, *in qua* p, *datur per* x, y, *quantitatem constantem* a, *& alias constantes, transmutare in aliam aequivalentem, in qua etiam quantitas* a *sit variabilis.*

[2]) De Infinitis Curvis Eiusdem Generis. Seu Methodus inveniendi aequationes pro inf. curv. eiusd. gen. Auctore *Leonh. Eulero. Comm. Acad. Sc. Imp. Petr.* t. VII, 1734—1735, Petr. 1740, pp. 174—183; см. §§ 6, 7 (pp. 177—178; ср. Additamentum ad dissert. de inf. c. e. g. Auct. L. *Eulero*, (*ibid.*, pp. 184—200), § 1, pp. 184—185. — *Никол. Берн. I* (l. c. въ Exerc. Ник. II) ссылается на это предложеніе, не давая его доказат. — Ср. еще *Cantor.* G. d. Math. Bd. III, pp. 854—855.

[3]) Le Calcul Intégral. Première Méthode (19 Nov. 1738). Напечатано въ собраніи мем. Ф.: Mémoires donnés à l'Académie R. des Sc. non imprimés dans leur temps. Par. M. *Fontaine*, de cette Académie. A Paris, de l'impr. Royale MDCCLXIV, pp. 24—83; ср. Table, pp. 1—2 (на 2-мъ листѣ, не нумер). Теорема I (p. 24) заключаетъ въ себѣ извѣстное предложеніе объ однор. функціяхъ, открытое Эйлеромъ въ 1736 году для случая двухъ перем. (ср. прим. 3) на стр. 389).

[4]) Recherches générales sur le calcul intégral par *M. Clairaut* (4 mars 1739); *Hist. et Mém. de l'Ac. R. d. Sc. de Paris*, 1739, Paris 1741. pp. 425—436; NB. p. 425 и прим. *) тамъ же. — Въ слѣдующемъ году Клэро представилъ Академіи въ дополненіе къ первому—другой, обширный мемуаръ подъ заглавіемъ: Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre; *Hist. et Mém de l'Ac.*, 1740, P. 1742, pp. 293—323; Клэро даетъ здѣсь, между проч., геометрич. доказательство теоремы $\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y)$: § VIII, pp. 312—313 — Ср. *Cantor.* Gesch. d. M. Bd. III, pp. 856—862. — О *Клэро* (*Alexis—Claude Clairaut*, 1713—1765) см. у *Marie.* H. d. M. t. VIII. pp. 150—155.

это исчисленіе и ввели въ него принятыя съ тѣхъ поръ удобныя обозначенія: у Фонтэна теорема о дифференцированіи подъ знакомъ интеграла выражена въ первый разъ въ привычной намъ формѣ:

$$\frac{d\int \mu dx}{dy} = \int \frac{d\mu}{dy}\, dx \text{ [1]}).$$

Какъ бы для того чтобы закончить вполнѣ осуществленіе идей Лейбница и Ивана Бернулли, Лагранжъ положилъ эту теорему въ основаніе своего «Варіаціоннаго Исчисленія[2]).

Въ связи съ дифференцированіемъ подъ знакомъ $\int$ находится интегрированіе подъ знакомъ интеграла и теорія двойныхъ, или вообще кратныхъ интеграловъ, зачатки которой можно тоже найти у Лейбница и Ивана Бернулли [3]), но разви-

---

[1]) *Le calc. int.*, Théor. II. l. c. p. 26. Ср. *ibid.* Table, p. 2 и p. 28. О различныхъ символахъ употреблявшихся геометрами прошлаго вѣка для обозначенія частныхъ производныхъ см. у *Lacroix.* Tr. du c. d. et du c. i., t. I, 1-re part., art. 82, 83, pp. 242—248, T. III. Add. au Ch. I du pr. vol., p. 615. — Общепринятое теперь употребл. круглой буквы ∂ для обознач. частн. произв. въ отличіе отъ прямой d — для обозн. полн. дифф. введено *Якоби*; см. *C. G. J. Jacobi.* De derminantibus functionalibus; *Journ. für die r. u. ang. Math.*, Bd XXII (1841), p. 320; *Gesamm. Werke*, Bd. III, p. 396; Dilucidationes de aequat. differ. vulgar. &c.; *J. f. die r. u. ang. Math.* Bd. XXIII, p. 4, *Ges. W.*, Bd IV, p. 152. Оно придумано было еще Лежандромъ: *Mém. de l'Acad.*, 1786, P. 1788, p. 8. Ср. *Klügel.* Math. Wört. Bd. I, p. 891.

[2]) См. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies (*Miscellanea Taurin.*, t. II, 1760—1761); *Oeuvres de Lagrange*, t. I, pp. 336—337; ср. замѣчанія Эйлера въ мемуарѣ: Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi. *Novi Comm.* T. XVI, 1771, P. 1772, p. 37, *Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. XI, pp. 591—592; также *ibid*, p. 40 и p. 594 resp. — Объ исторіи варіац. исчисл. отъ конца XVII вѣка до Лагранжа см. въ статьѣ: «Geschichte der Variationsrechnung, Erster Theil. Von *F. Giesel.* Einladungsschrift zu d. Feier des Schröder'schen Stifts-Actus im Gymn. zu Torgau. Torgau 1857.

[3]) См. письмо Лейбница къ И. Берн. 9 Aug. 1697 цит. въ прим. 1) на стр. 466 и отвѣтъ И. Бернулли. Groning. d. 4 Dec. 1697, *Leibn. Math. Schr.* Erste Ab. Bd. III, p. 468. *Comm. ph. & math.* t. I, p. 337.

тіе которой принадлежитъ уже Эйлеру Эйлеръ впервые воспользовался какъ дифференцированіемъ, такъ и интегрированіемъ подъ знакомъ $\int$ для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ и изложилъ подробно теорію своего метода въ мемуарѣ: «Nova Methodus quantitates integrales determinandi», представленномъ Петербургской Академіи Наукъ въ 1774 г.[1]).

---

[1]) *Novi Comm* t. XIX, 1774, Petr. 1775, pp. 66–102; *Lemma* I, p. 71—диффер. подъ знакомъ; *Lemma* II, pp. 76–77—интегр. подъ зн.; также *Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. V, pp. 260–294, 264—265, 269–270 resp. — Этому мемуару предшеств. другой, помѣщен. въ XIX-мъ же томѣ *Nov. Comm.*, pp. 30–65: De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}(lz)^{\mu}$ casu quo post integrationem ponitur $z=1$, гдѣ Эйлеръ пользуется дифференцированіемъ интегр. подъ знакомъ $\int$; переп. въ *Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. III, pp 122–154. Другіе примѣры приложенія того же метода см. въ Эйлеровыхъ статьяхъ: Observationes in aliquot Theor. ill. de la Grange (*Op. An.* t. II, цит въ прим. 1) на стр. 463, въ особ. Additam. pp. 33–41); Innumera Theoremata circa form. integr. quorum demonstratio vires Analyseos superare videatur (*Conv. exh. d.* 18 *Mart.* 1776), *Nova Acta* t. V, 1787, Petr. 1789, pp. 3—25; De iterata integratione formularum integr. dum aliquis exponens pro variabili assumitur (*Conv. exh. d.* 19 *Aug.* 1776), *Nova Acta*, t. VII, 1789, Petr. 1783, pp. 64—82. Особенно интересенъ мемуаръ: Uberior explicatio Methodi Singularis nuper expos., integralia alias maxime abscondita investigandi. Auct. *L. Eulero. Conv. exh. die* 29 *Febr.* 1776. *Nova acta*, t. IV, 1786, P. 1789, pp. 17–54, гдѣ Эйлеръ вводитъ систему новыхъ обозначеній, относ. къ частн. дифференцир. и интегрир., и излагаетъ основанія своего метода въ самомъ общемъ видѣ; такъ формула «$\frac{\int^{\mu}}{x} \cdot \frac{\overset{\nu}{\partial}}{p} \cdot V$, declarat, functionem V primo μ vicibus integrari debere, sumta sola x variabili; tum vero quantitatem hinc oriundam ν vicibus differentiari debere, sumta sola p variabili» (p. 19); «$\frac{\partial^2}{x} \cdot \frac{\partial^3}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^2 \partial p^3}\right)$» (*ibid*) и т. п.— О двойныхъ интегралахъ см. въ мемуарѣ Эйлера: De formulis integralibus duplicatis, *Novi Comm.* T. XIV, 1769, Pars I, P. 1770, pp. 72—103, *Inst. calc. int.* t. IV, Suppl. VI, pp. 416—445. О тройныхъ интегралахъ см. въ мем. Лагранжа: Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, *Nouv. Mém. de l'Ac. R. d. Sc. et B.—L. de Berlin*, 1773, *Oeuvres de Lagr*, t. III, pp. 620 suiv.; cp. *Laplace.* Théorie des attractions des sphér. et de la fig. d. planètes, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 1782, pp. 113—196; Mécanique Céleste, t. II, P. 1799, L. III, Ch. I, pp. 3–22; *Legendre. Mém. de l'Ac.*, 1788, P. 1791, pp. 454–486: Mém. s. l. int. doubles (1789). *Lacroix.* Tr. du c. d. et du c. i. t. II, pp. 206—210.

Съ дифференцированіемъ подъ знакомъ $\int$ связаны также немаловажные успѣхи въ развитіи общей теоріи дифференціальныхъ уравненій.—Возникла теорія полныхъ дифференціаловъ и ихъ интегрированія [1]; къ методамъ интегрированія уравненій извѣстнымъ въ эпоху Лейбница и Ньютона прибавились новые, основанные на теоріи множителя [2]; открылся путь къ изученію уравненій въ частныхъ производныхъ, которое привело ко многимъ важнымъ понятіямъ относящимся къ общей теоріи функцій [3].

---

[1]) См. ll. c. въ прим. на стр. 467—468 (Николай Бернулли I, Фонтэнъ, Клэро, Эйлеръ). Ср. Эйлерову теорію полн. дифф. въ *Inst. calc. diff.* (цит. на стр. 389; *Cantor.* G. d. M. Bd. III, p. 734) и *Inst. calc. int.*, L. I, P. I, Sect. II, Cap. II, T. I, pp. 276—285.

[2]) См. *Fontaine*, l. c. pp. 27, 29 suiv. *Clairaut. Mém. de l'Ac.* 1739, pp. 428 suiv, *Mém. de l'Ac.*, 1740, pp. 299--303; pp. 304—314: Seconde partie, Ch. I, *Des Équat. à trois var.*; pp. 315 suiv. Ch. II, III, *Des Équat. à quatre, cinq &c. variables*, *Euler*, l. c. въ прим. 2) на стр. 468, pp. 186, 187, Ср. *Comm. Ac. Sc. I. P.*, t. VI, 1732—1733: Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Auct. *L. Eulero*, p. 134; *Joh. Bernoulli* Lectiones mathemat. de methodo integralium aliisque; *Opera omn.* t. III, p. 416. *Cantor*, G. d. M. Bd. III, pp. 218, 821—822, 854—861.—Ср. еще теорію интегр. множ. и основ. на ней спос. интегр. въ *Instit. calc. int.* L. I, P. I, Sect. II, Cap. II, De integratione aequationum ope multiplicatorum, T. I, pp. 285—304; Cap. III, De investigatione aequationum diff. quae per multiplicatores datae formae integrabiles reddantur, pp. 305—338. L. II, P. I, Sect. I, Cap. I, De Natura aequat. diff. quibus functiones duarum variab. determinantur in genere, t. III, pp. 3—29. *Bougainville.* Traité du c. intégr. 2-e partie, Paris 1756, Sect. I, Ch. II, pp. 10—37. *Lacroix.* Tr. du c. d. et. du c. i. t. II, P. II, Ch. III, pp. 225—249, Ch. II, pp. 260—279.—См. еще какъ пользуется Эйлеръ дифференц. подъ знакомъ въ главѣ X *Inst. calc. int.* L. I, P. II, Sect. I. t. II, pp. 230—255; De constructione aequationum differentio-differentialium per Quadraturas curvarum, далѣе, теорію множ. въ лин. дифф. уравн. L. I, P. II, Sect. I, Cap. III, IV, V, pp. 332 — 434, ср. прим. 5) на стр. 408, и прим. 2) на стр. 425. (Laplace). De integratione aequationum differentialium. Auct. *L. Eulero*, *Nov. Comm.* t. VIII, 1760 — 1761, Petr. 1763, pp. 3—63; о другихъ относ. сюда работахъ см. *Lacroix.* Tr. du c. d. et. du c. i. t. II, Table, p. XIII, XIV—XV. О новѣйш. изсл. относ. къ Эйлерову спос. инт. лин. дифф. ур. см. *Schlesinger.* Handbuch d. Th. d. lin. Differentialgl. Bd. II, 1, Abschn. XII, pp. 405 sqq., XV sqq.

[3]) См. ll. c. въ прим. на стр. 467—468, въ особ. *Euler.* De infin curv. eiusd. gen.; ср. прим. 3 на стр. 259. О другихъ, интересныхъ для насъ работахъ по инт. уравн. въ частн. произв. мы будемъ говорить впослѣдствіи.

Мы закончимъ на этомъ обозрѣніе главнѣйшихъ успѣховъ высшаго анализа въ эпоху Эйлера и Лагранжа. Въ этомъ обозрѣніи я разсмотрѣлъ эти успѣхи, согласно съ принятымъ мною планомъ, лишь въ связи съ развитіемъ ученія о функціяхъ и старался останавливаться только на вопросахъ особенно интересныхъ въ этомъ отношеніи, опуская всѣ мало характерныя, или хорошо извѣстныя подробности. Мы перейдемъ теперь къ исторіи нѣкоторыхъ особенныхъ вопросовъ, изслѣдованіе которыхъ преимущественно способствовало выясненію и развитію основныхъ началъ теоріи функцій; въ числѣ ихъ первое мѣсто занимаютъ вопросы о природѣ произвольныхъ функцій въ интегралахъ уравненій съ частными производными и о логариѳмахъ отрицательныхъ количествъ.

Изданія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I и II. Распроданы.

Томъ III—X. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ XI. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ XII. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ XIII. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ XIV. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ XV. **Выпускъ 1-й.** *Р. Прендель.* Объ изодиморфной группѣ сурьмянистой и мышьяковой кислотъ. *A. Klossovsky.* Différentes formes de grêlons observés au sud-ouest de la Russie. *I. Пачоскій.* Къ флорѣ Крыма. *И. Синцовъ.* Объ оренбургско-самарской юрѣ. *П. Рудскій.* Нѣсколько замѣчаній по поводу теоріи образованія горъ. *Ф. Каменскій.* Изслѣдованія относящіяся къ семейству Lentibularieae (Utricularieae). Цѣна 2 руб.

Выпускъ 2-й *А. А. Лебединцевъ.* Новое видоизмѣненіе Дальтонъ-Петтенкоферовскаго способа опредѣленія угольной кислоты въ воздухѣ и результаты при помощи его полученные. *М. Сидоренко.* Урагвайскій аметистъ. *Р. Прендель.* Объ изодиморфной группѣ сурьмянистой и мышьяковистой кислотъ. *П. Бучинскій.* Исторія развитія Мизидъ (Mysidae). *А. Ковалевскій.* О селезенкѣ у моллюсковъ. *М. Сидоренко.* Замѣтка о мѣстонахожденіи ископаемыхъ костей при дер. Широкой Одесскаго уѣзда. Цѣна 1 р. 50 к.

Томъ XVI. **Выпускъ 1-й.** *С. Танатаръ.* Къ вопросу о причинахъ изомеріи фумаровой и малеиновой кислотъ. *И. Синцовъ.* Результаты геологической экскурсіи въ Николаевъ. *А. Остроумовъ.* По поводу изслѣдованія проф. Геттерэ о происхожденіи и развитіи ано-генитальной области млекопитающихъ. *Н. Альбовъ.* Абхазскіе папоротники. *Н. Зелинскій.* Изслѣдованіе явленій стереоизомеріи среди насыщенныхъ углеродистыхъ соединеній. Ц. 2 р.

Выпускъ 2-й. *С. Танатаръ.* Очеркъ исторіи вопроса объ изомеріи фумаровой и малеиновой кислотъ. *Его-же.* Нѣкоторыя термохимическія данныя о виноградной кислотѣ. *Его-же.* Нѣкоторыя химическія данныя о пировинной кислотѣ. *Его-же.* Нѣкоторыя термохимическія данныя для янтарной и изоянтарной кислотъ. *Его же.* Дѣйствіе воды на бромоянтарную кислоту и ея калійную соль. *Его-же.* Нѣкоторыя термохимическія данныя о левулиновой кислотѣ. *В. Петріевъ.* О скоростяхъ реакціи при двойныхъ разложеніяхъ и вліяніе частичнаго вѣса кислотъ и ихъ строенія на эти величины. *А. Остроумовъ.* Предварительный отчетъ. *А. Лебединцевъ.* Тоже *С. Щусьевъ.* О химическомъ составѣ розоваго турмалина съ р. Урульги Нерчинскаго округа. Цѣна 2 руб.

Томъ XVII. **Вып. 1-й.** *Г. Г. Де-Метцъ.* Hermann von Helmholtz. 1821—1891. *Н. А. Кеппенъ.* Наблюденія надъ размноженіемъ дициемидъ. *В. Репяховъ.* О гаструляціи у позвоночныхъ животныхъ съ замѣчаніями относительно гомологіи зародышевыхъ пластовъ у Metezoa. *Я. Лебединскій.* Наблюденія надъ развитіемъ каменнаго краба. *А. Остроумовъ.* Отчетъ о завѣдываніи морской біологической станціей въ Севастополѣ. Цѣна 2 р. 50 к.

Выпускъ 2-й. *Н. Андрусовъ.* Біогеографическія замѣтки. *И. Синцовъ.* Замѣтки о нѣкоторыхъ видахъ неогеновыхъ окаменѣлостей, найденныхъ въ Бессарабіи. *Д. Заболотный.* О свѣченіи живыхъ организмовъ. *А. Лебединцевъ.* Приборъ, употреблявшійся во время экспедиціи 1891 и 1892 года для зачерпыванія воды съ глубинъ Чернаго моря. *Г. Мускатблитъ.* О митотическомъ размноженіи левкоцитовъ въ кровяномъ руслѣ. Цѣна 1 р. 50 к.

Выпускъ 3-й. *S. Pereyaslawzewa.* Monographie des Turbellariés de la mer Noire. Цѣна 5 руб.

Томъ XVIII. **Вып. 1-й.** *Н. Зелинскій.* Научное значеніе химическихъ работъ Пастера. *Я. Бардахъ.* Значеніе Пастера въ медицинѣ и бактеріологіи. *Р. Прендель.* Памяти Н. И. Кокшарева. *Е. Клименко и Рифаловичъ.* О производныхъ паракриловой и гидракриловой кислотъ. *Е. Клименко и Бандалинъ.* О продуктахъ разложенія ялапина при сухой перегонкѣ. *Я. Лебединскій.* Отчетъ о зоологической экскурсіи лѣтомъ 1892 г. *М. Сидоренко.* О минеральномъ составѣ и происхожденіи пыли въ январскомъ снѣгѣ въ Одессѣ.

А. Лебединцев. Отчетъ о научной поѣздкѣ по Черному морю на военномъ транспортѣ «Ингулъ» въ 1892 г. *Р. Прендель*. Петрографическое изслѣдованіе метеорита Гроссъ-Либенталь. *Н. Андрусовъ*. Замѣчанія о семействѣ Dreissensidae. *И. Синцовъ*. Объ Одесскихъ буровыхъ скважинахъ. Цѣна 2 руб.

Вып. 2-й. *И. Синцовъ*. Гидрогеологическое описаніе Одесскаго градоначальства. *Е. Клименко и В. Рудницкій*. О вліяніи соляной кислоты и хлористыхъ металловъ на фотохимическое разложеніе хлорной воды. *Е. Клименко*. О реакціи, происходящей при фотохимическомъ разложеніи хлорной воды въ присутствіи соляной кислоты и хлористыхъ металловъ. Цѣна 3 руб.

Томъ XIX. Вып. I-й. *М. Сидоренко*. Петрографическое изслѣдованіе Курскаго самородка. *А. Браунеръ*. Замѣтки о птицахъ Херсонской губерніи. *А. Лебединцевъ* и *М. Пастернакъ*. Къ вопросу объ измѣненіи химическаго состава воды Одесской бухты по лѣтнимъ наблюденіямъ 1893 года. *П. Шестериковъ*. Матеріалы для флоры юго-западной части Одесскаго уѣзда Херсонской губерніи. *Р. Прендель*. Метеоритъ «Забродье». *А. Васильевъ*. Нивелирное соединеніе уровней моря и лимановъ Куяльницкаго и Хаджибейскаго. Цѣна 2 руб.

Вып. 2-й. *П. Бучинскій*. Наблюденія надъ эмбріональнымъ развитіемъ Malacostraca. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Томъ XX. Вып. I-й. *М. Рудскій*. О происхожденіи лимановъ Херсонской губерніи. *Его-же*. Измѣненія уровня лимановъ. *Его-же*. Предварительный отчетъ о поѣздкѣ въ Крымъ лѣтомъ 1894 г. *Р. Прендель*. Замѣтка о Савчинскомъ метеоритѣ. *И. Синцовъ*. Геологическое изслѣдованіе Одесскаго уѣзда. *П. Бучинскій*. Простѣйшіе организмы Хаджибейскаго и Куяльницкаго лимановъ. Цѣна 1 р. 50 коп.

Вып. 2-й. *А. Лебединцевъ*. Химическія изслѣдованія Мраморнаго моря на турецкомъ пароходѣ «Селаникъ» въ 1894 г. *М. Сидоренко*. Сіенитъ съ шаровой отдѣльностью на берегу р. Базавлука. *А. Веріго*. Изслѣдованіе Куяльницкаго и Хаджибейскаго лимановъ. *А. Лебединцевъ и В. Кришжановскій*. Физико-химическія изслѣдованія Одесскихъ лимановъ. *В. Ласкаревъ*. Геологическія наблюденія вдоль Новоселицкихъ вѣтвей юго-зап. жел. дорогъ. *С. Мокржецкій*. Нѣкоторыя наблюденія надъ цикломъ половаго развитія Schizoneura lanigera Hausm. *И. Синцовъ*. Замѣтки объ изслѣдованіяхъ искусственной подпочвенной воды, появившейся около Одесской водопроводной станціи и большого вокзала. *П. Петренко-Критченко*. О вліяніи замѣщенія на ходъ нѣкоторыхъ реакцій углеродистыхъ соединеній. *А. Остроумовъ*. Crangon vulgaris Fabr. Var. Shidlovskii m. изъ сѣверо-японскаго моря. Цѣна 2 руб.

Томъ XXI. Вып. I-й. *Е. Куликовскій*. Матеріалы для фауны Coleoptera Южной Россіи. Цѣна 2 руб.

Вып. 2-й. *И. Синцовъ*. О палеонтологическомъ отношеніи Новороссійскихъ неогеновыхъ осадковъ къ пластамъ Австро-Венгріи и Румыніи. *И. Синцовъ*. О буровыхъ скважинахъ Одесскихъ сахаро-рафинадныхъ заводовъ. *И. Синцовъ*. Описаніе нѣкоторыхъ видовъ неогеновыхъ окаменѣлостей, найденныхъ въ Бессарабіи и въ Херсонской губерніи. *В. Ласкаревъ*. О сарматскихъ отложеніяхъ нѣкоторыхъ мѣстъ Волынской губерніи. *М. Сидоренко*. Петрографическое изслѣдованіе нѣскольких образцовъ ила Куяльницкаго лимана. *П. Бучинскій*. Фауна Одесскихъ лимановъ. Цѣна 2 руб.

Томъ XXII. Вып. I-й. *Я. Лебединскій*. Наблюденія надъ исторіей развитія Немертинъ. *И. Синцовъ*. Замѣтки объ остаткахъ динотерія, найденныхъ въ Бессарабіи и въ Херсонской губерніи. *С. Танатаръ*. Памяти Виктора Мейера. *И. Синцовъ*. Къ вопросу о палеонтологическомъ отношеніи новороссійскихъ неогеновыхъ осадковъ къ пластамъ Австро Венгріи и Румыніи. *Его-же*. Объ одесскихъ оползняхъ и о причинахъ ихъ происхожденія. Цѣна 3 руб.

Складъ изд. при Новороссійск. Обществѣ Естествоиспыт., въ Одессѣ.


3 2044 102 937 018